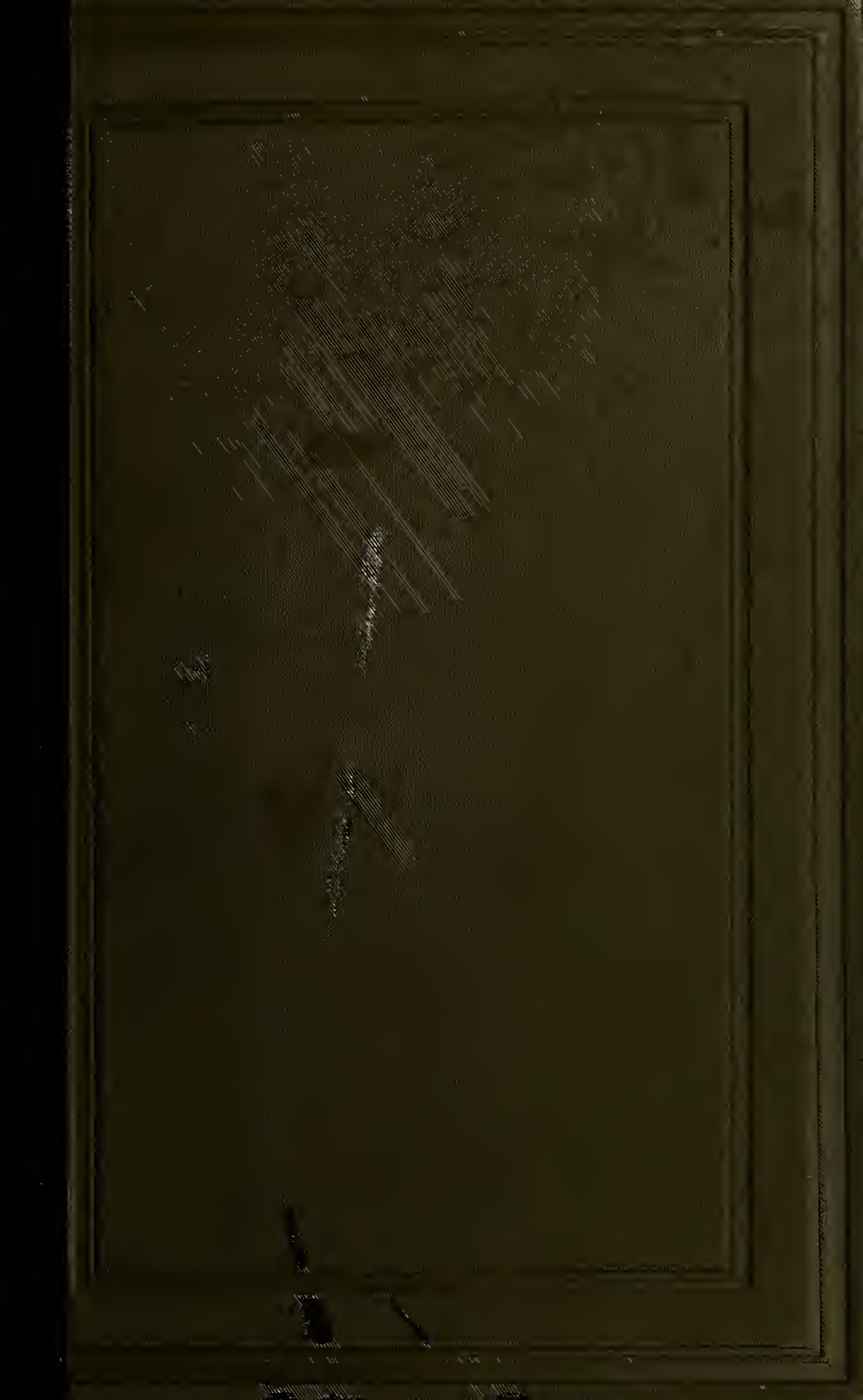
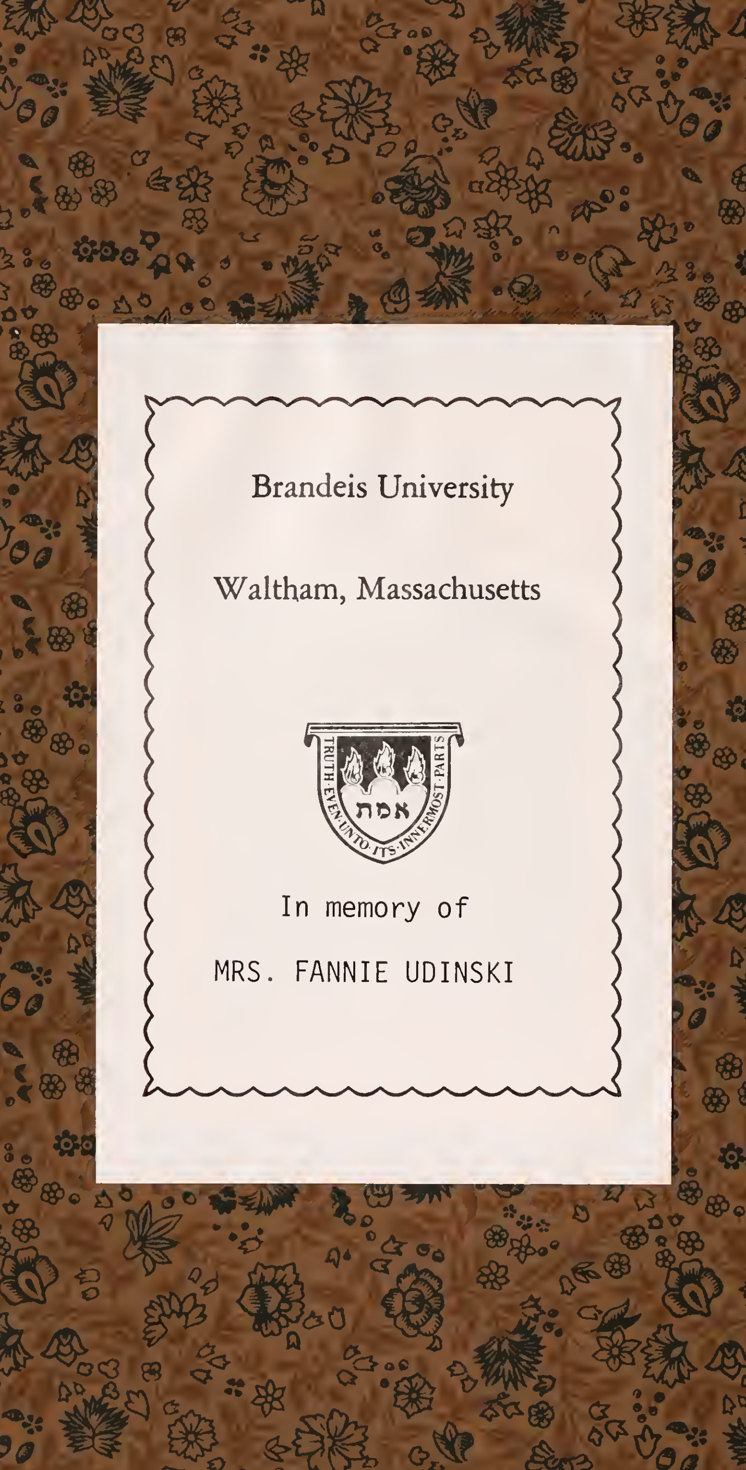
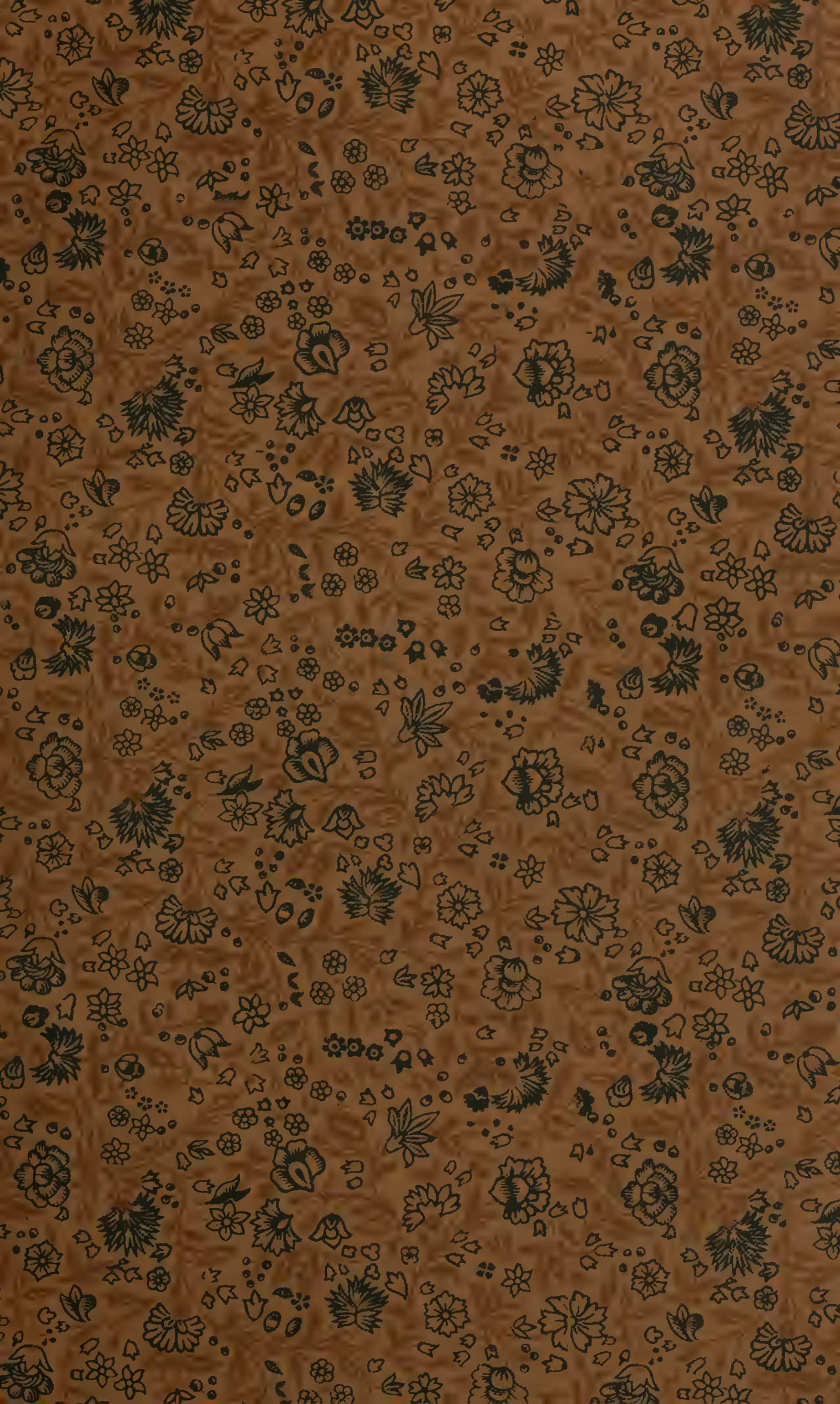






LEHRBUCH

DER

DARSTELLENDEN GEOMETRIE

VON

DR. KARL ROHN,
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER K. S. TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU DRESDEN,

UND

DR. ERWIN PAPPERITZ,
PROFESSOR DER MATHEMATIK
UND DARSTELLENDEN GEOMETRIE AN DER
K. S. BERG-AKADEMIE ZU FREIBERG.

IN ZWEI BÄNDEN.

ERSTER BAND.

MIT ZAHLREICHEN FIGUREN IM TEXT.

ZWEITE, UMGEARBEITETE AUFLAGE.



LEIPZIG,
VERLAG VON VEIT & COMP.
1901.



Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort zur ersten Auflage.

Für die Studierenden der exakten Wissenschaften liegt die Notwendigkeit vor, sich eine geläufige Raumanschauung zu erwerben. Ohne diese ist ein tieferes Eindringen in die einzelnen Naturwissenschaften und technischen Fächer unmöglich. Die praktische Erfahrung hat aber gelehrt, daß genaue Raumvorstellungen schwer zu erlernen sind. Das einzige Mittel hierzu bietet die bildliche Wiedergabe räumlicher Objekte nach mathematischer Methode, also die darstellende Geometrie. Durch sie und nur allmählich unter Behandlung zahlreicher Beispiele wird der Studierende dahin gebracht, sich in den Fragen, welche die räumlichen Formen betreffen, mit Sicherheit zurecht zu finden. Die darstellende Geometrie hat die Methoden zur Abbildung aller der geometrischen Gebilde zu entwickeln, die als Formelemente an den praktisch vorkommenden komplizierteren Objekten wiederkehren. Bei der Auswahl und Anordnung des Stoffes ist aber vor allem als Ziel die Entwickelung der Raumanschauung ins Auge zu fassen. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint es zweckmäßig, auch bei den ebenen Figuren zur Erklärung ihrer Eigenschaften und ihrer Abhängigkeit voneinander die sich im Raume vollziehende Projektion zu benutzen und die letztere überhaupt, wo es nur angeht, in den Vordergrund zu stellen. Dies gilt beispielsweise von der Erklärung der Kollinearverwandtschaften ebener Figuren und von der Theorie der Kegelschnitte; bei den letzteren ist die Entstehung aus der Centralprojektion des Kreises als Ausgangspunkt geeigneter, als die Erzeugungsweise durch projektive Büschel und Reihen, die der mehr formalen Methode der Geometrie der Lage entspricht.

Das vorliegende Buch soll nach der Meinung der Verfasser vornehmlich dem Zwecke dienen, durch die Lösung der Darstellungsprobleme dem Leser die klare Erfassung geometrischer Fragen und die Bildung präziser Raumvorstellungen zu vermitteln. Es setzt

nur die einfachsten geometrischen Kenntnisse voraus, schreitet systematisch vom Leichten zum Schwereren fort und bezieht viele solche stereometrische Aufgaben in den Lehrbereich ein, die zur Erreichung des oben bezeichneten Zieles geeignet erscheinen. Hierdurch dürfte es besonders den Bedürfnissen des Studierenden Rechnung tragen. Dem mit dem Stoff vertrauten Leser wird neben dem Bekannten gewiß manches Neue, manche Vereinfachung von Konstruktionen und Beweisen entgegentreten.

Der Wunsch, die Ergebnisse der darstellenden Geometrie durchweg auf die Projektionsmethoden begründet zu sehen, mag das Erscheinen dieses Buches rechtfertigen. Möge es sich im dargelegten Sinne als nutzbringend erweisen!

Im August 1893.

Karl Rohn. Erwin Papperitz.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die neue Auflage unterscheidet sich von der ersten in mehreren Beziehungen.

Im I. Kapitel erschien eine Kürzung zweckmäßig: von dem Abschnitt über die im weiteren Sinne affinen Figuren der Ebene sind nur die konstruktiv wichtigsten Ergebnisse beibehalten, aber zusammen mit einigen Konstruktionen des V. Kapitels in die übrigen Abschnitte eingereiht worden. — Der Gang der Entwickelung ist im II., III. und IV. Kapitel derselbe geblieben, wie vorher; nur wird man bemerken, daß die Lösungen verschiedener Aufgaben vereinfacht sind. Beim Dreikant wurde der Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie gedacht. Durch die Einfügung von Beispielen für die Schattenkonstruktion an architektonischen Objekten soll den Studierenden technischer Richtung die praktische Anwendung der erlernten Methoden leichter gemacht werden. — Das V. Kapitel hat eine tiefergreifende Umgestaltung erfahren; ihr Ziel ist wiederum Vereinfachung der Theorie und Abkürzung der Konstruktion; zugleich hat der Stoff manche wichtige Bereicherung empfangen. Weil die Schulung der geometrischen Vorstellungskraft die vornehmste Aufgabe der deskriptiven Geometrie ist und ein gründliches Durcharbeiten der Lehre von den Kegelschnitten an der Hand anschaulicher Methoden hierzu eines der förderlichsten Mittel bietet, ist die Begründung der Kegelschnittkonstruktionen durch die im Raume sich vollziehende Centralprojektion des Kreises wie früher in den Vordergrund gestellt, aber noch mehr systematisch durchgeführt worden. Dabei blieb der Erzeugung der Kurven 2. Ordnung durch projektive Büschel und Reihen genügender Raum gewahrt, um der Vorteile, die sie für eine glatte Entwickelung vieler graphisch verwertbarer Sätze darbietet, nicht verlustig zu werden. Der Abschnitt über die Krümmungskreise der Kegelschnitte giebt eine durchaus neue Begründung der zweckmäßigsten Konstruktionen.

Auch die Untersuchung über die gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte hat eine völlig neue Gestalt erhalten. — Am Anfang des VI. Kapitels sind die Vorbemerkungen über die geometrische Verwendung des Begriffes unendlich kleiner Größen zur Erleichterung des Verständnisses ausführlicher gehalten und schärfer begründet worden. — Im VII. Kapitel ist bei der stereographischen Projektion der Aufgaben der Kartenprojektion Erwähnung gethan und am Schlusse sind einige Beispiele für die Anwendungen auf Schatten- und Steinschnittkonstruktion angefügt worden.

Ein Anhang bringt Litteraturnachweise und historische Anmerkungen, die freilich bei ihrer Kürze keinen Anspruch darauf erheben, ein vollständiges Bild der geschichtlichen Entwickelung zu geben.

Wir hoffen durch die vorgenommenen Änderungen die Brauchbarkeit unseres Buches erhöht zu haben. Möge es wiederum freundliche Aufnahme finden!

Im März 1901.

Karl Rohn. Erwin Papperitz.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Kapitel. Ähnlichkeit und Affinität ebener Figuren.

Ähnlichkeit ebener Figuren.

1. Centralprojektion einer Ebene auf eine zweite parallele Ebene. Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage 7
2. Parallelverschiebung der Bildebene. Ähnlichliegende Figuren einer Ebene 8
3. Drei paarweise ähnlichliegende Figuren 9
4. Ähnlichkeitscentra zweier Kreise 10

Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine andere Ebene.

5. Parallelprojektion einer Ebene auf eine zweite. Affinität bei affiner Lage 10

6. 7. Eigenschaften affingelegener Figuren 11

8. Drei paarweise affinliegende Figuren 12
9. Affingelegene Figuren in einer Ebene (Indirekte Definition) . . 13
10. Drehung der einen Figur um die Affinitätsachse 13

Affine und affingelegene Figuren einer Ebene.

11. Affingelegene Figuren in einer Ebene (Direkte Definition) . . 13
12. Affingelegene rechte Winkel 15
13. Affingelegene gleiche Winkel 15
14. Verhältnis affiner Strecken 16

Die Ellipse als affine Kurve zum Kreise und ihre Konstruktion.

15. 16. Ellipse; konjugierte Durchmesser, Achsen 17

17. Der zu einer Ellipse affine Kreis bei gegebener Affinitätsachse . 19

18. 19. Konstruktion der Ellipse aus konjugierten Durchmessern (Zwei Verfahren) 20

20. 21. Konstruktion der Ellipse aus den Achsen. Tangente und Normale 21

22. Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus konjugierten Durchmessern 23
23. Mechanische Erzeugung der Ellipse 23
24. Konstruktion der Ellipse aus fünf Punkten 24

Seite

II. Kapitel. Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen in orthogonaler Projektion. Bestimmung der einfachen Beziehungen dieser Grundgebilde zu einander.

Das Verfahren der orthogonalen Parallelprojektion.

25. Orthogonalprojektion 25
26. Grundriß- und Aufrißverfahren. Zwei-Tafel-System 26
27. Projektionen und Tafelabstände eines Punktes 27
28—30. Projektionen und Spurpunkte einer Geraden 27
31. Spurlinien einer Ebene 29
32—34. Drei-Tafel-System. Seitenriß 29
35. 36. Besondere Lagen einer Geraden oder Ebene. Hilfsprojektion . 30
37. 38. Vereinigung der Tafeln mit der Zeichnungsebene. Zeichnungsregeln 31

Darstellung der Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene in verschiedenen Lagen.

39—41. Der Punkt 33
42—44. Die Gerade 34
45. Die Ebene 37

Punkte, Gerade und Ebenen in vereinigter Lage. Verbindungs- und Schnittelemente. Parallelismus.

46—51. Kriterien für die vereinigte Lage, bezw. den Parallelismus zweier Grundgebilde 38
52. Haupt- oder Streichlinien einer Ebene 42
53—65. Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen, die durch Bedingungen (nämlich als Schnitt-, Verbindungs- oder Parallelelemente) bestimmt sind 42

Gerade und Ebenen in rechtwinkliger Stellung. Abstände und Winkel. Die Umlegung in eine Tafel und die Drehung um die Parallele zu einer Tafel.

66. Projektion eines rechten Winkels in einen rechten Winkel . . 50
67—70. Normalen einer Ebene. Falllinien. Lot aus einem Punkt auf eine Ebene. Normalebene zu einer Geraden durch einen Punkt 50
71—73. Bestimmung der wahren Länge einer Strecke 52
74. Teilung einer Strecke 53
75. 76. Tafelneigungen einer Geraden. Eine Gerade mit gegebenen Tafelneigungen zu zeichnen 53
77. 78. Tafelneigungen einer Ebene. Eine Ebene mit gegebenen Tafelneigungen zu zeichnen 54
79. Der senkrechte Abstand eines Punktes von einer Ebene . . . 56
80. Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur durch Umlegung in eine Tafel 57
81. Affinität zwischen Grund- und Aufriß einer ebenen Figur . . 58
82—84. Winkel zweier Geraden, zweier Ebenen, einer Geraden und einer Ebene 59

Seite

85. Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur durch Paralleldrehung zu einer Tafel 61
86. Abstand eines Punktes von einer Geraden 61
87. Errichtung einer Normalen von gegebener Länge in einem Punkte eines Dreiecks 63
88. Drehung eines Punktes um eine Tafelparallele durch einen gegebenen Winkel 63
89—91. Der kürzeste Abstand zweier windschiefer Geraden 64

Lösung verschiedener stereometrischer Aufgaben durch Projektionsmethoden.

92—94. Rotationskegel. Zwei Kegel mit gemeinsamer Spitze. Polarkegel 67
95. Rotationscylinder 69
96. Neigungskreis in einer Ebene für Gerade und Ebenen durch einen Punkt 69
97. Gerade von gegebener Tafelneigung in einer Ebene 70
98. Ebenen von gegebener Tafelneigung durch eine Gerade . . 71
99. Schnittlinien zweier Rotationskegel mit gemeinsamer Spitze . 71
100. Gemeinsame Tangentialebenen zweier Rotationskegel mit gemeinsamer Spitze 73
101. 102. Anwendung auf Gerade und Ebenen mit gegebenen Tafelneigungen 74
103. Gerade, die zwei windschiefe Gerade unter gegebenen Winkeln schneiden 75
104. Ebenen durch einen Punkt, die mit zwei Geraden gegebene Winkel einschließen 75
105. Gerade in einer Ebene, die von zwei festen Punkten außerhalb gegebene Abstände haben 76
106. Gerade durch einen Pnnkt, die von zwei Geraden vorgeschriebene Abstände haben 77
107. Dreieck, von dem eine Projektion und die Form der andern gegeben ist 78
108. Dreieck, von dem eine Projektion und die Form gegeben ist 79
109. Schiefe Parallelprojektion eines Kreises in eine gegebene Ellipse 80

III. Kapitel. Ebenflächige Gebilde, Körper.

Die körperliche Ecke; das Dreikant.

110. Das n-Kant und seine Bestimmungsstücke 82
111. Seiten- und Winkelsumme des konkaven n-Kants, Polar-n-Kant 82
112. Das Dreikant. Die sechs Fundamentalaufgaben 84
113—120. Konstruktion des Dreikants aus Seiten und Winkeln . . . 85
121. Dreikant und das zugehörige sphärische Dreieck 93
122. Konstruktion eines Dreikants aus andern Bestimmungsstücken 94

Allgemeines über Vielflache; reguläre Vielflache.

123. Das Vielflach oder Polyëder. Satz von Euler 96
124. Anzahl der Bestimmungsstücke eines Vielflachs 97

			Seite
125.	126.	Folgerungen aus dem Euler'schen Satze	98
	127.	Wahrer und scheinbarer Umriß eines Polyëders	99
	128.	Reguläre Polyëder. Konstruktion des Achtflachs	100
129.	130.	Konstruktion des Zwölfflachs	101
131.	132.	Konstruktion des Zwanzigflachs	105
	133.	Reguläre Sternpolyëder	107
	134.	Tetraëder, dessen Projektionen der Form nach bekannt sind	108
	135.	Konstruktion des Würfels aus Kantenlänge und den Richtungen der ersten Kantenprojektionen	109
	136.	Konstruktion des Würfels aus den Längen der ersten Kantenprojektionen	110
	137.	Die einem Vierflach umschriebene Kugel	111
	138.	Die einem Vierflach eingeschriebene Kugel	112

Ebene Schnitte und Netze von Vielflachen, insbesondere Prismen und Pyramiden.

	139.	Ebener Schnitt und wahre Gestalt einer einzelnen Seitenfläche. Netz des Vielflachs	114
	140.	Prismen und Pyramiden	115
141.	142.	Schnitt und Netz vom geraden und schiefen Prisma	115
	143.	Schnitt und Netz einer Pyramide	118
	144.	Bestimmung eines vierseitigen Pyramidenstumpfes aus Basis- und Schnittfläche und deren Neigungswinkel	119

Durchdringung zweier Vielflache.

145.	Allgemeines über die Durchdringungsfigur	121
146.	Durchdringung von Würfel und Tetraëder	122
147.	Durchdringung von Prisma und Pyramide in spezieller Lage	123
148 — 150.	Durchdringung von Prismen und Pyramiden in allgemeiner Lage	125

Schlagschatten und Eigenschatten bei Vielflachen.

151.	Schlag- und Eigenschattenbegrenzung bei parallelen Lichtstrahlen	128
152.	Eigenschatten eines Zwölfflachs und Schlagschatten auf die Tafeln	128
153.	Schlagschatten eines Vielflachs auf ein anderes (Abgestumpfte Pyramide und Achtflach)	130

Beispiele für angewandte Schattenkonstruktion.

154.	Freitreppe	131
155.	Fenster	133
156.	Dachfläche mit Schornstein	135

Seite

IV. Kapitel. Perspektivität ebener Figuren. Harmonische Gebilde.

Centralprojektion einer Ebene auf eine andere Ebene.

157. Centralprojektion einer ebenen Figur 135
158. Spezialfälle: Affine, ähnliche, kongruente Figuren 136
159. Flucht- und Verschwindungspunkt einer Geraden. Flucht- und Verschwindungslinie einer Ebene 136
160. Unendlich ferne Elemente. Richtung der Geraden, Stellung der Ebene 137
161. Bestimmung der Centralprojektion bei gegebener Original- und Bildebene 137
162. Drei paarweise perspektive Figuren 138
163. Drehung einer von zwei perspektiven Figuren um die Achse 139
164. Vereinigung von Original- und Bildebene durch Drehung . 140
165. Perspektive Beziehungen zwischen Grund- und Schnittpolygon einer Pyramide 140

Perspektive in der Ebene.

166. Eigenschaften perspektiver oder centrisch-kollinearer Figuren einer Ebene 141
167. Übergang von der ebenen zur räumlichen Perspektive . . . 141
168—171. Bestimmungsstücke der Perspektive, Gegenachsen (Flucht- und Verschwindungslinie) und Gegenpunkte (Flucht- und Verschwindungspunkt) 142

Perspektive Grundgebilde.

172. 173. Die einförmigen Grundgebilde: Punktreihe, Strahlbüschel, Ebenenbüschel. Perspektive Lage zweier Grundgebilde . 144
174. Perspektive Punktreihen, Gegenpunkte 144
175—180. Unendlich viele perspektive Lagen dreier Punkte einer Graden zu dreien einer zweiten. Das Entsprechen aller Punkte der beiden Reihen ist hierbei stets das gleiche. Folgerungen hieraus 145
181. 182. Unendlich viele perspektive Lagen von drei Strahlen eines Büschels mit drei Strahlen eines zweiten. Ihre perspektive Beziehung ist dadurch bestimmt 148
183. Entsprechende Paare rechtwinkliger Strahlen 149
184. Folgerungen 149
185. Kongruente Schnitte aus perspektiven Büscheln 149
186. Von zwei perspektiven Büscheln kann jedes als Orthogonalprojektion des andern angesehen werden 150
187. 188. Unendlich viele perspektive Lagen von drei Ebenen eines Büschels mit drei Ebenen eines zweiten. Ihre perspektive Beziehung ist dadurch bestimmt. Entsprechende Paare rechtwinkliger Ebenen. Folgerungen 151
189. Projektivität von einförmigen Grundgebilden 152
190. $ABCD$, $BADC$, $CDAB$ und $DCBA$ sind projektiv 152
191—193. Überführung zweier beliebiger Vierecke in perspektive Lage 153

Seite

Harmonische Grundgebilde. Vierseit und Viereck.

194. Das vollständige Vierseit 156

195—198. Definition der harmonischen Lage von vier Punkten. Harmonische Beziehungen am Vierseit 156

199. Acht verschiedene projektive Anordnungen von vier harmonischen Punkten 159

200. Vier harmonische Strahlen oder Ebenen 159

201. Konstruktion des vierten harmonischen Punktes 160

202. 203. Das vollständige Viereck; harmonische Beziehungen an ihm. Konstruktion des vierten harmonischen Strahles 160

204. Spezielle harmonische Punkte und Strahlen 161

205. Verwandlung eines Vierecks durch Perspektive in ein Quadrat 162

Metrische Beziehungen zwischen perspektiven Grundgebilden.

206. 207. Verhältnisgleichung zwischen ähnlichen und affinen Strecken 162

208. 209. Messung von Strecken und Winkeln (Das Vorzeichen) . . . 163

210. 211. Bestimmung jedes Elementes in einer Punktreihe, einem Strahl- oder Ebenenbüschel durch ein Abstandsverhältnis 164

212. 213. Das Doppelverhältnis von vier Punkten, Strahlen oder Ebenen 165

214—217. Doppelverhältnisgleichheit bei projektiven einförmigen Grundgebilden. Umkehrung 166

218. Das Doppelverhältnis von vier harmonischen Punkten . . . 168

Involutorische Grundgebilde.

219—221. Vertauschbares Entsprechen bei involutorischen Punktreihen. Mittelpunkt der Involution; ihre Gegenpunkte decken sich 169

222. 223. Gleichlaufende und entgegenlaufende involutorische Reihen. Letztere besitzen Doppelpunkte; ihre harmonische Lage zu den Punktepaaren 170

224. Zwei Punktepaare bestimmen eine Involution. Konstruktion der Paare mittels eines vollständigen Vierecks 172

225. Herstellung der involutorischen Lage 172

226. Metrische Beziehungen 173

227. 228. Vertauschbares Entsprechen bei involutorischen Strahl- oder Ebenenbüscheln 173

229. Zwei Strahlenpaare bestimmen eine Involution. Konstruktion der Paare mittels eines Vierseits 174

230. 231. Das Rechtwinkelpaar. Die Involution rechtwinkliger Strahlenpaare 174

232. Doppelstrahlen; ihre harmonische Lage zu den Strahlenpaaren 176

233. Metrische Beziehungen 177

V. Kapitel. Die Kegelschnitte als Kreisprojektionen.

Perspektivität zweier Kreise. Pol und Polare beim Kreise. Involutorische Centralprojektion in der Ebene. Perspektivität zweier Kreise im Raume.

234—236. Perspektive Lagen zweier Kreise einer Ebene. Die Ähnlichkeitspunkte als Centren, die Chordale als Achse 178

Seite

237—239. Jeder Kreis ist zu sich selbst perspektiv; Achse oder Centrum der Perspektive ist dabei beliebig. Definition und Eigenschaften von Pol und Polare 182
240—243. Involutorische Centralprojektion in der Ebene. Kreisbüschel, die in sich übergehen 184
244—246. Involutionen bei Kreisbüscheln; Konstruktion der Doppelpunkte 188
247—251. Schiefer Kreiskegel. Wechselschnitte. Zwei beliebige Kreise einer Kugel sind perspektiv und umgekehrt 189
252. Symmetrieebenen des schiefen Kreiskegels 193
253—256. Centralprojektionen eines Kreises in einen andern, wobei eine nicht schneidende Gerade in die unendlich ferne, oder ein innerer Punkt in den Mittelpunkt, oder drei Punkte des Originals in drei Punkte des Bildes übergehen 194

Entstehung der Kegelschnitte aus der Centralprojektion des Kreises. Um- und eingeschriebene Polygone.

257—259. Definition der Kegelschnitte als perspektive Bilder eines Kreises; sie sind stetige geschlossene Kurven und teilen die Ebene in ein inneres und ein äußeres Gebiet. Zwei Schnittpunkte mit einer Geraden und zwei Tangenten aus einem Punkte 196
260—262. Drei Arten der Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel, Parabel . 198
263. Projektive Punktreihen oder Strahlbüschel gehen bei jeder Centralprojektion wieder in solche Reihen oder Büschel über 200
264. Die Punkte eines Kreises oder Kegelschnittes projizieren sich aus zwei festen Punkten auf ihm durch projektive Strahlbüschel 200
265. Die Tangenten eines Kreises oder Kegelschnittes schneiden zwei feste Tangenten an ihn in projektiven Punktreihen . 201
266. 267. Zwei Vierecke, die einem Kreise oder Kegelschnitt in den nämlichen Punkten ein- und umgeschrieben sind 202
268. 269. Pascal'sches Sechseck und Brianchon'sches Sechsseit . . 204
270—274. Spezialfälle der Sätze von Pascal und Brianchon . . . 205

Pol und Polare eines Kegelschnittes. Mittelpunkt, Durchmesser und Achsen.

275. Die Eigenschaften von Pol und Polare, abgeleitet aus dem Satz vom umgeschriebenen Vierseit und eingeschriebenen Viereck 208
276. Polardreieck 209
277—281. Harmonische Pole und Polaren eines Kegelschnittes. Beschreibt der Pol eine Punktreihe, so beschreibt seine harmonische Polare einen dazu projektiven Strahlbüschel . . 210
282—284. Involution der harmonischen Pole auf einer Geraden und der harmonischen Polaren durch einen Punkt 212
285—287. Durchmesser und Mittelpunkt eines Kegelschnittes 214
288—291. Konjugierte Durchmesser und Achsen 216
292. Um- und eingeschriebene Parallelogramme bei einem Kegelschnitt 218

Seite

Die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlbüschel und Punktreihen.

293—295. Definition des Kegelschnittes als Erzeugnis projektiver Strahlbüschel. Zwei beliebige Punkte auf ihm können als Scheitel für solche Büschel dienen 219
296. Satz vom umgeschriebenen Vierseit und eingeschriebenen Viereck 221
297—300. Die Tangenten eines Kegelschnittes schneiden auf je zwei festen Tangenten projektive Punktreihen aus. Projektive Punktreihen erzeugen einen Kegelschnitt 221
301—303. Konstruktion eines Kegelschnittes, wenn man fünf Punkte, oder vier Punkte und in einem die Tangente, oder drei Punkte und in zweien die Tangente kennt 224
304—306. Konstruktion eines Kegelschnittes, wenn man fünf Tangenten, oder vier Tangenten und von einer den Berührungspunkt, oder drei Tangenten und von zweien die Berührungspunkte kennt 225
307—309. Die Überführung eines Kegelschnittes in einen dazu perspektiven Kreis 227

Einige Konstruktionsaufgaben bei Kegelschnitten. Metrische Eigenschaften.

310—313. Zwei projektive Punktreihen auf derselben Geraden und zwei projektive Strahlbüschel mit demselben Scheitel. Konstruktion der Doppelelemente, Gegenpunkte und Rechtwinkelstrahlen 230
314. Punktreihen auf und Tangentenbüschel an einem Kegelschnitt 233
315. 316. Die Punktinvolution auf einen Kegelschnitt; ihr Mittelpunkt. Die Strahleninvolution an einem Kegelschnitt; ihre Achse 234
317. 318. Konstruktion der Doppel- und Rechtwinkelstrahlen einer Strahleninvolution, sowie der Doppelpunkte und des Mittelpunktes einer Punktinvolution 235
319—327. Lösung von Aufgaben über Kegelschnitte, von denen fünf Punkte *ABCDE* oder fünf Tangenten *abcde* gegeben sind. Schnittpunkte eines Kegelschnittes *ABCDE* mit einer Geraden und Tangenten an einem Kegelschnitt *abcde* aus einem Punkte. Polare eines Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt *ABCDE* und Pol einer Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt *abcde*. Konjugierte Durchmesser, Achsen und Asymptoten. Involution harmonischer Pole auf einer Geraden und harmonischer Polaren an einem Punkte. Tangenten aus einem Punkte an den Kegelschnitt *ABCDE* und Schnittpunkte einer Geraden mit dem Kegelschnitt *abcde* 236
328. Konstruktion der Achsenendpunkte mit Hilfe zweier Punkte oder zweier Tangenten des Kegelschnittes 241
329. 330. Kriterien für die Art des durch zwei projektive Strahlbüschel oder Punktreihen erzeugten Kegelschnittes 242
331. Konstantes Produkt der von einer beliebigen Tangente auf zwei parallelen Tangenten bewirkten Abschnitte 243
332. Gleichungen der Ellipse und Hyperbel 244
333—335. Die Hyperbeltangenten liefern auf den Asymptoten Abschnitte

Seite

mit konstantem Produkt. Asymptotengleichung der Hyperbel. Hyperbel und Asymptoten begrenzen auf jeder Geraden Strecken mit gemeinsamem Mittelpunkt 245
336. 337. Halbierung der Strecke zwischen Sehnenmitte und Pol durch die Parabel. Teilung der von einem Punkt an die Parabel gezogenen Tangenten nach dem gleichen Verhältnis durch jede andere Tangente. Parabelgleichung 247
338—341. Aus einem gegebenen Rotationskegel eine vorgegebene Ellipse, Hyperbel oder Parabel auszuschneiden 248

Gesetz der Dualität. Reciprokalfiguren in Bezug auf einen Kegelschnitt. Aufgaben zweiten Grades. Imaginäre Lösungen.

342—345. Gesetz der Dualität für ebene und räumliche Figuren . . . 252
346. 347. Reciprozität in Bezug auf einen Kegelschnitt 254
348—351. Aufgaben ersten und zweiten Grades. Fundamentalaufgaben zweiten Grades und die hierbei auftretenden imaginären Lösungen. Konstruktiv verwertbare imaginäre Elemente . 255
352. 353. Realitätsverhältnisse bei zwei und drei Punktepaaren in harmonischer Lage. Gemeinsames Elementepaar zweier Involutionen auf demselben Träger 257
354. 355. Zwei Punktinvolutionen auf verschiedenen Trägern, ebenso zwei Strahleninvolutionen mit verschiedenen Scheiteln sind stets in doppelter Weise perspektiv gelegen 258
356—358. Konstruktion von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen 260
359. 360. Involution rechter Winkel. Imaginäre Kreispunkte der Ebene. Konstruktion des Kreises aus teilweise imaginären Elementen 262

Brennpunkte und Leitlinien eines Kegelschnittes.

361. Brennpunkte und Leitlinien der Schnittkurven eines Rotationskegels; erstere als Berührungspunkte zweier den Kegel berührender Kugeln. Konstantes Abstandsverhältnis der Kurvenpunkte von Brennpunkt und Leitlinie 264
362. Die Brennpunkte als Scheitel rechtwinkliger Polareninvolutionen 266
363. Tangente und Normale in einem Kurvenpunkt halbieren die Winkel der Brennstrahlen 267
364. 365. Perspektivität des Kegelschnittes mit einem Kreise um einen der Brennpunkte. Eigenschaften, die sich daraus ergeben 267
366—368. Ort der Fußpunkte aller von den Brennpunkten auf die Tangenten gefällten Lote. Tangentenkonstruktionen 269
369. Brennstrahlen und Tangenten aus einem beliebigen Punkt der Ebene schließen miteinander gleiche Winkel ein 270
370—373. Die harmonischen rechtwinkligen Polaren schneiden auf den Achsen eines Kegelschnittes Involutionen aus, deren Doppelpunkte die Brennpunkte sind. Haupt- oder Brennpunktsachse. Konstruktion der reellen Brennpunkte. Die Verhältnisse bei der Parabel. Brennstrahlen und Tangenten aus einem beliebigen Punkt der Ebene schließen miteinander gleiche Winkel ein 271

Seite

374. Ort der Schnittpunkte einer beweglichen Tangente mit zwei festen Tangenten bei der Parabel und mit den Asymptoten bei der Hyperbel 273
375—377. Konfokale Kegelschnitte. Kurven gleicher Art schneiden sich nicht, Kurven verschiedener Art aber unter rechten Winkeln 274

Krümmungskreise der Kegelschnitte.

378—380. Oskulations- oder Krümmungskreis. Perspektivität zwischen einem Kegelschnitt und einem ihn berührenden oder oskulierenden Kreise. Konstruktion des Krümmungskreises bei einem durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt . . 276
381. 382. Die Krümmungskreise in den Scheitelpunkten bei der Ellipse und Hyperbel 278
383. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes auf der Normalen eines Punktes, wenn zwei konjugierte Durchmesser oder die Achsen der Lage nach bekannt sind 279
384—387. Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte für die Endpunkte konjugierter Durchmesser bei der Ellipse und Hyperbel . 281
388. Die Krümmungskreise bei der Parabel 284

Gemeinsame Elemente zweier Kegelschnitte. Büschel und Scharen von Kegelschnitten. Perspektive Lage zweier beliebiger Kegelschnitte.

389. Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Punkten und solche mit vier gemeinsamen Tangenten 285
390. Bei zwei Kegelschnitten ist die Zahl der gemeinsamen Punkte oder Tangenten stets gerade 285
391. Polvierseit und Polviereck 286
392—393. Zwei Kegelschnitte besitzen auf jeder Geraden zwei gemeinsame harmonische Pole und in jedem Punkt zwei gemeinsame harmonische Polaren 287
394. 395. Das gemeinsame Polardreieck zweier Kegelschnitte. Mindestens eine Ecke und eine Seite davon sind reell 288
396—398. Jede Ecke des Polardreiecks ist der Scheitel einer Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die den Kegelschnitten gemeinsamen Punkte tragen. Auf jeder Seite liegt eine Punktinvolution; in ihren Doppelpunkten scheiden sich die gemeinsamen Tangenten 289
399. 400. Realitätsverhältnisse 290
401—406. Fünf verschiedene Fälle sind bezüglich der gegenseitigen Lage zweier Kegelschnitte zu unterscheiden. Konstruktionen . 291
407—409. Der Kegelschnittbüschel. Seine Kurven schneiden aus jeder Geraden eine Punktinvolution aus; die Polaren eines jeden Punktes gehen durch einen zweiten. Die Kegelschnittschar. Die Tangentenpaare an ihre Kurven bilden in jedem Punkte eine Involution; die Pole einer jeden Geraden liegen auf einer zweiten. Gerade gleicher Punktinvolution 297
410. 411. Kegelschnitte durch vier resp. drei Punkte, die eine resp. zwei Gerade berühren und die dualen Aufgaben 298
412. Die perspektive Lage zweier beliebiger Kegelschnitte . . . 301

Seite

VI. Kapitel. Ebene Kurven und Raumkurven.

Begriff des Unendlichkleinen in der Geometrie.

413. Endliche, unendliche und unendlich kleine Größen. Die Vergleichung endlicher Größen 303
414. Die Vergleichung unendlich kleiner Größen. Ordnungen derselben 304
415. Gleichungen zwischen unendlich kleinen Größen. Bestimmter Grenzwert für das Verhältnis zweier und für die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen 305
416—418. Wichtige Beispiele für geometrische unendlich kleine Größen verschiedener Ordnungen 306

Erzeugung ebener Kurven.

419. Erzeugung einer ebenen Kurve als Bahn eines bewegten Punktes. Nachbarpunkte, Kurvenelement. Stetigkeit. Sekante, Tangente. Stetigkeit in Bezug auf die Tangente . 308
420. 421. Erzeugung durch eine bewegte Gerade als Hüllkurve. Nachbartangenten, Kontingenzwinkel, Berührungspunkt. Die Stetigkeit als projektive Eigenschaft. Asymptoten 309
422. Gleichzeitige doppelte Erzeugung der Kurve. Fortschreitungs- und Drehungssinn des Punktes resp. der zugehörigen Tangente. Gewöhnlicher Kurvenpunkt, Wendepunkt, Rückkehrpunkt, Schnabelspitze, Doppelpunkt, isolierter Punkt . 310

Konstruktion von Tangenten und Normalen.

423. Zeichnung einer Kurve aus Punkten und Tangenten derselben 311
424. Tangente einer gezeichneten Kurve aus gegebenem Punkte und ihr Berührungspunkt 311
425. 426. Tangente und Normale in gegebenem Punkte einer gezeichneten Kurve 312
427. Normale aus gegebenem Punkte zu einer gezeichneten Kurve 313
428. Tangentenkonstruktion mittels der zur Konstruktion der Kurve selbst dienenden Hilfskurven 314
429—433. Beispiele: Ellipse, Cassini'sche Kurve, Konchoide, Pascal'sche Schneckenlinie 315

Krümmung der Kurven, Evoluten.

434. 435. Krümmungsmaß. Mittlere Krümmung eines Kurvenbogens, Krümmung einer Kurve in gegebenem Punkte. Stetigkeit in Bezug auf die Krümmung. Die für das Krümmungsmaß in Betracht kommenden unendlich kleinen Größen . . . 318
436. Krümmungskreis und Krümmungsmittelpunkt. Konkave und konvexe Seite einer Kurve, Krümmungswechsel 320
437—439. Der den Krümmungskreis bestimmende Grenzprozeß. Dreipunktige Berührung des Krümmungskreises mit der Kurve. Krümmungsmittelpunkt als Schnitt benachbarter Kurvennormalen 320
440. Evolute und Evolventen einer Kurve 322

Seite

441. Vierpunktige Berührung des Krümmungskreises mit der Kurve, Scheitelpunkte. Verhalten der Evolute 323
442. Verhalten der Krümmung im Wendepunkte, Rückkehrpunkte und bei der Schnabelspitze 323
443. Konstruktion des Krümmungskreises für einen Punkt einer gezeichneten Kurve 324
444. Beziehung zwischen der Krümmung einer ebenen Kurve und der ihres perspektiven Bildes 325

Rektifikation von Kurven.

445. Regel zur näherungsweisen Rektifikation. Rektifikation eines Kreises 327

Raumkurven und ihre Projektionen; abwickelbare Flächen.

446. Entstehung einer Raumkurve. Kurvenelement, Tangente, Schmiegungsebene. Normalebene, Hauptnormale, Binormale, Rektifizierende Ebene 328
447. Gleichzeitige Bewegungen des erzeugenden Punktes, der Tangente und der Schmiegungsebene. Stetigkeit. Kontingenz- und Torsionswinkel. Krümmung, Torsion 329
448. Die zur Raumkurve gehörige abwickelbare Fläche. Ihre Erzeugung durch die Tangenten und Schmiegungsebenen . . 329
449. Die Raumkurve als Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche 330
450. Abwickelung der Fläche und der auf ihr liegenden Kurven . 331
451. Elemente, die bei der Abwickelung erhalten bleiben: Bogenlängen der Kurven und ihre Winkel mit den Erzeugenden, Kontingenzwinkel, Bogenelemente und Krümmung der Rückkehrkurve 332
452. Beziehung zwischen den Krümmungsradien entsprechender Punkte einer Kurve der abwickelbaren Fläche und der abgewickelten Kurve 332
453. Geodätische Linien auf der abwickelbaren Fläche 333
454. Der Richtkegel einer Raumkurve 333
455. Evolutenfläche und Evolventen 333
456. Ebene Projektionen einer Raumkurve. Rückkehr-, Doppel- und Wendepunkte, die den Tangenten, Sehnen und Schmiegungsebenen durch das Projektionscentrum entsprechen . . . 334
457. Singularitäten bei den Raumkurven. Stationäre Ebene, Streckungspunkt, Rückkehrpunkt 334
458. Konstruktion der Tangente und Schmiegungsebene in einem Punkte einer Raumkurve 335

Krumme Oberflächen.

459. Bestimmung einer krummen Fläche durch ein sie überdeckendes Kurvensystem, Nachbarkurven. Erzeugung durch stetige Bewegung einer konstanten oder ihre Form ändernden Kurve 336
460. 461. Tangenten und Tangentialebenen einer Fläche. Knotenpunkte. 337
462. 463. Flächennormale, Normalschnitte. Isolierter, gewöhnlicher Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt im Schnitt mit der Tan-

Seite

gentialebene; elliptische, hyperbolische oder parabolische Krümmung. Haupttangenten. Spezialfälle der abwickelbaren, der Kegel- und Cylinderflächen 338

464. Tangentenkegel einer Fläche aus einem Raumpunkte . . . 339

VII. Kapitel. Kugel, Cylinder, Kegel.

Kugel, Cylinder und Kegel, ihre Projektionen, Eigen- und Schlagschatten.

465. 466. Bestimmung der Projektionen eines Flächenpunktes. Sichtbare und unsichtbare Flächenteile. Doppelkurven, wahrer und scheinbarer Umriß. Projektion einer auf der Fläche liegenden Kurve. Projizierender Cylinder, zur Projektionsrichtung parallele Tangentialebenen 340

467. Lichtstrahlencylinder, Lichtgrenze auf der Fläche. Flächenteile im Lichte, im Eigen- und Schlagschatten 342

468. Darstellung der Kugel, der Lichtgrenze auf ihr und ihres Schlagschattens 342

469. Cylinderflächen. Ihre Entstehung, Mantellinien, Tangentialebenen 344

470. Wahrer und scheinbarer Umriß einer Cylinderfläche. Lichtgrenze, Eigen- und Schlagschatten 345

471. Darstellung des elliptischen Cylinders, Lichtgrenze, Schlagschatten 346

472. Hohlcylinder, Schlagschatten auf der Innenfläche 348

473. Tangentialebenen eines Cylinders aus gegebenem Raumpunkte 348

474. Kegelflächen. Ihre Entstehung, Spitze, Mantellinien, Tangentialebenen 349

475. Wahrer und scheinbarer Umriß einer Kegelfläche. Lichtgrenze, Eigen- und Schlagschatten 349

476. Darstellung des geraden Kreiskegels in beliebiger Lage. Lichtgrenze, Eigen- und Schlagschatten 350

477. Hohlkegel, Schlagschatten auf der Innenfläche. Tangentialebenen des Kegels aus gegebenem Raumpunkte 352

478. Polstrahlen und Polarebenen, Achsen und Symmetrieebenen eines Kegels, dessen Grundkurve ein gegebener Kegelschnitt ist 353

479. Konjugierte, insbesondere rechtwinklige konjugierte Strahlen des Kegels. Konjugierte Punkte bezüglich der Grundkurve. Ort der konjugierten Punkte zu denen einer Geraden. Spurpunkte der Kegelachsen 354

480—483. Ausführung der Achsenbestimmung mit Hilfe einer gleichseitigen Hyperbel und eines Kreises. Bestimmung der Hyperbel. Hilfssatz. Bestimmung des Kreises. Allgemeiner Beweis des Hilfssatzes 355

Kugel, Cylinder, Kegel; ihre ebenen Schnitte und Abwickelungen.

484. Schnitt einer Kugel mit gegebener Ebene 359

485. Schnitt eines beliebigen Cylinders mit gegebener Ebene; Abwickelung 360

Seite
486. 487. Ebener Schnitt eines geraden Kreiscylinders; Abwickelung . 361
488. 489. Ebener Schnitt eines schiefen Kreiscylinders; Abwickelung . 363
490. 491. Ebener Schnitt und Abwickelung eines geraden Kreiskegels 367
492. 493. Ebener Schnitt und Abwickelung eines schiefen Kreiskegels 370
494. 495. Die geodätischen Kurven auf dem geraden Kreiskegel . . . 373

Durchdringung von Kugel-, Cylinder- und Kegelflächen.

496. 497. Allgemeines über Durchdringungen; Durchdringung von Cylinder- und Kegelflächen 375
498. 499. Durchdringung zweier Cylinderflächen, deren Grundkurven Kegelschnitte sind 376
500. 501. Durchdringung eines geraden Kreiskegels mit einem geraden Kreiscylinder 380
502. 503. Durchdringung von Kugel und Kegel 383
504. 505. Eigenschaften der Durchdringungskurve 4. Ordnung zweier Kegelflächen 386
506. Spezielle Durchdringungskurven zweier Kegelflächen . . . 388
507. Eigenschaften der Raumkurven 3. Ordnung 389
508. 509. Konstruktion der Raumkurve 3. Ordnung als Schnitt zweier Kegel mit gemeinsamer Mantellinie 389

Die sphärischen Kegelschnitte.

510. Entstehung der sphärischen Kegelschnitte 392
511. Brennpunkte und ihre Eigenschaften 393
512. 513. Die Brennstrahlen des Kegels 2. Ordnung und ihre Konstruktion 395
514. 515. Die Projektionen der sphärischen Kegelschnitte 397

Die stereographische Projektion.

516. Entstehung und Eigenschaften der stereographischen Projektion. Abbildung der Kreise auf der Kugel in Kreise der Ebene. Erhaltung der Winkel 399
517. Anwendung in der Kartenprojektion 400

Schlagschatten auf Kegel- und Cylinderflächen.

518. Bildung der Schlagschatten einer Fläche auf eine andere. Darstellungsverfahren 402
519. Schlagschatten einer Kugel auf einen Kegel 403

Beispiele für Anwendungen.

520. Bemerkungen über Schattenkonstruktion an zusammengesetzten Gebilden 404
521. Allgemeines über Steinschnitt 405
522. Runder Eckturm. Schatten 406
523. Gewölbte Mauernische. Schatten und Steinschnitt 408
524. Dorische Säule. Schatten 410

Litteraturnachweise und historische Anmerkungen . . . 413

EINLEITUNG.

Alle Zweige der Geometrie haben die Untersuchung gesetzmäßig entstandener Raumgebilde (ebener und räumlicher Figuren) zum Gegenstande. Während aber die Geometrie der Lage und die analytische Geometrie das hierdurch bezeichnete Ziel auf rein theoretischem Wege zu erreichen suchen, beschäftigt sich die darstellende Geometrie, wie schon ihr Name besagt, mit der praktischen Durchführung des Prozesses der Darstellung oder Konstruktion der Figuren, welche für die vorgenannten beiden Disziplinen an sich nebensächlich ist und mit steigender Entwickelung des Anschauungsvermögens mehr und mehr entbehrlich wird. Die darstellende Geometrie ist eine angewandte mathematische Disziplin: sie dient den Bedürfnissen der Praxis in verschiedenen Zweigen der technischen Wissenschaften und der Kunst. Zugleich aber bildet sie für den Mathematiker und Techniker das wirksamste Mittel, um das Vermögen der räumlichen Anschauung, dessen sie bei der Behandlung räumlicher geometrischer Fragen allenthalben bedürfen, bis zu möglichst hohem Grade zu entwickeln.

Der Zweck der darstellenden Geometrie ist die Bestimmung der Raumgebilde nach Gestalt, Größe und Lage durch die Konstruktion. Sie bedient sich dabei in der Hauptsache ebener Bilder derselben, indem sie zeigt, wie man mittels geeigneter Methoden erstens von den die Raumgebilde bestimmenden Angaben (also von ihrer Definition) ausgehend zu diesen Bildern gelangen, zweitens wie man von letzteren auf die Eigenschaften der dargestellten Figuren zurückschließen kann. In dieser letzteren Beziehung dient sie also dazu geometrische Eigenschaften räumlicher und ebener Gebilde aufzufinden und zu beweisen.

Außer auf die Strenge und Einfachheit des mathematischen Gedankenganges hat die darstellende Geometrie bei der Ausbildung ihrer Methoden auf die Erreichung größtmöglicher Genauigkeit für die praktische Ausführung der Konstruktionen Bedacht zu nehmen. Unter den verschiedenen möglichen Methoden, die zur gesetzmäßigen Abbildung der Raumfiguren führen, wählt sie demgemäß nur eine kleine Anzahl, als für ihre Zwecke geeignet, aus. Diese beziehen

sich sämtlich auf die Konstruktion der ebenen Bilder durch Projektion.

Die Methode des Projizierens ist aus den Vorgängen beim Sehen der Gegenstände abstrahiert. Die Centralprojektion entsteht, wenn man aus einem gegebenen Projektionscentrum (Augpunkt) durch die Punkte des Objektes projizierende Strahlen (Sehstrahlen) zieht und diese mit der Bildebene schneidet. Statt des Projektionscentrums kann auch eine feste Richtung gegeben werden, welche die projizierenden Strahlen haben sollen, sodaß sie gegen die Bildebene gleiche Neigung erhalten, insbesondere zu ihr rechtwinklig werden; hierbei ergiebt sich die schiefe oder speziell die orthogonale Parallelprojektion. Diese Methoden empfehlen sich vor anderen durch die Bildlichkeit der Darstellungen, d. h. dadurch, daß die Gesichtseindrücke, welche wir von letzteren haben, in allem Wesentlichen mit denen übereinstimmen, welche die dargestellten Objekte selbst hervorrufen würden. Hiermit ist der weitere Vorteil verknüpft, daß bei ihrer Zugrundelegung die Entwickelung der geometrischen Beziehungen, die den räumlichen Objekten anhaften, sich am durchsichtigsten gestaltet.

Mit Rücksicht auf die Anwendungen sucht man die Anschaulichkeit der Darstellungen räumlicher Objekte dadurch zu erhöhen, daß man ihnen die Wiedergabe der Beleuchtungsverhältnisse für eine geeignet angenommene Lichtquelle, namentlich die Eigen- und Schlagschatten in genauer Konstruktion hinzufügt. Die Lichtquelle wird entweder durch einen leuchtenden Punkt im Endlichen vertreten, oder man nimmt sie in unendlicher Ferne an, sodaß die Lichtstrahlen parallel werden. Die Theorie der Schattenkonstruktionen ist in der Projektionslehre enthalten; die Theorie der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Oberflächen schließt sich eng an die erstere an, bedarf aber besonderer Auseinandersetzungen.

In letzter Linie kommen für die darstellende Geometrie Methoden in Betracht, welche auf die Konstruktion räumlicher Abbilder oder Modelle der Raumfiguren abzielen. Unter ihnen bedürfen die, welche die Konstruktion von Modellen bezwecken, die mit den gegebenen Objekten kongruent oder (bei verändertem Maßstabe) in allen Teilen ähnlich sind, ihrer unmittelbaren Faßlichkeit wegen, keiner näheren Erläuterung. Hiervon abgesehen kommt die sogenannte Reliefperspektive gelegentlich zur Anwendung. Ihre Theorie läßt sich als eine Verallgemeinerung der Projektionsmethode an deren Darlegung ohne Schwierigkeit anfügen.

Die darstellende Geometrie bedarf zu ihrer Entwickelung keiner anderen theoretischen Voraussetzungen als der Begriffe und Lehrsätze der elementaren Planimetrie und Stereometrie. Diese bezeichnen daher auch das Maß der mathematischen Vorkenntnisse, die zum Verständnisse dieses Lehrbuches erforderlich sind und auf die Bezug genommen wird, ohne Erklärungen oder Beweise hinzuzufügen. An die Elemente der Raumlehre anknüpfend bildet die darstellende Geometrie selbständig die Lehre von den Projektionen aus. Das Verfahren des Projizierens aber, das in erster Linie benutzt wird, um die Darstellung gegebener Raumfiguren zu gewinnen, soll gleichzeitig dazu dienen, Eigenschaften derselben zu erkennen und zu beweisen. Auch sollen die Projektionsmethoden auf höhere stereometrische Fragen angewandt und diese durch Konstruktion gelöst werden. Dann erst wird dem Zwecke der mathematischen Schulung der Anschauung genügend Rechnung getragen; denn jede konstruktive Lösung besteht in einer methodisch geordneten Folge von Operationen, deren geometrische Bedeutungen, im Gegensatz zu denen der rechnenden Operationen, einzeln anschaulich erfaßt, in ihrer Gesamtheit aber bei der graphischen Ausführung überblickt werden können.

Durch ihre Methoden wird unsere Wissenschaft naturgemäß zur Untersuchung derjenigen Eigenschaften der Figuren geführt, welche mit denen der durch Projektion gewonnenen Bilder übereinstimmen. Diese durch Projektion unzerstörbaren oder projektiven Eigenschaften der Raumgebilde sind es, welche in allgemeinster Weise aufgefaßt, die Grundlagen der Geometrie der Lage ausmachen. Bei letzterer fällt die Rücksicht auf Darstellbarkeit fort; sie operiert lediglich mit Begriffen. Die darstellende Geometrie aber bereitet die Bildung dieser Begriffe vor, indem sie alle geometrischen Gesetze untersucht, welche durch den wirklichen Vorgang der Projektion direkt begründet werden.

Steht also die darstellende Geometrie zur Geometrie der Lage in näherer Beziehung als zur analytischen Geometrie, welche die Gebilde und ihre Eigenschaften durch Gleichungen zwischen Maßzahlen bestimmt, so kann sie doch auf den Gebrauch von Maßrelationen nicht völlig verzichten, weil die Bestimmung der Größenverhältnisse, ebensogut wie die der Lagebeziehungen in ihrer Aufgabe liegt. Aber sie verwendet nur die einfachsten Formen derselben, bei denen an die Stelle der Rechnung mit analytischen Größen sogleich die Konstruktion treten kann.

Irgend eine Aufgabe der darstellenden Geometrie ist als gelöst

zu betrachten, wenn sie zurückgeführt ist auf solche Elementaroperationen, die man ohne weiteres mit bekannten Hilfsmitteln durchführen kann. Unter jenen Elementaroperationen aber sind lediglich die folgenden, welche sich sämtlich auf eine ebene Zeichnungsfläche beziehen, zu verstehen:

das Ziehen gerader Linien durch gegebene Punkte; insbesondere das Ziehen gerader Linien, die zu einer gegebenen Geraden parallel sind, oder auf ihr rechtwinklig stehen;

das Schlagen von Kreisen um ein gegebenes Centrum und mit gegebenem Radius.

Bezüglich des Entwickelungsganges mag Folgendes im Voraus bemerkt werden. Mit dem Einfachsten wird begonnen; so geht bei der Darstellung räumlicher Objekte die orthogonale der schiefen Parallel- und der Centralprojektion voraus. Zuerst werden durch diese Projektionen ebene Figuren abgebildet. Vereinigt man dann Bild- und Originalebene in geeigneter Weise, so ergeben sich mittelbar geometrische Abhängigkeiten, die zwischen Figuren ein und derselben Ebene stattfinden; sie werden Kollinearverwandtschaften oder Kollineationen genannt; weil dabei geraden Linien stets wieder Geraden entsprechen. Die einfachste Art der Centralprojektion, bei welcher Bild- und Originalebene parallel angenommen werden, liefert die Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage. Aus der schiefen Parallelprojektion aber entsteht eine Verwandtschaft ebener Figuren, die als Affinität bei affiner Lage bezeichnet wird. Auf der anderen Seite ergiebt die allgemeine Centralprojektion die centrische Kollineation ebener Systeme oder die Perspektivität.

Gerade deshalb, weil die genannten Verwandtschaften ebener Gebilde aus Projektionen im Raume entstanden gedacht werden können, haben sie für die darstellende Geometrie eine prinzipielle Wichtigkeit; die bei der Darstellung räumlicher Objekte auftretenden Probleme führen immer wieder auf sie zurück. Es erschien daher zweckmäßig, sie an geeigneter Stelle ausführlich zu behandeln. Wir beginnen also die Darlegung der Methoden der Parallelprojektion mit einem Kapitel über Ähnlichkeit und Affinität bei ebenen Figuren. Dementsprechend würde ein Kapitel über Perspektivität ebener Figuren vor der Behandlung der Perspektive räumlicher Figuren seinen natürlichen Platz finden. Wir ziehen es aber vor, ein solches bereits an einer früheren Stelle einzuschalten und später darauf zurück zu verweisen, weil für gewisse Gebilde schon an und für sich die Gesetze der Perspektivität in Betracht kommen, namentlich für Pyramiden und Kegel und ihre ebenen Schnitte.

Bei der Entwickelung der Projektionsmethoden für beliebige (nicht ebene) Objekte wird jedesmal mit der Darstellung der einfachen Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene und der Lösung der aus ihren möglichen Beziehungen sich ergebenden Fundamentalaufgaben begonnen, um daran die Darstellung und Untersuchung der komplizierteren Gebilde in angemessener Ordnung anzuschliessen.

Schliesslich mögen noch einige Bemerkungen über die hauptsächlichsten, zum Teil am gehörigen Orte noch näher zu erläuternden, Bezeichnungen und Abkürzungen Platz greifen. Wir werden durchgängig:

Punkte mit großen lateinischen Buchstaben: $A, B \ldots P, \ldots,$
Gerade mit kleinen lateinischen Buchstaben: $a, b, \ldots g, \ldots,$
Ebenen mit großen griechischen Buchstaben: $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots \mathsf{E}, \ldots,$
Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben: $\alpha, \beta, \ldots \varphi, \ldots,$

bezeichnen, und zwar verwenden wir meist die ersten Buchstaben des betreffenden Alphabets für gegebene oder bekannte Elemente, für variable oder unbekannte aber die später folgenden Buchstaben.

Als Zeichen der Verbindung mehrerer Elemente durch ein neues Grundgebilde, welches sie zusammengenommen bestimmen, dient die bloße Nebeneinanderstellung der sie bezeichnenden Buchstaben. Es bedeutet also:

$g = AB$ die gerade Verbindungslinie der Punkte A und B,
$\mathsf{E} = ABC$ die Verbindungsebene der drei Punkte A, B, C,
$\Delta = Ab$ die Verbindungsebene des Punktes A und der Geraden b.
$\Gamma = ab$ die Verbindungsebene der sich schneidenden Geraden a und b.

Zur Bezeichnung der Schnittelemente wählen wir das zwischen die betreffenden Buchstaben einzufügende Symbol $\times$. Hiernach bedeutet:

$P = g \times h$ den Schnittpunkt der in einer Ebene liegenden Geraden g und h.
$Q = g \times \mathsf{E}$ den Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene E,
$g = \mathsf{E} \times \Delta$ die Schnittlinie der Ebenen E und Δ.

Wie gebräuchlich, legen wir parallelen Geraden einen unendlich fernen Schnittpunkt (Richtungspunkt, Richtung), parallelen Ebenen eine unendlich ferne Schnittlinie (Stellungsgerade, Stellung) bei.

Diese Bezeichnungen werden miteinander nach Bedürfnis kombiniert; z. B. würde $AB \times PQR$ den Schnittpunkt der Verbindungslinie der Punkte A, B mit der Verbindungsebene der Punkte P, Q, R darstellen, u. s. f.

Als Dreieckszeichen dient $\triangle$, als Winkelzeichen $\angle$, so daß

$\triangle\ ABC$ das Dreieck mit den Ecken A, B, C,

$\alpha = \angle\ ABC$ den Winkel, welchen die Schenkel BA und BC am Scheitel B einschließen,

$\beta = \angle\ ab$ den Winkel der Geraden a und b,

$\gamma = \angle\ a\mathsf{E}$ den Neigungswinkel der Geraden a gegen die Ebene E,

$\varphi = \angle\ \mathsf{E}\Delta$ den Winkel der Ebenen E und Δ

bezeichnet.

R ist das Symbol für den rechten Winkel oder 90^0, $2R$ für den gestreckten Winkel u. s. f.

Neben den bereits üblichen Abkürzungen $\|$, $\#$, $\perp$, $\sim$, $\cong$ für parallel, parallel und gleich, senkrecht, ähnlich und kongruent, führen wir noch ein neues Symbol für den senkrechten Abstand ein; es soll nämlich $(P \dashv g)$ die Entfernung des Punktes P von der Geraden g, $(P \dashv \mathsf{E})$ die des Punktes P von der Ebene E repräsentieren.

Übrigens wird für die geometrischen Beziehungen keineswegs ausschließlich die symbolische Schreibweise angewendet werden. Dieselbe soll nur bei Beweisen die Übersicht erleichtern und bei der unvermeidlichen Wiederholung geläufiger Operationen die Möglichkeit der Kürzung gewähren.

Im besonderen sind folgende feststehende Bezeichnungen zu nennen:

Π_1, Π_2 für die beiden rechtwinkligen Projektionsebenen bei orthogonaler Projektion, x für ihre Schnittlinie oder Achse.

P', P'' für die Projektionen eines Punktes P,

g', g'' für die Projektionen einer Geraden g,

G_1, G_2 für die Spurpunkte einer Geraden g,

e_1, e_2 für die Spurlinien einer Ebene E.

Schiefe Parallelprojektionen werden durch Anhängung des unteren Index s, centralperspektive Bilder durch die des Index c bezeichnet. Die Umlegung einer ebenen Figur in eine andere Ebene um die zu beiden gehörige Spurlinie charakterisieren wir durch den unteren oder oberen Index o, Elemente, die durch Drehung um irgend eine Gerade eine neue Lage erhalten haben, ebenso durch den Index $\triangle$, endlich Schatten durch den unteren oder oberen Index $*$.

ERSTES KAPITEL.

Ähnlichkeit und Affinität ebener Figuren.

Bevor wir die allgemeinen Gesetze der orthogonalen Parallelprojektion entwickeln und sie auf räumliche Gebilde anwenden, betrachten wir die ebenen Gebilde für sich. Hierbei beschränken wir uns nicht auf die orthogonale Parallelprojektion, sondern behandeln zuerst — gewissermaßen als Vorstufe — die einfachste Form der Centralprojektion, bei welcher Original- und Bildebene parallel liegen, hierauf aber sogleich die schiefe Parallelprojektion. Aus diesen beiden im Raume zu vollziehenden Projektionsarten werden die Ähnlichkeit und die Affinität zwischen Figuren einer Ebene abgeleitet; ihre Kombination ergiebt eine allgemeinere Verwandtschaft, die Affinität im weiteren Sinne, die uns jedoch hier nicht beschäftigen soll [1]).

Ähnlichkeit ebener Figuren.

1. Es sei eine Ebene E im Raume gegeben. Zu ihr parallel werde eine zweite Ebene E_1 und außerhalb beider ein Punkt O nach Willkür festgelegt. Legt man durch alle Punkte einer in E gelegenen Figur von dem Centrum O ausgehende projizierende Strahlen, ebenso durch alle Geraden dieser Figur projizierende Ebenen, so liefern diese Strahlen und Ebenen in ihrem Schnitt mit der Ebene E_1

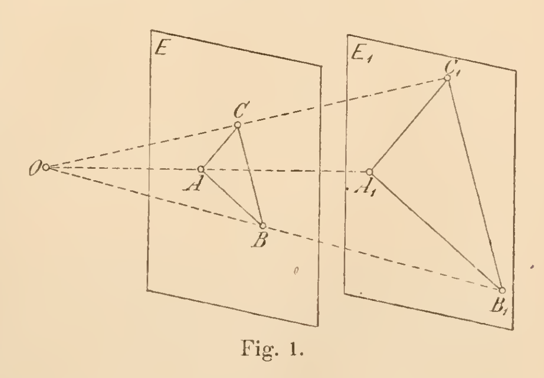


Fig. 1.

als Bildebene eine zweite Figur, deren Punkte und Geraden denen der gegebenen Figur eindeutig entsprechen. Beispielsweise geht (Fig. 1) aus dem Dreieck ABC in E ein Dreieck $A_1B_1C_1$ in E_1 als

Bild hervor. Die Beziehung, in welcher die einander entsprechenden Figuren stehen, heißt Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage und besitzt folgende Eigenschaften:

α) Entsprechende Gerade sind parallel; also:

β) Parallelen Geraden g und h entsprechen parallele Gerade g_1 und h_1 und einem Winkel φ ein ihm gleicher Winkel φ_1.

γ) Das Verhältnis irgend zweier entsprechenden Strecken AB und A_1B_1 ist konstant $= e:e_1$, wenn $e = (O \dashv \mathsf{E})$, $e_1 = (O \dashv \mathsf{E}_1)$ gesetzt wird.

Offenbar ist:

$$AB : A_1B_1 = OA : OA_1 = e : e_1$$

und folglich auch:

$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1, \text{ u. s. f.}$$

Ist für irgend zwei ebene Figuren eine der beiden letzten Eigenschaften und folglich auch die andere erfüllt, so sind sie nur als ähnlich zu bezeichnen. Kommt aber die erste Eigenschaft hinzu, so befinden sie sich in ähnlicher Lage. In der That braucht man nur zwei einander entsprechende parallele Strecken AB und A_1B_1 zu kennen, um das Ähnlichkeitscentrum $O = AA_1 \times BB_1$ zu finden. Hieraus folgt weiter, daß je zwei ähnliche Figuren auf unendlich viele Arten in ähnliche Lage gebracht werden können.

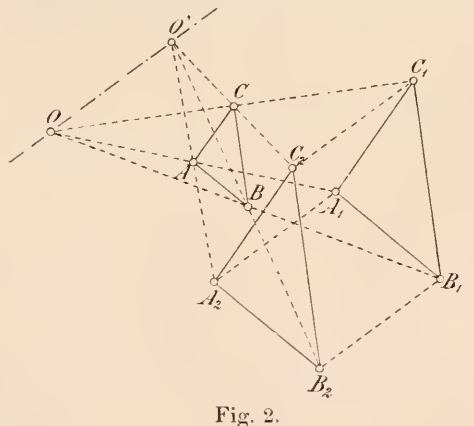


Fig. 2.

2. Die ähnlichen Figuren bleiben in ähnlicher Lage, wenn die Bildebene E_1 sich selbst parallel verschoben wird. An Stelle von O tritt dabei ein neues Centrum O'. Die Strecke OO', d. i. die Verschiebung des Centrums, ist mit derjenigen der Bildebene parallel und gleichgerichtet oder ihr entgegengesetzt, je nachdem O und E_1 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von E liegen; der Größe nach ist sie durch die Relation:

$$OO' = a \cdot \frac{e}{e_1 - e}$$

bestimmt, wo a die Größe der Verschiebung der Punkte von E_1 bezeichnet. Geht nämlich (Fig. 2) A_1, das Bild eines beliebigen Punktes A, bei der im Raume vollführten Parallelverschiebung von E_1 in A_2 über, so schneidet die Gerade A_2A die durch O gezogene Parallele zu A_1A_2 in einem Punkte O', welcher durch die obigen Angaben bestimmt ist; dies gilt für jedes Paar entsprechender Punkte. — Insbesondere bleibt der Charakter unserer Abbildung erhalten, wenn E_1 durch eine geeignete Parallelverschiebung mit E selbst zur Deckung gebracht wird. Diese Operation, bei der ein bestimmter Punkt von E_1 in einen beliebigen Punkt von E verschoben werden kann, liefert ähnliche und ähnlich liegende Gebilde in einer Ebene. In die Ebene E fällt auch das Centrum O' und die projizierenden Strahlen. Die drei oben genannten Eigenschaften bleiben für die so erhaltene ähnliche Beziehung in der Ebene unverändert bestehen. Sie ist eindeutig bestimmt durch Angabe des Centrums und zweier einander entsprechender Punkte, oder durch ein Paar paralleler entsprechender Strecken.

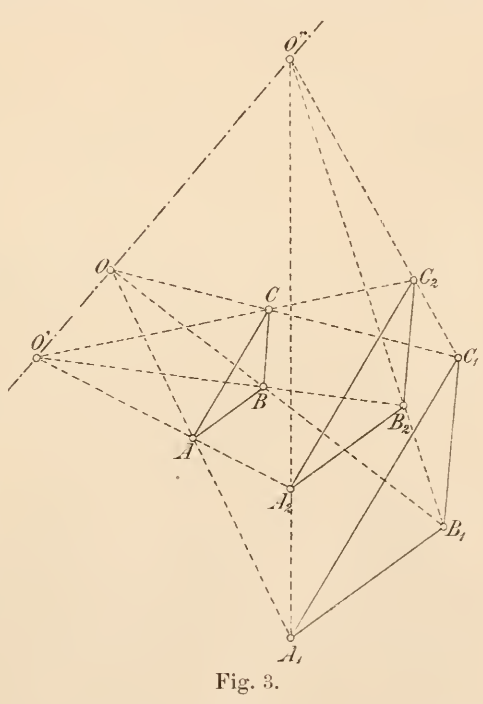


Fig. 3.

3. Der vorige Satz ist ein Spezialfall des folgenden: Sind im Raume zwei Figuren zu einer dritten ähnlich und ähnlich gelegen, so sind sie es auch zu einander. Das neue Ähnlichkeitscentrum liegt mit den beiden gegebenen in gerader Linie. Sind nämlich A, B und A_1, B_1 (Fig. 3) entsprechende Punkte zweier ähnlicher und ähnlich gelegener Figuren, sowie O das zugehörige Ähnlichkeitscentrum, gilt ferner dasselbe von A, B, A_2, B_2 und O', so liegen A_1A_2 und B_1B_2 in einer Ebene, weil $A_1B_1 \| AB \| A_2B_2$ ist. Weiter liegt der Strahl A_1A_2 in der Ebene AOO' und schneidet OO' in einem Punkte O''. In demselben Punkte wird OO' von B_1B_2 ge-

schnitten; denn B_1B_2 und OO' müssen sich in einem Punkte schneiden, da sie in einer Ebene liegen; das muß aber der Schnittpunkt von OO' mit der Ebene $A_1B_1A_2B_2$, also O'' sein. O'' ist das neue Ähnlichkeitscentrum. Der Satz gilt auch für Figuren in einerlei Ebene.

4. Von den Folgerungen, die man unmittelbar aus diesen Betrachtungen ziehen kann, mag als beachtenswert diese hervorgehoben werden, daß jede zu einem Kreise ähnliche Figur wiederum ein Kreis ist, und daß je zwei Kreise einer Ebene in doppelter Weise als in ähnlicher Lage befindlich angesehen werden können. Da nämlich die Mittelpunkte M und M_1 einander entsprechen (Fig. 4) und entsprechende Radien parallel und gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, so ergeben sich auf MM_1 zwei Ähnlichkeitscentren O und O' (ein äußeres und ein inneres), für welche die Verhältnisgleichung $OM : OM_1 = r : r_1 = O'M : O'M_1$ besteht. Die Verbindungslinien der Endpunkte von parallelen, gleichgerichteten Radien gehen durch O, von entgegengesetzt gerichteten Radien aber durch O'. Durch O und O' gehen auch die gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise, deren es im allgemeinen vier giebt.

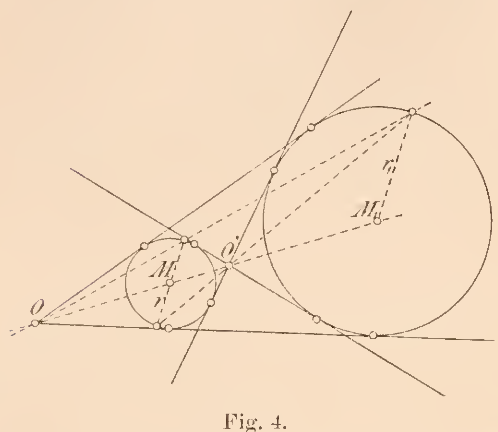


Fig. 4.

Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine andere Ebene.

5. Die zu projizierenden Gebilde seien in der Ebene E gelegen; als B i l d e b e n e nehmen wir irgend eine zweite Ebene E_1 an. Werden durch die Punkte und Geraden einer in der Ebene E befindlichen Figur in einer festgewählten Richtung p r o j i z i e r e n d e S t r a h l e n resp. E b e n e n gezogen und mit E_1 geschnitten, so entsteht eine zweite Figur, die mit ihren Punkten und Geraden der vorgelegten eindeutig zugeordnet ist. Das Dreieck $A_1B_1C_1$ in E_1 geht z. B. auf diese Weise aus dem Dreieck ABC in E hervor (Fig. 5). Das benutzte Verfahren wird im allgemeinen als s c h i e f e, im besonderen, wenn die Projektionsrichtung zur Bildebene E_1 senkrecht steht, als o r t h o g o n a l e P a r a l l e l p r o j e k t i o n bezeichnet. Die geometrische Abhängigkeit zwischen den entsprechenden Figuren

heißt Affinität bei affiner Lage; die projizierenden Strahlen werden Affinitätsstrahlen, ihre Richtung Affinitätsrichtung, die Schnittlinie $a = \mathsf{E} \times \mathsf{E}_1$ wird Affinitätsachse genannt.

6. Aus der Definition ergeben sich die Eigenschaften affiner und affin gelegener ebener Figuren.

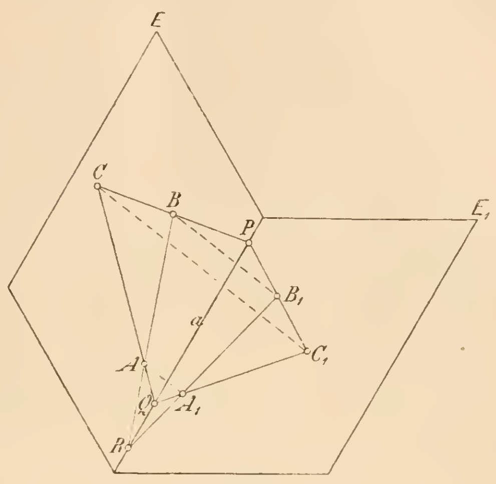


Fig. 5.

α) Jeder Punkt der Affinitätsachse a entspricht sich selbst; entsprechende Gerade g und g_1 schneiden sich auf a, und insbesondere ist $g_1 \| a$, wenn $g \| a$ angenommen wird.

β) Parallelen Geraden g und h entsprechen parallele Gerade g_1 und h_1.

γ) Einem Winkel φ entspricht im allgemeinen ein von ihm verschiedener Winkel φ_1. Es existiert aber an je zwei affinen Punkten P und P_1 ein Paar entsprechender rechtwinkliger Strahlen.

δ) Das Verhältnis je zweier Strecken auf der nämlichen oder auf parallelen Geraden ist dem ihrer Bilder gleich.

Die unter γ) angeführten entsprechenden rechten Winkel erkennt man aus folgender Konstruktion. Man lege durch die Mitte der Strecke PP_1 eine zu ihr rechtwinklige Ebene A und um deren Achsenschnittpunkt $M = a \times \mathsf{A}$ eine Kugelfläche, welche P und also auch P_1 enthält. Schneidet diese die Achse a in X und Y, so sind $\angle XPY$ und $\angle XP_1Y$ einander entsprechende und, weil sie über dem Kugeldurchmesser stehen, zugleich rechte Winkel.

Liegen die in δ) erwähnten Strecken auf der nämlichen Geraden g, also ihre Bilder auf der affinen Geraden g_1, so werden die gegebenen und ihre Bildstrecken auf den Schenkeln des $\angle gg_1$ durch Parallelen ausgeschnitten, woraus der eine Teil des Satzes unmittelbar folgt. Der allgemeinere Fall zweier paralleler Strecken AB und CD wird

auf den vorigen zurückgeführt, in dem man (Fig. 6) AB um die Strecke $BE = CD$ verlängert. Dem Parallelogramm $BCDE$ entspricht nach β) ein affines Parallelogramm $B_1C_1D_1E_1$, wo $B_1E_1 = C_1D_1$ die Verlängerung von A_1B_1 bildet.

7. Umgekehrt sind zwei ebene Figuren affin und affin gelegen, wenn ihre Punkte und Geraden einander so entsprechen, daß die unter α), β) und δ) aufgeführten Eigenschaften erfüllt sind. Aus α) und β) folgt δ), ebenso kann man aus α) und δ) die Eigenschaft β) folgern. Denn sind A, B, C, (siehe Fig. 5) irgend drei Punkte der einen, A_1, B_1, C_1 die entsprechenden Punkte der andern Figur, so schneiden nach α) die Geraden BC, CA, AB ihre Bilder in Punkten P, Q, R der Schnittlinie $a = ABC \times A_1B_1C_1$. Da ferner nach δ): $RA : AB = RA_1 : A_1B_1$ sein soll, so ist $AA_1 \| BB_1$, u. s. f.

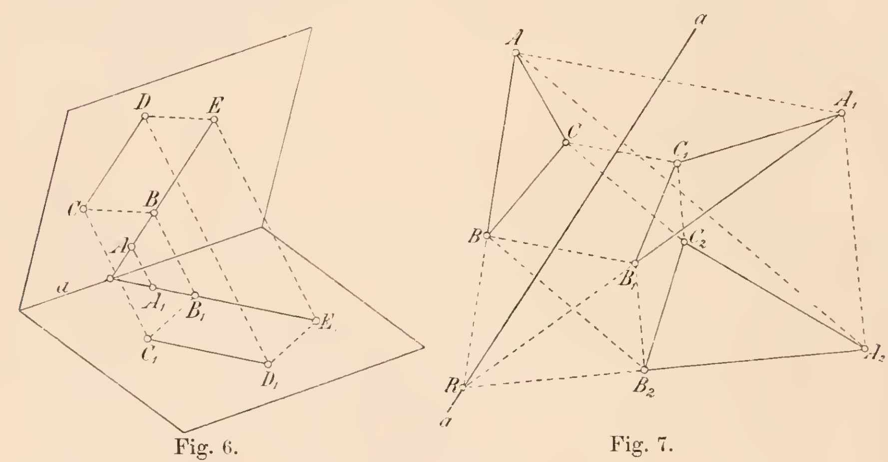


Fig. 6. Fig. 7.

8. Es seien $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ drei Figuren, deren Ebenen E, E_1 und E_2 sich in einer Geraden a schneiden; ferner gehe $\mathfrak{F}_2$ aus $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ aus $\mathfrak{F}_2$ durch eine Parallelprojektion hervor. Dann ist auch $\mathfrak{F}_1$ eine Parallelprojektion von $\mathfrak{F}$, d. h. es besteht der Satz: Sind in Bezug auf eine und dieselbe Achse zwei ebene Figuren zu einer dritten affin und affin gelegen, so sind sie es auch zu einander. Es genügt den Satz für irgend zwei Punkte und ihre beiderlei Bilder zu führen. Den Punkten A, B in $\mathfrak{F}$ mögen A_2, B_2 in $\mathfrak{F}_2$ und diesen A_1, B_1 in $\mathfrak{F}_1$ entsprechen (Fig. 7). Die Geraden AB, A_1B_1, A_2B_2 schneiden sich in einem Punkte R auf a. Da aber zugleich $AA_2 \| BB_2$ und $A_1A_2 \| B_1B_2$ ist, so sind die Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 ähnlich und ähnlich gelegen (aus dem Ähnlichkeitscentrum R), folglich ist $AA_1 \| BB_1$, u. s. f.

9. Wenn man die bisherigen Annahmen spezialisiert, indem man die Ebene E_1 als mit E zusammenfallend betrachtet, so gelangt man zu einer indirekten Definition affiner und affin gelegener Figuren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ in einer Ebene, nämlich durch Vermittelung zweier nacheinander angewandter beliebiger Parallelprojektionen, welche zuerst $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F}_2$ und dann $\mathfrak{F}_2$ in $\mathfrak{F}_1$ überführen. In der Folge wird die direkte Abhängigkeit zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ ohne Zuhilfenahme räumlicher Konstruktion untersucht. Der obige Satz läßt aber bereits erkennen, daß die Bedeutung der Affinitätsachse a als der Linie sich selbst entsprechender Punkte erhalten bleibt, sowie daß die Strahlen AA_1, BB_1, u. s. w., die jetzt gleichfalls der Ebene E angehören, parallel sind; dagegen kann das Bild eines Punktes nicht mehr als Spur seines projizierenden Strahles in der Bildebene erklärt werden. Die Parallelprojektion in der Ebene bedarf also besonderer Erklärung, da die im Raume anwendbaren Operationen beim Übergang zu Gebilden einer Ebene aufhören einen bestimmten Sinn zu haben.

10. Wird eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene enthaltene Achse gedreht, so beschreiben die Punkte der Figur Kreisbögen, deren Sehnen parallel sind. Mithin folgt aus obigem Satze als Korollar: Zwei affine und affingelegene ebene Figuren bleiben in affiner Lage, wenn eine von ihnen um die Affinitätsachse beliebig gedreht wird. Insbesondere kann hiernach für die betrachteten Figuren auf doppelte Art die affine Lage in einer Ebene herbeigeführt werden, indem man die Bildebene durch Drehung nach der einen oder der anderen Seite mit der Originalebene zur Deckung bringt. Dreht man umgekehrt von zwei in einer Ebene affingelegenen Figuren die eine beliebig um die Achse aus der Ebene heraus, so wird sie in der neuen Lage eine Parallelprojektion der anderen darstellen.

Affine und affingelegene Figuren einer Ebene.

11. Zufolge der im vorigen Abschnitt enthaltenen indirekten Definition müssen zwei Figuren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ derselben Ebene, wenn zwischen ihnen Affinität bei affiner Lage bestehen soll, folgende Eigenschaften aufweisen:

α) Jeder Punkt der Affinitätsachse entspricht sich selbst.

β) Den Punkten einer Geraden entsprechen wieder Punkte einer Geraden.

γ) Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel.

Die hier aufgeführten Eigenschaften genügen, um zu einer Figur ihr affines und affin gelegenes Bild zu konstruieren, wenn die Affinitätsachse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P_1 gegeben sind. In der That kann zu jedem gegebenen Punkte Q der entsprechende Q_1 bestimmt werden, indem man (Fig. 8) $S = PQ \times a$ sucht und SP_1 mit der durch Q gelegten Parallelen zu PP_1 in Q_1 schneidet. Das Bild einer Geraden g ergiebt sich, indem man zu einem ihrer Punkte Q den Bildpunkt Q_1 zeichnet und diesen mit $T = g \times a$ verbindet.

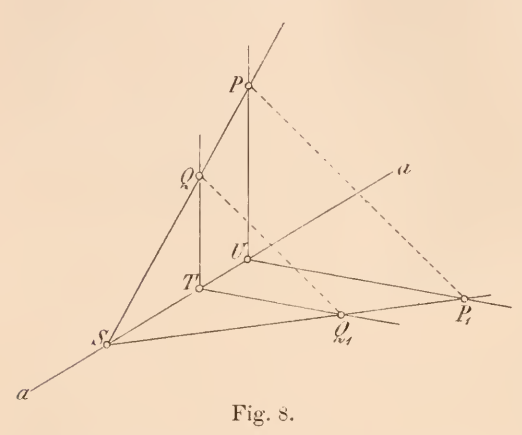


Fig. 8.

Die Figur läßt auch erkennen, daß parallelen Geraden PU und QT der einen Figur parallele Bilder P_1U und Q_1T in der anderen entsprechen. Um das Bild g_1 von g zu erhalten, kann man deshalb $PU \| g$ zeichnen, dann P_1U und $g_1 \| P_1U$ durch den Punkt $g \times a = T$ ziehen.

Finden die unter α), β) und γ aufgezählten Beziehungen zwischen zwei Figuren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ statt, so wird $\mathfrak{F}_1$ durch eine beliebige Drehung um die Affinitätsachse a in eine räumliche Lage $\mathfrak{F}_2$ übergeführt, bei welcher sie eine Parallelprojektion von $\mathfrak{F}$ darstellt. Sind A, B zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{F}$, A_1, B_1 resp. A_2, B_2 die entsprechenden Punkte von $\mathfrak{F}_1$ resp. $\mathfrak{F}_2$, so ist nur zu zeigen, daß $BB_2 \| AA_2$ ist. Aber es ist einerseits $AA_1 \| BB_1$ und andererseits $A_1A_2 \| B_1B_2$, als Sehnen der von A_1 und B_1 bei der Drehung beschriebenen Bogen. Es schneiden sich ferner AB und A_1B_1 in einem Punkt R der Achse a, durch diesen geht dann auch A_2B_2; denn A_1B_1 und A_2B_2 liegen in einer Ebene, da $A_1A_2 \| B_1B_2$ ist. Somit liegen die Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 vom Centrum R aus ähnlich, so daß auch $AA_2 \| BB_2$ sein muß.

Eine Folge hiervon sind die Sätze:

δ) Parallelen Geraden entsprechen in der affinen Figur wieder parallele Gerade.

ε) Parallele Strecken verhalten sich wie ihre affinen Bilder.

12. Die Konstruktion der entsprechenden rechten Winkel an zwei affinen Punkten P und P_1 erfolgt (Fig. 9) mit Hilfe eines Kreises durch P und P_1, dessen Centrum M der Affinitätsachse a angehört. Schneidet dieser a in den Punkten X und Y, so sind $\angle XPY$ und $\angle XP_1Y$ die gesuchten rechten Winkel. Ist P_1' der in Bezug auf a zu P_1 symmetrische Punkt, so ist $\angle P_1PY = \angle P_1'PY$, weil die Bogen P_1Y und $P_1'Y$ gleich sind; der Strahl PY halbiert den $\angle P_1PP_1'$, PX den Nebenwinkel. Diese Bemerkung kann zur Konstruktion der Rechtwinkelstrahlen dienen, falls etwa M ausserhalb der Zeichnungsfläche liegt. — Symmetrisch zu PX (oder PY) gelegenen Punkten, z. B. Q und R, entsprechen symmetrisch zu P_1X (oder P_1Y) gelegene Punkte Q_1 und R_1.

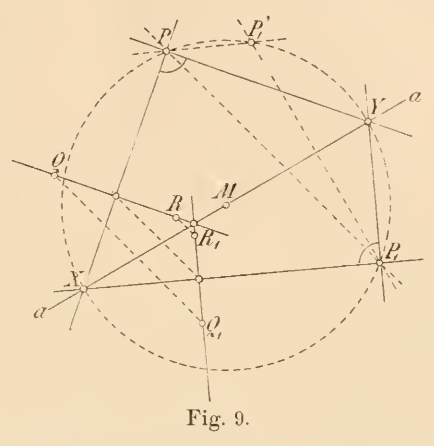


Fig. 9.

13. Es giebt auch an P und P_1 entsprechende, gleiche Winkel von jeder gegebenen Größe φ, die man in folgender Weise konstruiert. Wir gehen von dem Fall aus, wo P und P_1 auf derselben Seite der Affinitätsachse liegen (Fig. 10). Sei Q die Mitte von PP_1 und $QR \perp PP_1$, während R auf a liegt. Dann ist ein Kreis k durch P und P_1, also mit dem Centrum M auf QR, so zu bestimmen, daß $\angle XPY = \angle XP_1Y = \varphi$ und somit $\angle MXY = R - \varphi$ wird ($\angle XMY = 2\varphi$), wenn X und Y die Achsenschnittpunkte von k sind. Zieht man aus einem beliebig auf QR angenommenen Punkte M' den Strahl $M'X'$ unter dem Winkel $R - \varphi$ gegen a und beschreibt um M' einen Kreis k' durch X',

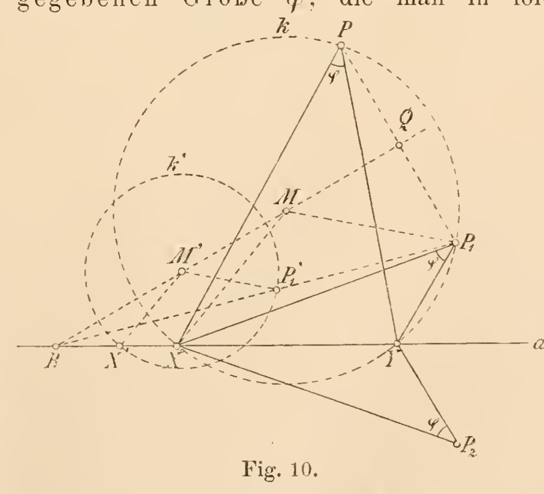


Fig. 10.

so ist R das Ähnlichkeitscentrum für die Kreise k und k'. Man findet daher M_1 indem man RP_1 mit k' in P_1' schneidet und $P_1M \| P_1'M'$ zieht. Da RP_1 den Kreis k' in zwei Punkten schneidet, so giebt es zwei Lösungen, in der Figur ist jedoch nur eine gezeichnet. Werden die gegebenen affinen Punkte durch die Achse von einander getrennt, wie P und P_2, so betrachte man statt des letzteren den symmetrisch zur Achse gelegenen Punkt P_1; dann ist $\angle XP_2Y = \angle XP_1Y$.

14. Für jede Größe und Lage der Strecke PQ auf einer Geraden g hat, wenn P_1Q_1 die entsprechende Strecke auf der affinen Geraden g_1 ist, (nach 6) das Verhältnis:

$$\lambda = PQ : P_1Q_1$$

einen konstanten Wert, der sich auch nicht ändert, wenn g und damit zugleich g_1 eine Parallelverschiebung erfährt. Zu jeder gegebenen Richtung (und der affinen) gehört also ein festes Streckenverhältnis λ. Dagegen entsprechen verschiedenen Richtungen verschiedene Werte λ; dabei sind die Richtungen, welche durch die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel gegeben sind, vor allen übrigen ausgezeichnet. Dreht sich eine Gerade g (mithin zugleich die affine g_1) um einen ihrer Punkte, so nimmt das ihrer Richtung zugehörige Streckenverhältnis λ in jedem der von den affinen Rechtwinkelstrahlen gebildeten Quadranten entweder beständig zu oder beständig ab, erreicht für symmetrische Lagen zu jenen Strahlen gleiche Werte und auf denselben ein Maximum resp. Minimum.

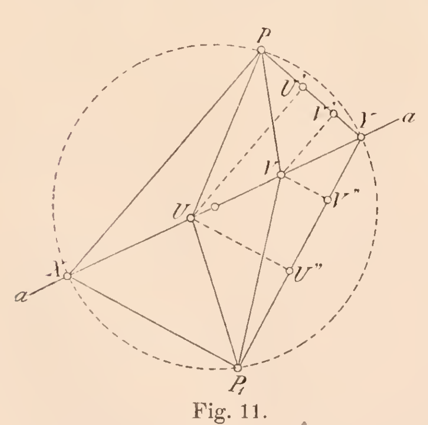


Fig. 11.

Es seien, um dies zu beweisen, $\angle XPY$ und $\angle XP_1Y$ affine rechte Winkel (Fig. 11), ferner U und V irgend zwei aufeinander folgende Lagen eines von X nach Y auf der Affinitätsachse fortschreitenden Punktes. Wir wählen nun die Strecke XY als Maßeinheit, setzen $XU = k$, $XV = l$, $UY = m$, $VY = n$ und bezeichnen mit x, u, v, y resp. x_1, u_1, v_1, y_1 die von den Punkten X, U, V, Y einerseits und von P resp. P_1 andererseits begrenzten affinen Strecken. Sind nun PUU', PVV', P_1UU'', P_1VV'' rechtwinklige Dreiecke, so folgen die Relationen:

$$u^2 = m^2x^2 + k^2y^2, \qquad v^2 = n^2x^2 + l^2y^2,$$
$$u_1{}^2 = m^2x_1{}^2 + k^2y_1{}^2, \qquad v_1{}^2 = n^2x_1{}^2 + l^2y_1{}^2;$$

denn es ist: $UY : XY = m$, $U'P : YP = UX : YX = k$, u. s. f.

Es ist jetzt zu zeigen, daß unter der Voraussetzung:

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^2 > \left(\frac{y}{y_1}\right)^2$$

die Beziehung:

$$\left(\frac{u}{u_1}\right)^2 > \left(\frac{v}{v_1}\right)^2$$

besteht. Letzterer geben wir die neue Form:

$$(m^2x^2 + k^2y^2)(n^2x_1{}^2 + l^2y_1{}^2) - (n^2x^2 + l^2y^2)(n^2x_1{}^2 + k^2y_1{}^2) > 0,$$

und diese reduziert sich auf die Ungleichung:

$$(l^2m^2 - k^2n^2)(x^2y_1{}^2 - x_1{}^2y^2) > 0,$$

welche mit der Voraussetzung zusammenfällt, da $(l^2m^2 - k^2n^2)$ positiv ist.

Die Ellipse als affine Kurve zum Kreise und ihre Konstruktion.

15. Jede zu einem Kreise affine und affin gelegene Kurve heißt Ellipse; so ist jede Parallelprojektion des Kreises eine Ellipse. Dem Mittelpunkt M des Kreises k (Fig. 12) entspricht der Mittelpunkt M_1 der zum Kreise affinen Ellipse k_1. Jedem Kreisdurchmesser entspricht ein Durchmesser der Ellipse, der von ihrem Mittelpunkt M_1 halbiert wird. Zwei schiefwinklige Durchmesser P_1P_1', Q_1Q_1' der Ellipse heißen konjugiert, wenn sie zu zwei rechtwinkligen Kreisdurchmessern PP', QQ' affin sind. Von zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse halbiert jeder die

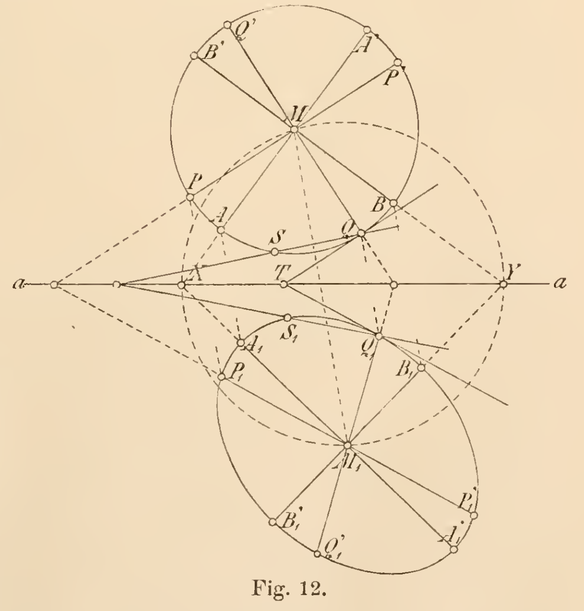


Fig. 12.

zum andern parallelen Sehnen und geht durch die Berührungspunkte der zum andern parallelen Tangenten. Denn das Gleiche ist bei den rechtwinkligen Durchmessern des affinen Kreises der Fall.

Dabei ist allerdings die zu einer Kreistangente affine Gerade als Ellipsentangente bezeichnet. Die Berechtigung hierzu erhellt aus der folgenden Überlegung. Wie jede Gerade g mit dem Kreise k zwei getrennte, zwei vereinte, oder keinen Schnittpunkt gemein hat, so hat auch jede Gerade g_1 mit der Ellipse k_1 wegen der Affinität zwei getrennte, zwei vereinte oder keinen Schnittpunkt gemein. Eine Kreistangente QT hat mit seiner Peripherie nur einen Punkt gemein und liegt ganz außerhalb derselben; das Gleiche tritt für die affine Gerade Q_1T in Bezug auf die Ellipse ein, und deshalb legen wir ihr die Bezeichnung einer Ellipsentangente bei (zum Unterschiede von den Sehnen). Man kann auch die Tangenten in Q resp. Q_1 aus den Sehnen QS resp. Q_1S_1 durch Drehung um Q resp. Q_1 hervorgehen lassen, wobei S_1 in demselben Moment mit Q_1 zusammenfällt, wo dies S mit Q thut. Hier geht der Berührungspunkt der Tangente aus der Vereinigung zweier Schnittpunkte hervor.

Die zu einander rechtwinkligen Durchmesser A_1A_1' und B_1B_1' der Ellipse, welche gleichfalls rechtwinkligen Durchmessern AA' und BB' des Kreises entsprechen, heißen Achsen, ihre Endpunkte Scheitel. Die Achsen teilen die Ellipse in symmetrische Quadranten, denn sie halbieren die zu ihnen senkrechten Sehnen. Durchläuft ein Punkt P_1 die Ellipse, so nimmt die Strecke M_1P_1 in jedem Quadranten entweder beständig zu, oder beständig ab und erreicht auf den Achsen ein Maximum oder Minimum (nach 14).

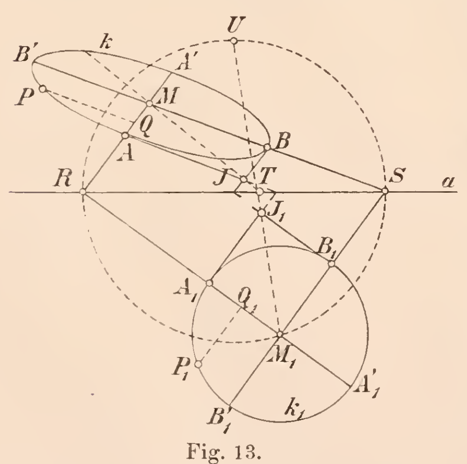


Fig. 13.

Aus der gegebenen Definition ergeben sich Konstruktionen für Punkte, Tangenten, Achsen und konjugierte Durchmesser der Ellipse.

16. Aus einem Kreise lassen sich durch Affinität (oder Parallelprojektion) unendlich viele Ellipsen ableiten, indem man noch die Affinitätsachse und den Mittel-

punkt der Ellipse beliebig wählen kann. Umgekehrt kann jede Ellipse auf unendlich viele Weisen als affines Bild eines Kreises erhalten werden, indem auch hier die Wahl der Affinitätsachse noch völlig frei steht. Hierüber belehrt uns der Satz: Eine Ellipse k ist durch zwei konjugierte Durchmesser AA' und BB' völlig bestimmt. Es sei P ein beliebiger Punkt der Ellipse k, Q ein Punkt auf AA' und $PQ \parallel BB'$; ferner setzen wir zur Abkürzung $MA = a$, $MB = b$, $MQ = x$ und $QP = y$ (Fig. 13). Ein zur Ellipse affiner und affin gelegener Kreis sei k_1; die zu A, A', B, B', M, P, Q affinen Punkte seien A_1, A_1', B_1, B_1', M_1, P_1, Q_1, während wir $M_1A_1 = M_1B_1 = r_1$, $M_1Q_1 = x_1$ und $Q_1P_1 = y_1$ setzen. Mag nun die affine Beziehung zwischen Ellipse und Kreis beschaffen sein, wie sie wolle, immer gelten die Relationen:

$$\frac{x}{a} = \frac{x_1}{r_1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y_1}{r_1}.$$

Nun besteht für jeden Punkt des Kreises die Gleichung: $x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$, also besteht für jeden Punkt der Ellipse die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dabei bedeuten x und y die Längen der beiden zu den konjugierten Durchmessern parallelen Strecken, die einerseits von dem beliebigen Ellipsenpunkt und andererseits von diesen Durchmessern begrenzt werden. Durch Länge und Lage der konjugierten Durchmesser AA' und BB' ist hiernach die Gesamtheit der Ellipsenpunkte bestimmt.

17. Wir wollen jetzt zu der Ellipse k mit den konjugierten Durchmessern AA' und BB' den affin gelegenen Kreis k_1 konstruieren, wenn die Affinitätsachse a beliebig gegeben ist. Die Tangenten in A und B mögen sich in I schneiden ($IA \parallel BB'$, $IB \parallel AA'$), dann muß dem Parallelogramm $MAIB$ in der affinen Figur ein Quadrat $M_1A_1I_1B_1$ entsprechen (Fig. 13). Schneiden also die Geraden MA, MB und MI die Affinitätsachse a in R, S und T, so ist M_1 derart zu bestimmen, daß $\angle RM_1S = 90^0$ und $\angle RM_1T = \angle TM_1S = 45^0$ wird. Zu dem Ende zeichne man über RS als Durchmesser einen Hilfskreis und wähle auf ihm den Punkt U in der Mitte des Halbkreisbogens RS; dann schneidet UT den Hilfskreis in dem gesuchten Punkt M_1 ($\angle RM_1T = \angle TM_1S = 45^0$ als Peripheriewinkel über den Viertelkreisbogen RU und US). In der That entspricht jetzt dem Parallelogramm $MAIB$ in der affinen Figur ein Quadrat $M_1A_1I_1B_1$, wobei M_1 der zu M affine Punkt ist,

und zu dem Kreise k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $M_1A_1 = M_1B_1$ ist die Ellipse k mit den konjugierten Halbmessern MA und MB affin ($IA \times I_1A_1$ und $IB \times I_1B_1$ auf a).

18. Will man eine Ellipse k aus zwei konjugierten Durchmessern konstruieren, so kann man einen zu ihr affinen und affin gelegenen Kreis k_1 zeichnen und dann rückwärts zu einzelnen Punkten des Kreises die affinen Punkte der Ellipse suchen. Wie wir soeben sahen, ist dabei die Wahl der Affinitätsachse a noch freigestellt. Um die Konstruktion möglichst einfach zu gestalten, empfehlen sich besonders die folgenden beiden Verfahren.

Erstes Verfahren. Es seien (Fig. 14) O der Mittelpunkt, AA' und BB' die gegebenen konjugierten Durchmesser einer Ellipse k. Der über AA' als Durchmesser beschriebene Kreis k_1 ist dann zu k affin und AA' ist die Affinitätsachse. Dem Punkt B von k entspricht der affine Punkt B_1 von k_1, wo $OB_1 \perp OA$ ist, und BB_1 ist ein Affinitätsstrahl. — Zu einem Punkte P_1 von k_1 ergiebt sich der affine Ellipsenpunkt P, indem man $P_1Q \perp AA'$ zieht und die Parallele zu OB aus Q mit der Parallelen zu B_1B aus P_1 in P schneidet. — Trifft die Kreistangente in P_1 die Affinitätsachse in T, so ist PT die Ellipsentangente in P. — Sollen aus einem Punkte R die Tangenten an die Ellipse gezogen werden, so suche man den affinen Punkt R_1 und die Berührungspunkte X_1 und Y_1 der von ihm an den Kreis k_1 gelegten Tangenten; dann sind die zu ihnen affinen Punkte X und Y die Berührungspunkte der gesuchten Ellipsentangenten. — Die Richtungen der Achsen der Ellipse und der zugehörigen rechtwinkligen Durchmesser des Kreises ergeben sich aus der Konstruktion entsprechender rechter Winkel an den affinen Punkten B und B_1, die Scheitel der Ellipse aus den Endpunkten der genannten Kreisdurchmesser.

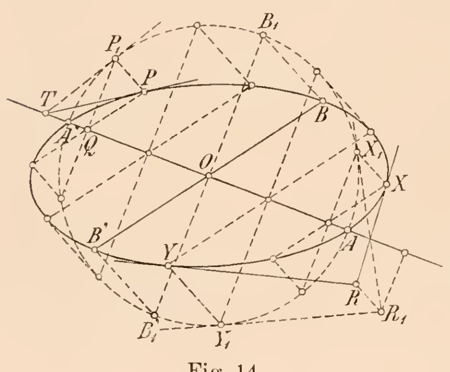


Fig. 14.

19. Zweites Verfahren. Man ziehe durch den Endpunkt B des einen Durchmessers eine Parallele a zum konjugierten AA', die zugleich Ellipsentangente sein wird (Fig. 15). Ein Kreis k_1 vom Radius $O_1A_1 = OA$, welcher a ebenfalls in B berührt, ist dann zur Ellipse k affin gelegen. Dabei ist a die Affinitätsachse, O und O_1

sind affine Punkte, und den beiden zu a parallelen und senkrechten Kreisdurchmessern A_1A_1' und BB_1' entsprechen die konjugierten Durchmesser AA' und BB' der gesuchten Ellipse. Die Konstruktion einzelner Ellipsenpunkte ist analog dem Vorigen. Die Achsen findet man hier direkt aus der Bestimmung der entsprechenden rechten Winkel $\angle XOY$ und $\angle XO_1Y$ an den Mittelpunkten, hierauf aus den Endpunkten C_1 und D_1 der rechtwinkligen Kreisdurchmesser die Ellipsenscheitel C und D, u. s. f.

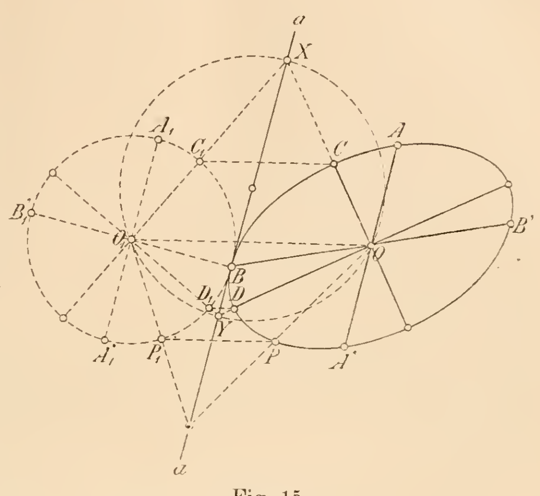


Fig. 15.

20. Konstruktion der Ellipse aus den Achsen. Es seien $OA = a$ und $OB = b$ (Fig. 16a) die gegebenen Halbachsen einer Ellipse k. Man schlage um O zwei Kreise k_1 und k_2 resp. vom Radius a und b. Jeder von ihnen kann als zur gesuchten Ellipse affin gelegen gelten. Bei der Affinität zwischen k_1 und k ist OA die Achse und B_1 und B sind entsprechende Punkte ($B_1B \perp OA$); bei der Affinität zwischen k_2 und k ist OB die Achse und A_2 und A sind entsprechende Punkte. — Zu einem Punkte P_1 auf k_1 ergiebt sich der affine Ellipsenpunkt P auf k, indem man $P_1S \perp OA$ zieht, mittels der Beziehung

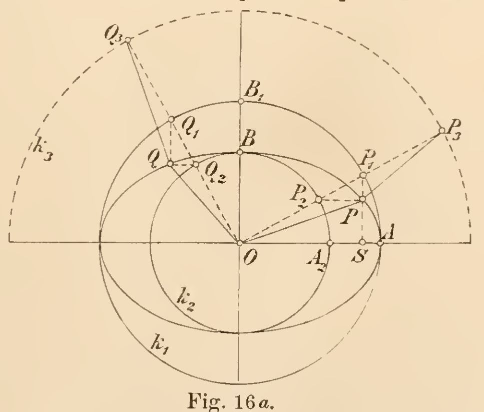


Fig. 16a.

$$PS : P_1S = BO : B_1O = P_2O : P_1O;$$

man schneide also P_1O mit k_2 in P_2 und ziehe $P_2P \parallel OA$. P ist zugleich der affine Punkt zu P_2 auf k_2. Zwei rechtwinklige Kreisradien OP_1 und OQ_1 liefern zwei konjugierte Halbmesser OP und

OQ der Ellipse. Die Tangenten in P und Q sind zu OQ und OP resp. parallel.

Zieht man um O einen Kreis k_3 mit dem Radius $(a+b)$ und schneidet dieser die Strahlen OP_1 und OQ_1 in P_3 und Q_3 resp., so sind PP_3 und QQ_3 Ellipsennormalen, d. h. sie stehen in P und Q auf den bezüglichen Tangenten senkrecht. Denn es ist $\triangle P_1PP_2 \cong \triangle Q_2QQ_1$, $(P_1P_2 = Q_1Q_2,\ \angle QQ_1Q_2 = \angle PP_2P_1$, etc.); ferner ist $\triangle Q_3QQ_1 \cong \triangle OPP_2$ $(Q_3Q_1 = OP_2,\ QQ_1 = PP_2,\ \angle Q_3Q_1Q = \angle OP_2P)$. Demnach ist $Q_3Q = OP$ und $Q_3Q \perp OP$ (da $Q_3O \perp OP_1$ ist). Jeder Strahl durch O liefert einen Punkt P der Ellipse als Schnittpunkt zweier Geraden, von denen die erste durch P_2 parallel zu OA und die zweite durch P_1 parallel zu OB gezogen ist. Die Gerade PP_3 ist eine Normale der Ellipse und gleich dem zu OP konjugierten Halbmesser OQ. Die Punkte P_2, P_1 und P_3 auf dem durch O gezogenen Strahl haben die bezüglichen Abstände b, a und $(a+b)$ von O.

21. Das eingeschlagene Verfahren ergiebt auch die Lösung der Aufgabe: Zu einem nur der Richtung nach gegebenen Halbmesser der Ellipse den Endpunkt und den konjugierten Halbmesser zu finden. Ein in der gegebenen Richtung aus O gezogener Strahl schneide die Kreise k_1 und k_2 resp. in den Punkten U und V (Fig. 16 *b*); aus diesen konstruiere man wie vorher den Punkt W der Ellipse. Zieht man ferner durch U und V Parallelen zu OA und OB, die sich in X schneiden mögen, und legt man die Affinität zwischen k_1 und der Ellipse k zu Grunde, so entspricht dem Punkt U der Punkt W, der Geraden UX die Gerade WV, dem Punkte X der Punkt V und folglich dem Strahl OX der Strahl OV. Insbesondere entspricht dem Punkte P_1 von k_1 der Punkt P von k $(P_1P \parallel OB,\ P_2P \parallel OA)$, und der zu OX rechtwinklige Strahl OQ_2Q_1 liefert den Endpunkt Q des zu OP konjugierten Halbmessers OQ.

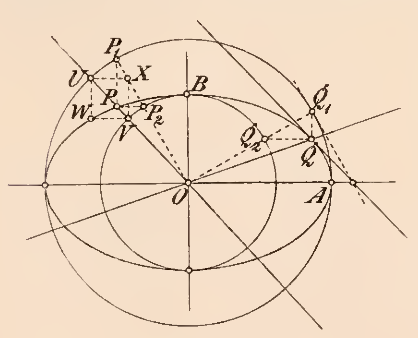


Fig. 16 *b*.

22. Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus konjugierten Durchmessern. Irgend zwei konjugierte Halbmesser OC und OD einer Ellipse (Fig. 17) werden aus rechtwinkligen Halb-

messern OC_1, OD_1 resp. OC_2, OD_2 des um- und eingeschriebenen Kreises (vom Radius a und b) erhalten, indem man CC_1 und DD_1 parallel zur Halbachse OB und CC_2 und DD_2 parallel zur Halbachse OA zieht. Wird das rechtwinklige Dreieck DD_1D_2 um das Centrum O durch den $\angle D_1OC_1 = R$ gedreht, so erhält es die Lage EC_1C_2, in der seine Katheten wiederum den Achsen parallel liegen. Nun ist $M = EC \times C_1C_2$ der Mittelpunkt des Rechteckes CC_1EC_2, also $MC = MC_1 = MC_2 = ME$. Deshalb schneidet EC die Achsen OA und OB resp. in A' und B', so daß: $MO = MA' = MB'$ wird, d. h. ein um M mit dem Radius MO beschriebener Kreis schneidet die Gerade CE in Punkten A' und B' der Achsen. Überdies folgt:

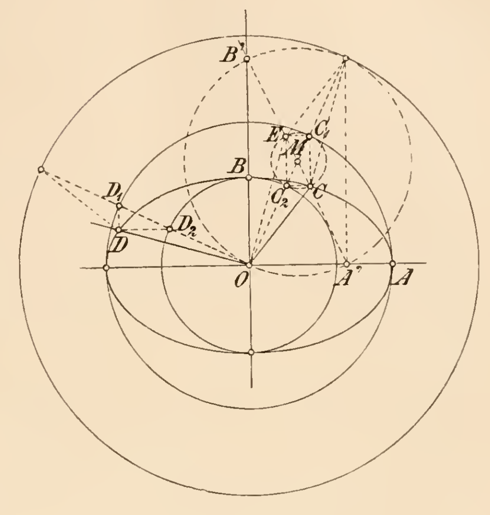


Fig. 17.

$$OC_1 = EA' = CB' = a,$$
$$OC_2 = CA' = EB' = b.$$

Sind umgekehrt OC und OD als konjugierte Halbmesser gegeben, so ergiebt sich folgende einfache Konstruktion der Achsen. Man ziehe $OE \perp$ und $= OD$, halbiere EC in M und schneide CE mit einem Kreise vom Radius MO in A' und B'. Dann sind OA' und OB' die Achsen der Lage nach und $A'E = B'C$ resp. $A'C = B'E$ die bezüglichen Längen der Halbachsen.

23. Läßt man C die Ellipse durchlaufen, so geschieht dies auch mit dem Endpunkt D des zu OC konjugierten Halbmessers OD. Man erhält dann durch die vorige Konstruktion andere und andere Punkte A' und B' auf den Achsen; immer aber ist $B'C = a$ $A'C = b$, also die Strecke $A'B'$ von der konstanten Länge $(a + b)$. Hieraus folgt der Satz: Gleitet eine Strecke $A'B'$ mit ihren Endpunkten auf zwei rechtwinkligen Geraden, so beschreibt ein Punkt C, der sie in die Teile a und b zerlegt, eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Dieser Satz kann bequem zur Konstruktion von Ellipsenpunkten verwendet werden.

Zieht man in Fig. 17 durch C eine Parallele zu OC_1 und schneidet diese die Achsen OA und OB in A'' und B'', so ist $OA'' = EC_1$, $OB'' = EC_2$, $CA'' = b$, $CB'' = a$, $B''A'' = C_2C_1 = (a - b)$. Hieraus folgt der weitere Satz: Gleitet eine Strecke $A''B''$ mit ihren Endpunkten auf zwei rechtwinkligen Geraden, so beschreibt ein Punkt C auf ihrer Verlängerung, dessen Abstände von ihren Endpunkten gleich a und b sind, eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Jede Ellipse kann also in doppelter Weise durch Bewegung erzeugt werden, indem man entweder eine Strecke von der Länge $(a + b)$ oder eine von der Länge $(a - b)$ mit ihren Endpunkten auf den Achsen der Ellipse gleiten läßt. Im ersten Falle ist es ein Punkt der Strecke selbst, im letzteren ein Punkt auf ihrer Verlängerung, der die Ellipse erzeugt.

24. Konstruktion der Ellipse k aus fünf gegebenen Punkten A, B, C, D, E derselben. Wählen wir die Gerade $AB = a$ zur Affinitätsachse, so muß nach 17 ein zur Ellipse k affiner Kreis k_1 existieren, falls es möglich sein soll durch die fünf beliebig gegebenen Punkte eine Ellipse zu legen. Bezeichnen wir nun (Fig. 18) mit C_1, D_1, E_1 die affinen Punkte zu C, D, E, so müssen die Punkte $P' = DE \times D_1E_1$ und $P = DC \times D_1C_1$ auf a liegen, ferner $DD_1 \parallel EE_1 \parallel CC_1$ sein und endlich müssen die fünf Punkte A, B, C_1, D_1, E_1 einem Kreise k_1 angehören. Das liefert die Relationen:

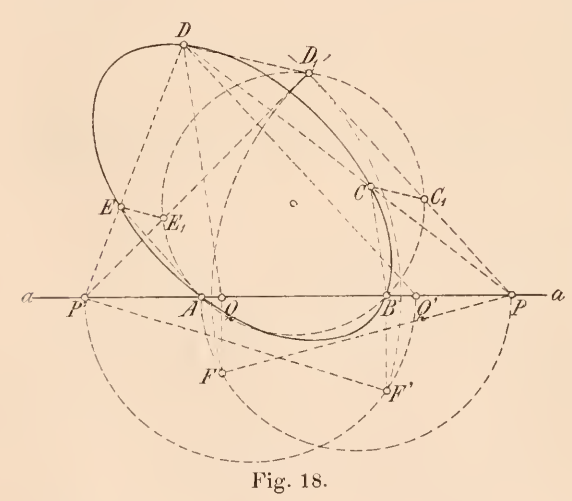


Fig. 18.

$$P'D : P'E = P'D_1 : P'E_1 \quad \text{und} \quad P'A \,.\, P'B = P'D_1 \,.\, P'E_1,$$

ferner:

$$PD : PC = PD_1 : PC_1 \quad \text{und} \quad PA \,.\, PB = PD_1 \,.\, PC_1 \,.$$

Aus den ersteren folgt:

$$(P'D_1)^2 = \frac{P'A \,.\, P'B \,.\, P'D}{P'E}$$

und aus den letzteren:

$$(PD_1)^2 = \frac{PA \,.\, PB \,.\, PD}{PC}.$$

Da auf der rechten Seite dieser Gleichungen nur bekannte Punkte vorkommen, so lassen sich die Werte $P'D_1$ und PD_1 wie folgt konstruieren. Man bestimme Q' auf a, so daß $DQ' \parallel EA$ wird, dann ist: $P'Q' = P'A \,.\, P'D : P'E$. Damit geht die erste Gleichung in $(P'D_1)^2 = P'Q' \,.\, P'B$ über, d. h. $P'D_1$ ist gleich der Kathete $P'F'$ eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Hypotenuse $P'Q'$, dessen Höhe in B errichtet ist. Ebenso bestimme man Q auf a, so daß $DQ \parallel CB$ wird; dann ist PD_1 gleich der Kathete PF eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Hypotenuse PA, dessen Höhe in Q errichtet ist. Damit ist aber D_1 als Schnittpunkt zweier Kreise gefunden. Legt man jetzt einen Kreis k_1 durch A, B und D_1, so schneidet er D_1P' und D_1P noch in den Punkten E_1 und C_1, und es ist gemäß unserer Konstruktion $EE_1 \parallel DD_1 \parallel CC_1$. Der Kreis k_1 ist demnach wirklich zu der gesuchten Ellipse affin, und man konstruiert ihre Punkte vermöge dieser Affinität, wobei a die Achse und D und D_1 entsprechende Punkte sind.

Man erkennt aus der Figur, daß nicht jede fünf willkürlich gegebenen Punkte auf einer Ellipse liegen, da die Kreise mit den Mittelpunkten P' resp. P und den Radien $P'F'$ resp. PF sich nicht immer schneiden. Die vollständige Erklärung hierfür wird sich erst an späterer Stelle im fünften Kapitel ergeben.

ZWEITES KAPITEL.

Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen in orthogonaler Projektion. Bestimmung der einfachen Beziehungen dieser Grundgebilde zu einander.

Das Verfahren der orthogonalen Parallelprojektion.

25. Werden durch alle Punkte einer räumlichen Figur senkrecht zu einer gegebenen Ebene Π_1 projizierende Strahlen gezogen, so erzeugen deren Schnitt- oder Spurpunkte in Π_1 ein ebenes Bild der Raumfigur, welches als eine orthogonale Projektion be-

zeichnet wird. Jeder Punkt P des Raumes hat einen bestimmten Punkt P' in Π_1 zu seiner Orthogonalprojektion; dagegen bildet der Punkt P' gleichzeitig die Projektion aller Punkte der durch ihn zu Π_1 gelegten Senkrechten. Ein Raumpunkt P ist somit durch seine Projektion P' noch nicht bestimmt, vielmehr gehört hierzu ein weiteres Bestimmungsstück, etwa die Strecke PP', d. h. der senkrechte Abstand des Punktes P von der Projektionsebene Π_1. Dabei ist diesem Abstand zur Unterscheidung der beiden Richtungen, nach denen er von P' aus aufgetragen werden kann, ein bestimmtes Vorzeichen beizulegen.

Auf die zuletzt angeführte Bestimmungsweise kommt seinem Wesen nach das gebräuchlichste Darstellungsverfahren[2]) zurück, das unter Voraussetzung zweier zu einander rechtwinkliger Projektionsebenen Π_1 und Π_2 jeden Punkt durch seine beiden Orthogonalprojektionen P' und P'' auf Π_1 und Π_2 bestimmt.

26. Um die Vorstellung zu fixieren, nimmt man die erste Projektionsebene Π_1 horizontal, mithin die zweite Projektionsebene Π_2 vertikal an und bezeichnet P' als Grundriß, erste oder Horizontalprojektion, P'' als Aufriß, zweite oder Vertikalprojektion. Ferner nennt man Π_1 die Grundriß- oder Horizontalebene, Π_2 die Aufriß- oder Vertikalebene und $x = \Pi_1 \times \Pi_2$ die Achse der Projektion. Von den Ebenen Π_1 und Π_2 werden natürlich nur begrenzte Teile als Projektionstafeln thatsächlich benutzt; sie sind aber an sich als unbegrenzt vorzustellen. Der ganze Raum wird durch die Projektionsebenen in vier Fächer oder Quadranten, jede Projektionsebene durch die Achse in zwei Halbebenen zerlegt. Zur Orientierung dienen Benennungen, die, ebenso wie die schon angeführten, für einen auf der Grundrißebene stehenden und der Aufrißebene zugewandten Beschauer zutreffen. Man sagt nämlich von einem Punkte, er liege über, auf oder unter der Grundrißebene und zugleich vor, auf oder hinter der Aufrißebene. Die auf den projizierenden Strahlen gemessenen Strecken

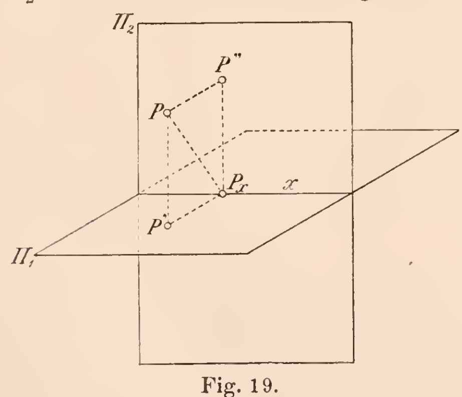


Fig. 19.

$$PP' = (P \dashv \Pi_1), \quad PP'' = (P \dashv \Pi_2)$$

heißen erster und zweiter Tafelabstand des Punktes P; für beide wird das Vorzeichen in dem vorderen oberen Fache positiv angenommen; es wechselt beim Durchgang von P durch die betreffende Projektionsebene. Die Ebene $PP'P''$ der beiden projizierenden Strahlen steht zu beiden Projektionsebenen und folglich auch zur Achse x senkrecht. Ist also (Fig. 19) $P_x = PP'P'' \times x$, so sind PP_x, $P'P_x$ und $P''P_x \perp x$ und $PP'P_xP''$ ist ein Rechteck.

27. Hieraus erkennt man:

α) Die von den beiden Projektionen eines Punktes (und von diesem selbst) auf die Achse gefällten Lote haben denselben Fußpunkt P_x.

β) Der erste (zweite) Tafelabstand eines Punktes stimmt nach Größe und Vorzeichen mit dem Abstande seiner zweiten (ersten) Projection von der Achse überein. Liegt insbesondere der Punkt P auf einer Projektionsebene, so fällt die bezügliche Projektion mit ihm zusammen, die andere auf die Achse. Ein Punkt der Achse endlich liegt mit seinen beiden Projektionen vereinigt.

Aus den beiden in Π_1 und Π_2 verzeichneten Projektionen eines Punktes, welche die Bedingung *α*) erfüllen müssen, sonst aber beliebig angenommen werden können, wird dieser selbst nach *β*) eindeutig bestimmt und zwar am einfachsten als Schnittpunkt der in P' auf Π_1 und in P'' auf Π_2 errichteten Senkrechten. — Aus der Darstellung eines Punktes ergeben sich aber die der Geraden und Ebenen, sowie überhaupt der zusammengesetzten Raumgebilde.

28. Die Projektion einer Linie wird als Gesamtheit der Projektion ihrer Punkte erhalten. Die ersten Projektionen aller Punkte einer Geraden g ergeben deren Grundriß, erste oder Horizontalprojektion g', ebenso die zweiten Projektionen den Aufriß, die zweite oder Vertikalprojektion g''. Die projizierenden Strahlen sämtlicher Punkte von g bilden resp. eine erste oder zweite projizierende Ebene. Die Projektionen der Geraden sind also die Schnittlinien (Spuren) ihrer projizierenden Ebenen in Π_1 und Π_2, mithin selbst gerade Linien. Eine Ausnahme tritt nur für den besonderen Fall ein, daß die Gerade g zu einer Projektionsebene senkrecht ist; es existiert dann keine zugehörige projizierende Ebene mehr; die betreffende Projektion wird ein Punkt, während die andere Projektion eine zur Achse senkrechte Gerade bildet.

29. Nach Annahme einer Geraden g ist ihre Orthogonalprojektion g' auf eine gegebene Ebene als Spur der projizierenden Ebene bestimmt; dagegen ist g durch eine Projektion noch nicht bestimmt. Die beiden Projektionen g' und g'' auf Π_1 und Π_2, die wir willkürlich annehmen dürfen, definieren jedoch eine Raumgerade g, und zwar ist sie die Schnittlinie der beiden durch g' resp. g'' senkrecht zu Π_1 resp. Π_2 gelegten Ebenen. Ausgenommen hiervon ist der Fall, wo eine der projizierenden Ebenen auf der Achse senkrecht steht; dann fällt die andere projizierende Ebene mit ihr zusammen, und die Projektionen g' und g'' stehen in dem nämlichen Punkt der Achse auf dieser senkrecht. Ist demnach g' zur Achse normal, so ist auch g'' in dem gleichen Punkt zur Achse normal; zur vollständigen Bestimmung der Raumgeraden g sind hier noch weitere Angaben erforderlich.

30. Die Darstellung einer Geraden g kann immer auf die zweier auf ihr liegender Punkte P und Q zurückgeführt werden, durch deren Projektionen dann die der Geraden g hindurchgehen,

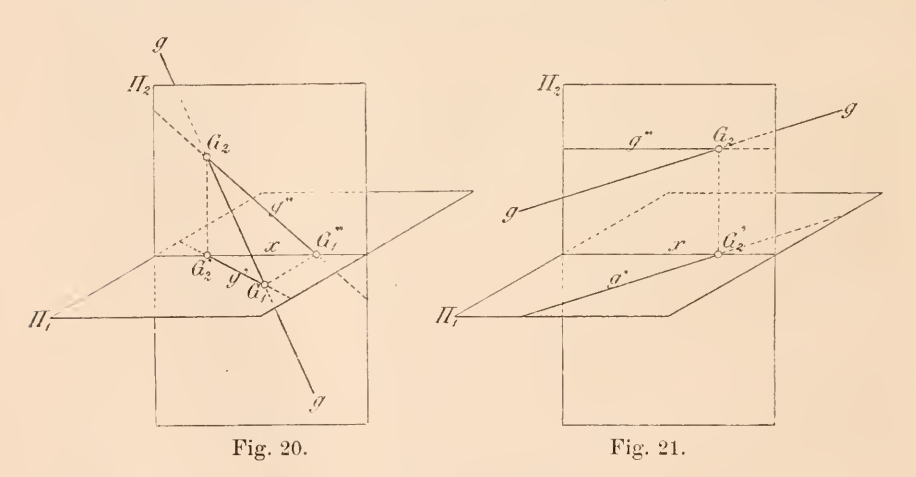


Fig. 20. Fig. 21.

also $g' = P'Q'$, $g'' = P''Q''$. Unter allen Punkten einer Geraden haben aber ihre Schnittpunkte mit den Projektionsebenen, nämlich $G_1 = g \times \Pi_1$ und $G_2 = g \times \Pi_2$, eine besondere Bedeutung. Sie heißen erster und zweiter Spur- oder Durchstoßpunkt der Geraden. Jeder Spurpunkt fällt mit seiner gleichnamigen Projektion zusammen, während seine andere Projektion auf der Achse liegt (Fig. 20). — Ist g einer Tafelebene parallel, so liegt in dieser ihr Spurpunkt unendlich fern, die Projektion auf die andere Tafelebene wird zur Achse parallel. Z. B. folgt aus $g \parallel \Pi_1$, daß $g' \parallel g$ und $g'' \parallel x$ ist (Fig. 21).

Ist g zur Achse parallel, so sind es auch g' und g''; G_1 und G_2 liegen dann beide unendlich fern.

Sind umgekehrt die Projektionen g' und g'' der Geraden g gegeben, so findet man ihre Spurpunkte aus der Bemerkung, daß der Aufriß von G_1 mit dem Punkt $g'' \times x$ und der Grundriß von G_2 mit dem Punkt $g' \times x$ identisch ist.

31. Die Projektion einer (unbegrenzten) Ebene E überdeckt im allgemeinen die betreffende Projektionsebene in ihrer ganzen Ausdehnung und eignet sich daher nicht zur Bestimmung von E. Ausgenommen ist der Fall, wo E auf der Projektionsebene senkrecht steht; die Orthogonalprojektion der Ebene reduziert sich dann auf eine Gerade und genügt zu ihrer Bestimmung. Im allgemeinen Falle dagegen kann zur Darstellung der Ebene entweder die Angabe dreier Punkte oder zweier Geraden derselben durch ihre Grund- und Aufrisse dienen. Am gebräuchlichsten ist es, die Ebene E durch die beiden Geraden

$$e_1 = \mathsf{E} \times \Pi_1 \text{ und } e_2 = \mathsf{E} \times \Pi_2$$

darzustellen, die man als ihre erste oder Horizontalspur und ihre zweite oder Vertikalspur bezeichnet (Fig. 22). Die Spuren treffen sich im Achsenschnittpunkte $E_x = \mathsf{E} \times x$ und bestimmen E direkt als Verbindungsebene $e_1 e_2$. Ist E zur Achse parallel, so sind es auch ihre Spuren e_1 und e_2 und E_x ist unendlich fern. Ist E einer Projektionsebene parallel, so liegt in dieser ihre Spur unendlich fern, in der anderen parallel zur Achse. Ist E zu einer Tafelebene normal, so steht in der anderen ihre Spur zur Achse senkrecht. Enthält E die Achse, so fallen beide Spuren e_1 und e_2 mit dieser zusammen; zur Bestimmung der Ebene bedarf es dann noch der Angabe eines auf ihr liegenden Punktes außerhalb der Achse.

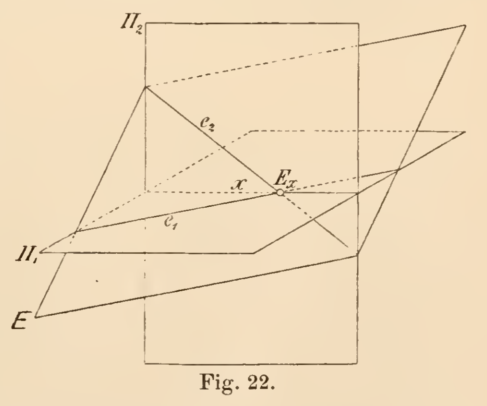


Fig. 22.

32. Die oben erwähnten speziellen Lagen einer Geraden oder einer Ebene, für die es nötig wird, von der gebräuchlichen Darstellung mittels Projektionen, bez. Spuren in Π_1 und Π_2 abzuweichen, weil diese zur Bestimmung nicht genügen, können als Beispiele dafür angeführt werden, daß es unter Umständen sich empfiehlt

eine dritte Projektionsebene Π_3 einzuführen. Man legt dieselbe zumeist gegen Π_1 und Π_2, also auch gegen die x-Achse senkrecht und bezeichnet sie als Seitenrißebene (Kreuzriß). Die Geraden $y = \Pi_1 \times \Pi_3$ und $z = \Pi_2 \times \Pi_3$ bezeichnen wir auch als horizontale und vertikale Nebenachse. Der Punkt $O = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3$, in dem sich die drei Achsen rechtwinklig schneiden, heißt Ursprung. Von O aus werden auf jeder Achse die Strecken nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechnet und zwar auf x nach rechts, auf y nach vorn, auf z nach oben in positivem Sinn.

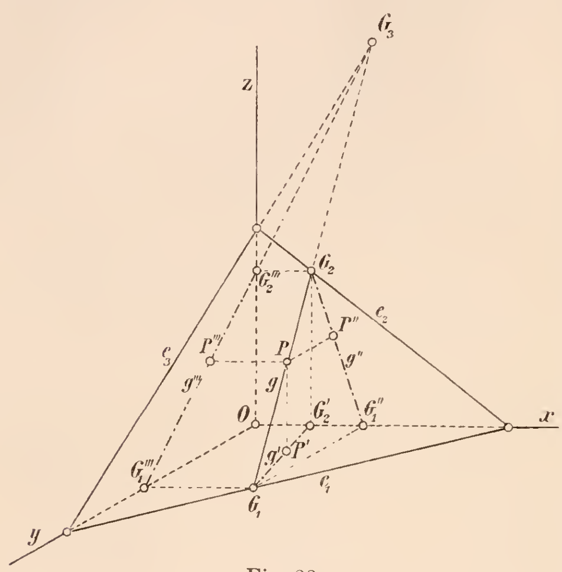


Fig. 23.

33. Zu den bisherigen Darstellungselementen eines jeden Grundgebildes kommt nach Einführung von Π_3 noch je ein drittes Element neu hinzu: für den Punkt P die dritte Projektion oder der Seitenriß P''', sowie der dritte Abstand PP''' (welcher auf der rechten Seite von Π_3 positiv gerechnet wird), für eine Gerade g der Seitenriß g''' und der dritte Spurpunkt $G_3 = g \times \Pi_3$, für eine Ebene E endlich die dritte Spurlinie $e_3 = \mathsf{E} \times \Pi_3$ (Fig. 23).

34. Die drei Ebenen Π_1, Π_2, Π_3 teilen den Raum in acht räumliche Ecken, sie selbst werden durch die Achsen x, y, z in je vier ebene Felder zerlegt. Zur Unterscheidung der möglichen Lagen eines Punktes hinsichtlich der acht Ecken dienen die Vorzeichen der drei Tafelabstände. Die Maßzahlen dieser Abstände bilden die rechtwinkligen Punktkoordinaten in der analytischen Geometrie des Raumes.

35. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß in diesem Dreitafelsystem die Darstellung einer Geraden durch ihre Projektionen oder die einer Ebene durch ihre Spuren auch in den oben erwähnten Spezialfällen keine Unbestimmtheit mehr übrig läßt. Eine zur

Achse x senkrecht gerichtete, schneidende oder nicht schneidende (windschiefe) Gerade g, die durch ihre ersten beiden Projektionen g' und g'' nicht bestimmbar ist, wird durch eine derselben in Verbindung mit der dritten (zu ihr selbst parallelen) Projektion g''' völlig bestimmt (Fig. 24). Eine die Achse x enthaltende Ebene E wird durch diese in Verbindung mit der dritten (durch den Ursprung gehenden) Spur e_3 bestimmt (Fig. 25).

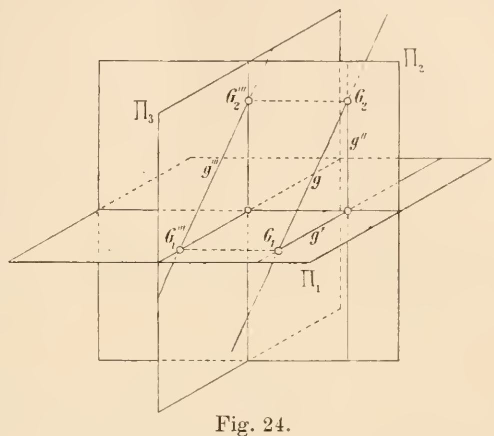


Fig. 24.

36. Im übrigen ist die Einführung einer dritten Projektionsebene (welche zudem den jeweiligen Bedingungen der Aufgabe entsprechend noch in anderer Weise gewählt werden kann) als eine der *Hilfsmethoden* zu betrachten, die wir in der Folge noch weiter zu entwickeln haben werden. Den *Hauptbestandteil der Methode der Orthogonalprojektion* bildet die Benutzung des rechtwinkligen *Zweitafelsystems* oder das *Grund- und Aufrißverfahren.*

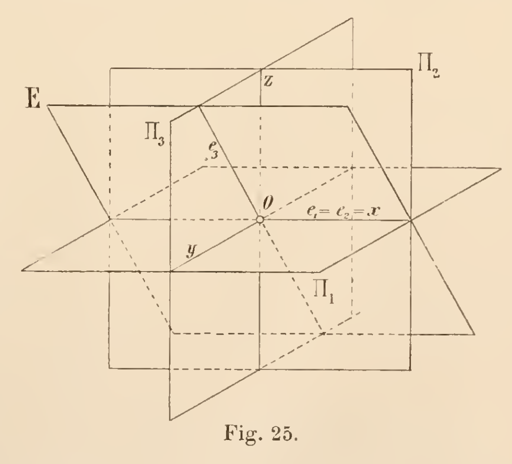


Fig. 25.

37. Die in der Horizontal- und Vertikalebene konstruierten Projektionen einer Raumfigur sollen jetzt in *einer und derselben Zeichnungsebene* zur Darstellung gebracht werden. Zu diesem Zwecke wählt man etwa die Aufrißebene als Zeichnungsebene und denkt sich nach Ausführung der Projektionen die Horizontalebene durch Drehung um die Achse x mit der ersteren derart vereinigt, daß der vordere Teil der Grundrißebene (den wir als $+\Pi_1$ bezeichnen wollen) in den unteren Teil der Aufrißebene ($-\Pi_2$), folglich zugleich der hintere

Teil der Grundrißebene ($-\Pi_1$) in den oberen Teil der Aufrißebene ($+\Pi_2$) zu liegen kommt (Fig. 26).

Ist eine Seitenrißebene Π_3 zur Anwendung gekommen, so denkt man sich auch diese mit Π_2 vereinigt und zwar durch eine solche Drehung um die Achse z, daß die vordere Halbebene Π_3 die linke Halbebene Π_1 deckt. In Fig. 27*a* und 27*b* sind diejenigen Quadranten der drei Projektionsebenen, welche den oben, vorn und rechts gelegenen Raumoktanten begrenzen (in dem alle drei Tafelabstände eines Punktes P positiv sind), vor und nach ihrer Umlegung in die Bildebene dargestellt.

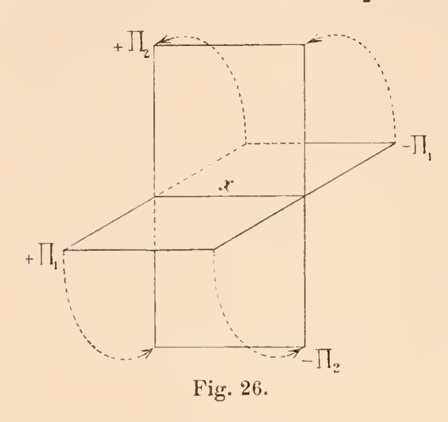


Fig. 26.

Durch die getroffenen (an sich willkürlichen) Festsetzungen über die Anordnung der verschiedenen Projektionen einer Figur in der Zeichnungsebene ist umgekehrt der Übergang von diesen zu ihrer Konstruktion im Raume eindeutig festgelegt.

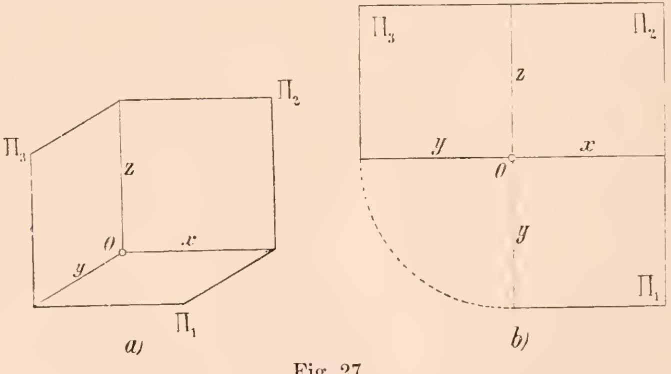


Fig. 27.

38. Zur leichteren Orientierung in den Figuren dient außer der Bezeichnung ihrer Punkte, Linien und Flächen durch Buchstaben die folgende Regel für das Zeichnen der Linien. In jeder Figur sind hauptsächliche und nebensächliche Linien zu unterscheiden; zu der ersteren gehören die bei der Problemstellung gegebenen und gesuchten Linien, sowie die Achse der Projektion, zu den letzteren die nur Konstruktionszwecken dienenden

Hilfslinien. Die Projektion einer jeden Hauptlinie wird voll ausgezogen, soweit letztere selbst im vorderen, oberen Raumquadranten liegt und sichtbar ist; anderenfalls wird sie punktiert. Nebenlinien werden — ob sichtbar oder unsichtbar — gestrichelt oder strichpunktiert. Für die Beurteilung der Sichtbarkeit ist zu bemerken, daß alle vorkommenden Flächen, ebenso wie die Projektionstafeln als undurchsichtig gelten, sowie daß die Sehrichtung den projizierenden Strahlen in ihrer ursprünglichen Lage folgt und zwar für Π_1 von oben nach unten, für Π_2 von vorn nach hinten.

Bei der Abbildung allseitig begrenzter Objekte denkt man sich diese zweckmäßig ganz in dem oberen, vorderen Raumquadranten gelegen, wodurch die Darstellung an Übersichtlichkeit gewinnt.

Darstellung der Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene in verschiedenen Lagen.

Wir nehmen die oben geforderte Umlegung der einen Projektionsebene in die andere als vollzogen an und betrachten alle möglichen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen gegen das ursprüngliche System und die entsprechende Anordnung ihrer Projektionen resp. Spuren in der Zeichnungsebene.

39. Der Punkt. Die Projektionen P' und P'' eines Punktes P liegen in einer zur Achse senkrechten Geraden (Fig. 28). Umgekehrt bilden je zwei Punkte P' und P'', deren Verbindungslinie zur Achse senkrecht ist, die beiden Projektionen eines Raumpunktes P. Aus einer derselben wird P mittels seines senkrechten Abstandes von der betreffenden Tafel konstruiert. Der Punkt P liegt senkrecht über P' im Abstand $PP' = P''P_x$, oder senkrecht vor P'' im Abstand $PP'' = P'P_x$.

Fig. 28.

P liegt über, auf oder unter Π_1, je nachdem P'' oberhalb, auf oder unterhalb der Achse liegt, und befindet sich zugleich vor, auf oder hinter Π_2, je nachdem P' unterhalb, auf oder oberhalb der Achse liegt. Die so unterschiedenen Lagen eines Punktes sind in Fig. 29 dargestellt. Die Punkte P_1, P_3, P_7, P_9 gehören resp. dem oben vorn, unten vorn, oben hinten,

unten hinten liegenden Raumquadranten, die Punkte P_2, P_4, P_6, P_8 resp. der Halbebene $+\Pi_1$, $+\Pi_2$, $-\Pi_2$, $-\Pi_1$, endlich P_5 der Achse x an.

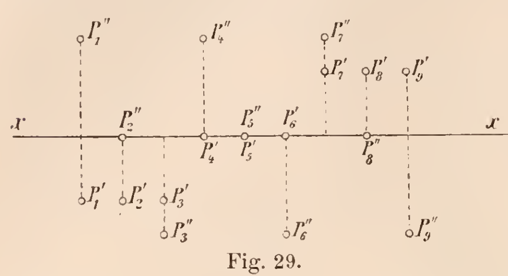


Fig. 29.

40. Aus den beiden ersten Projektionen P' und P'' eines Punktes P leitet man die dritte P''' mit Hilfe der Fußpunkte P_y und P_z der von P''' auf die Nebenachsen y und z gefällten Perpendikel ab (Fig. 30). Mit Rücksicht auf den in jeder Achse festgesetzten Sinn der von O ausgehenden Strecken stimmen OP_z und OP_y nach Größe und Vorzeichen mit dem ersten und zweiten Tafelabstand des Punktes P, d. h. mit P_xP'' und P_xP' überein. OP_x ist der dritte Tafelabstand.

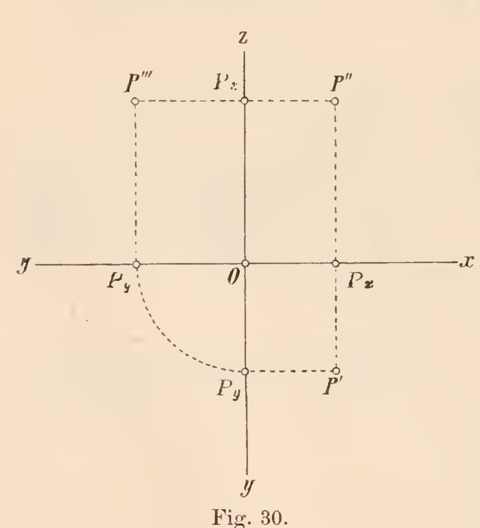


Fig. 30.

41. Den geometrischen Ort aller Punkte des Raumes, die von beiden Projektionsebenen gleiche Abstände haben, bilden zwei die Achse enthaltende Ebenen, welche die von den Tafeln gebildeten rechten Winkel halbieren und deshalb Halbierungsebenen heißen. Die beiderlei Projektionen der Punkte in der ersten Halbierungsebene H_1, welche durch den oben vorn und den unten hinten liegenden Raumquadranten geht, liegen nach Vereinigung der Tafeln symmetrisch zur Achse, die Projektionen der Punkte in der zweiten Halbierungsebene H_2 fallen zusammen.

42. Die Gerade. Die Projektionen g' und g'' einer Geraden g sind zwei gerade Linien, deren Punkte paarweise als die beiden Projektionen eines Raumpunktes zusammengehören und auf zur Achse senkrechten Geraden liegen. Hieraus folgt: Falls eine der Projektionen zur Achse rechtwinklig steht (also g in einer Normalebene zu x liegt), fallen

beide Projektionen in die nämliche Gerade. Steht die Gerade auf einer Projektionsebene senkrecht, so ist die eine Projektion ein Punkt und die andere eine Senkrechte zur x-Achse durch diesen Punkt. Umgekehrt können je zwei (getrennte oder zusammenfallende) Gerade g' und g'', sofern nur keine von ihnen auf der Achse senkrecht steht, als die beiden Projektionen einer bestimmten Geraden g des Raumes betrachtet werden, die man nach dem Früheren als Schnitt der durch g' und g'' gelegten projizierenden Ebenen erhalten kann.

43. Jeder der beiden Spurpunkte von g fällt mit seiner gleichnamigen Projektion zusammen, während die

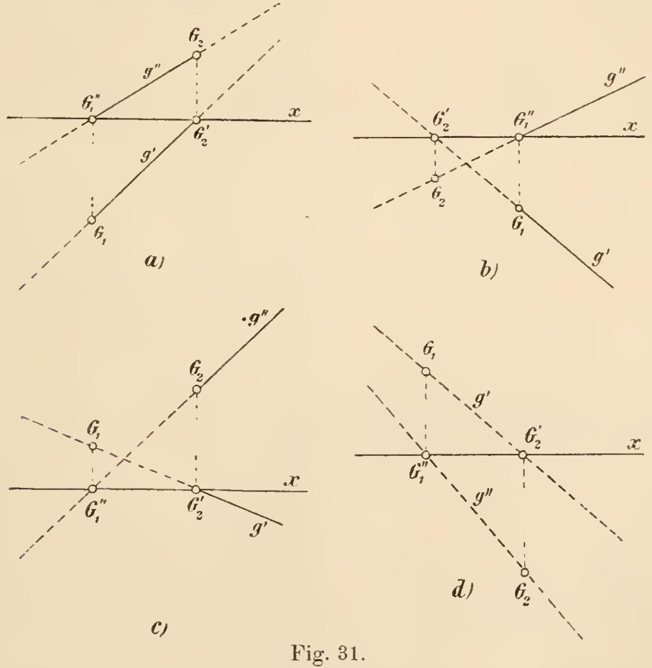


Fig. 31.

ungleichnamige auf der Achse liegt. Demnach findet man G_1 auf g', indem man auf der Achse in ihrem Schnittpunkt mit g'' eine Normale errichtet; analog findet sich G_2. Umgekehrt sind durch die Spuren G_1 und G_2 die Fußpunkte G_1'' und G_2' der von ihnen auf die Achsen gefällten Lote und die Projektionen von g als die Verbindungslinien $g' = G_1 G_2'$ und $g'' = G_2 G_1''$ bestimmt. Die von den Spurpunkten begrenzte Strecke $G_1 G_2$ der Geraden g kann in jedem der von den Tafeln gebildeten Raumquadranten liegen. Diese vier Lagen der Geraden sind in den Figuren 31 a, b, c, d dar-

gestellt. Ist in einer der Tafeln die Projektion von g der Achse parallel, so liegt in der anderen der Spurpunkt unendlich fern, folglich ist g selbst letzterer parallel. Mit g' und g'' wird zugleich g der Achse parallel. Die Darstellung solcher Spezialfälle durch Figuren ist dem Leser überlassen.

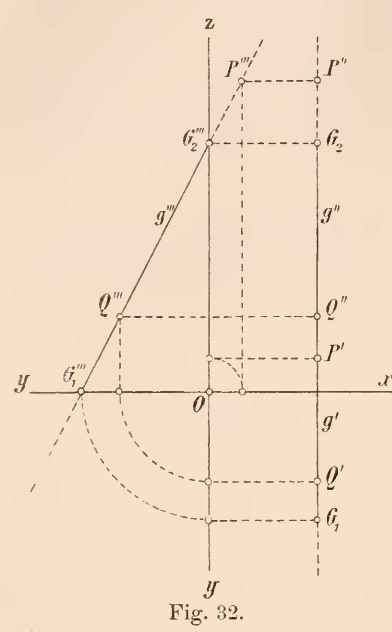


Fig. 32.

Liegen g' und g'' symmetrisch zur Achse, so ist dies auch für die beiden Projektionen eines jeden Punktes der Geraden g der Fall; letztere fällt daher in die erste Halbierungsebene H_1. Fallen g' und g'', mithin Grundriß und Aufriß eines jeden Punktes von g aufeinander, so gehört g der zweiten Halbierungsebene H_2 an.

44. Eine senkrecht zur Achse gezogene Gerade tritt nur als Projektion einer rechtwinklig zu x gerichteten Geraden g auf und enthält daher gleichzeitig beide Projektionen g' und g''. Durch die Annahme, daß g' und g'' in eine gegebene Vertikale fallen, wird aber lediglich die g enthaltende Normalebene zur Achse fixiert; es bleibt also noch die Lage von g in dieser Ebene zu bestimmen. Hierzu kann die zu g parallele Seitenprojektion g''' dienen, deren Verzeichnung gemäß der früher für die Umlegung der Seitenrißebene Π_3 in die Zeichnungsebene gegebenen Vorschrift erfolgt. Die Spurpunkte G_1 und G_2 findet man auf $g' = g''$, wenn man in den Schnittpunkten von g''' mit den Nebenachsen y und z Normale zu diesen errichtet (Fig. 32). — Bei direkter Angabe

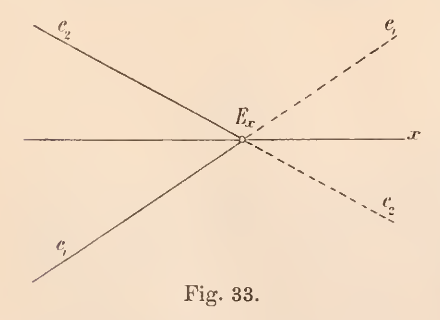


Fig. 33.

von G_1 und G_2 wird der Seitenriß g''' im allgemeinen entbehrlich; nur wenn G_1 und G_2 in einen Punkt der Achse zusammenfallen, also g diese selbst schneidet, ist g''' unumgänglich. — Wenn im besonderen einer der Spurpunkte G_1 und G_2 unendlich fern liegt, steht g im anderen

auf der bezw. Tafelebene senkrecht; die eine Projektion ist ihr Spurpunkt, ihre beiden anderen Projektionen sind wie g selbst zu einer Nebenachse parallel. — Mit Hilfe des Seitenrisses g''' wird die Aufgabe gelöst: von einer als Verbindungslinie zweier Punkte P und Q gegebenen Geraden g die Spuren zu konstruieren, wenn die Projektionen P', P'', Q', Q'' in einer Senkrechten zur Achse x liegen. Man sucht zuerst P''' und Q''', sodann zieht man den Seitenriß $g''' = P'''Q'''$ und findet mit seiner Hilfe G_1 und G_2.

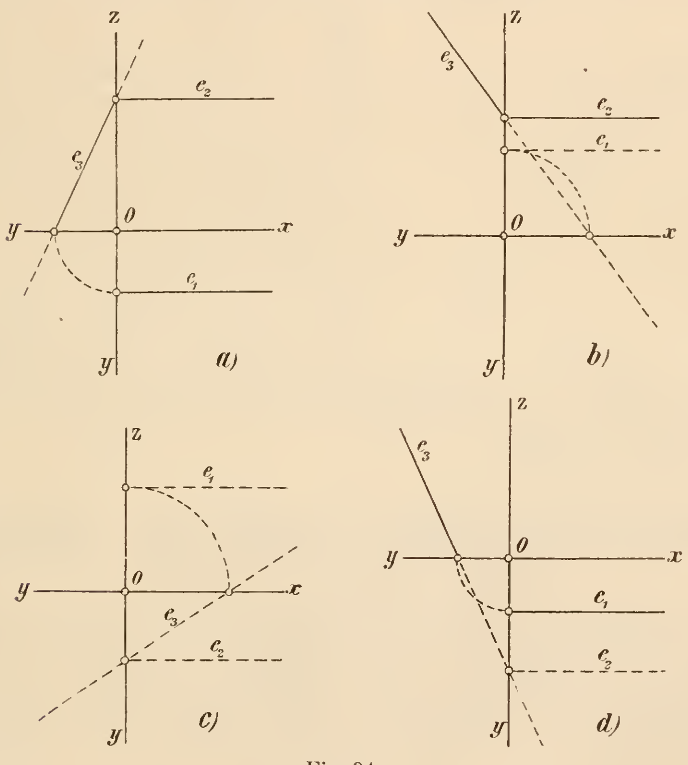


Fig. 34.

45. Die Ebene. Die Spuren e_1 und e_2 einer Ebene E sind zwei Gerade, die sich in einem Punkte E_x der Achse schneiden. Ist E der Achse parallel, so sind es auch e_1 und e_2. Umgekehrt dürfen je zwei sich auf der Achse schneidende, oder zu ihr parallele Gerade e_1 und e_2 als Spuren einer Ebene angenommen werden. Schneiden sich die Spuren in einem erreichbaren Punkte der Achse (Fig. 33), so bilden sie in der Ebene E selbst vier Winkelfelder. deren Punkte je einem Quadranten

des Raumes angehören. Ist e_1 zur Achse senkrecht, so ist E zu Π_2 normal; ist dagegen e_2 rechtwinklig zur Achse, so steht E zu Π_1 senkrecht; findet beides gleichzeitig statt, so ist E normal zur Achse. In diesen drei Fällen sind in E selbst die Spuren zu einander rechtwinklig. Sind beide Spuren zur Achse parallel, so gilt dies auch von E und umgekehrt. E zerfällt dann durch e_1 und e_2 in drei, je in einem Raumquadranten verlaufenden Parallelstreifen; der vierte Quadrant enthält überhaupt keinen Punkt von E. Die Figuren 34 a, b, c, d entsprechen den hierbei möglichen Fällen. Um die Lage von E deutlicher zu machen, ist jedesmal außer e_1 und e_2 in der umgelegten Seitenrißebene die dritte Spur e_3 mitgezeichnet. — Fallen die beiden ersten Spuren e_1 und e_2 in die Achse zusammen, so ist die Angabe der dritten Spur e_3 (die den Ursprung enthält) zur Bestimmung von E erforderlich. Da e_3 in diesem Falle nicht nur die dritte Spur, sondern zugleich die dritte Projektion von E darstellt, so verbindet dieselbe die dritte Projektion eines beliebig auf E gegebenen Punktes P mit dem Ursprung O, also $e_3 = OP'''$ (Fig. 35).

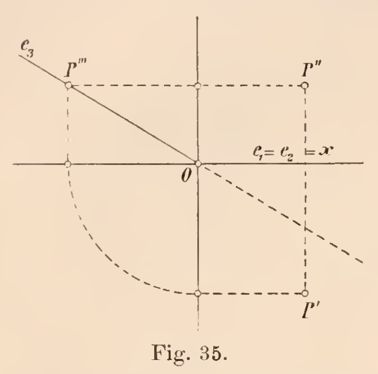


Fig. 35.

Punkte, Gerade und Ebenen in vereinigter Lage. Verbindungs- und Schnittelemente. Parallelismus.

46. Aus der Entwickelung der Darstellungsmethode für Punkte, Gerade und Ebenen folgen eine Reihe allgemeiner Sätze.

Die Projektionen eines Punktes P liegen auf den gleichnamigen Projektionen jeder durch ihn gehenden Geraden g.

Die Spurlinien einer Ebene E enthalten die gleichnamigen Spurpunkte jeder auf ihr liegenden Geraden g.

47. Schneiden sich zwei Gerade g und h, so sind die Projektionen P' und P'' des Schnittpunktes P die Schnittpunkte $g' \times h'$ und $g'' \times h''$ der gleichnamigen Projektionen der Geraden, folglich ist ihre Verbindungslinie zur Achse senkrecht (Fig. 36 und 38). — Sind zwei Gerade parallel, so sind ihre gleichnamigen projizierenden Ebenen und folglich ihre gleichnamigen Projektionen parallel (Fig. 37).

Im besonderen können sich zwei gleichnamige Projektionen paralleler Geraden auf Punkte reduzieren.

Fig. 36.

Fig. 37.

Liegen zwei Gerade g und h in einer Ebene E, so sind ihre Spuren e_1 und e_2 die Verbindungslinien G_1H_1 und G_2H_2 der gleichnamigen Spurpunkte der Geraden, und folglich müssen diese sich in einem Punkte E_x der Achse schneiden (Fig. 36 und 37), oder ihr beide parallel sein (Fig. 38).

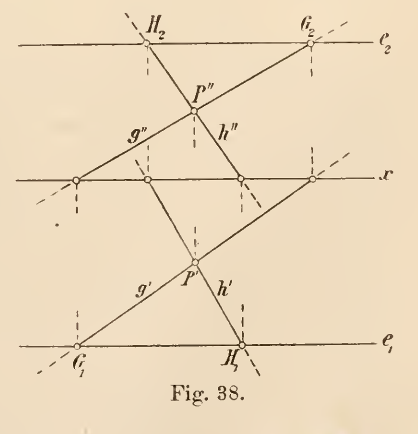


Fig. 38.

Aus der Umkehrung der letzten Sätze folgt:

48. Liegen die Schnittpunkte der gleichnamigen Projektionen zweier Geraden auf einer Senkrechten zur Achse, so schneiden sich die Geraden; sind die gleichnamigen Projektionen parallel, so sind es auch die Geraden selbst. Zwei Gerade, deren

Projektionen keine dieser beiden Voraussetzungen erfüllen, sind windschief (haben keinen Punkt gemein).

Schneiden sich die Verbindungslinien der gleichnamigen Spurpunkte zweier Geraden in einem Punkte der Achse, oder sind sie beide zur Achse parallel, so liegen die Geraden in einer Ebene. Zwei Gerade, deren Spurpunkte keiner dieser beiden Bedingungen genügen, sind windschief (haben keine Verbindungsebene).

Die beiden letzten Kriterien sind einander äquivalent, insofern je zwei sich schneidende oder parallele Gerade eine Ebene bestimmen, resp. je zwei in einer Ebene liegende Gerade einen erreichbaren oder unendlich fernen Punkt gemein haben.

49. Es giebt einige besondere Lagen der beiden betrachteten Geraden gegen das Tafelsystem, bei denen die Voraussetzungen des einen oder anderen der Sätze in 48 für die ersten und zweiten Projektionen oder Spurpunkte an sich erfüllt sind, ohne daß daraus die Existenz eines Schnittpunktes und einer Verbindungsebene geschlossen, bezw. diese selbst nach einem der vorausgehenden Sätze direkt gezeichnet werden könnten. Hierzu kommt, daß gegebenen Falles die Schnitt- und Spurpunkte zum Teil außerhalb der Zeichnungsfläche fallen können, so daß keines der beiden Kriterien in 48 direkt anwendbar ist. In allen diesen Fällen bedarf es geeigneter Hilfskonstruktionen.

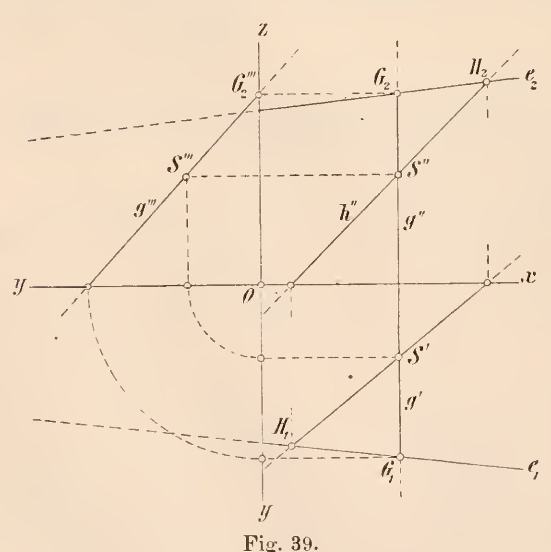


Fig. 39.

50. Liegt eine der Geraden, etwa g, in einer Normalebene N zur Achse, so wird sie von der anderen h getroffen, wenn der Schnittpunkt $S = h \times N$ auf g, also S''' auf g''' liegt (Fig. 39); oder — falls ihre Spurpunkte gegeben sind — wenn sich G_1H_1 und G_2H_2 auf der Achse x schneiden; andernfalls sind g und h windschief. Ist der Schnittpunkt auf der Achse x nicht erreichbar, wie in der Figur,

so wird man den Seitenriß zu Hilfe nehmen. — Liegen beide Gerade in derselben Normalebene zur Achse, so schneiden sie sich oder sind parallel, je nachdem dies bei ihren dritten Projektionen g''' und h''' der Fall ist. — Schneidet g die Achse in G, so verbinde man einen beliebigen Punkt P auf g mit einem Punkte Q auf h durch eine Gerade i und suche ihre Spurpunkte, sowie die Spurlinien der Ebene $\mathsf{E} = hi$. Fällt der Achsenschnittpunkt $E_x = e_1 \times e_2$ der letzteren mit G zusammen, so geht sie zugleich durch g (Fig. 40); andernfalls giebt es keine gemeinsame Ebene durch g und h. — Eine die beiden gegebenen Geraden g und h schneidende Hilfsgerade i wird auch in dem Falle benutzt, wenn g und h die Achse in getrennten Punkten schneiden. Sollen beide in einer Ebene E liegen, so muß auch i die Achse treffen; ihre Seitenspur e_3 deckt sich dann mit den zusammenfallenden Seitenrissen g''' und h'''.

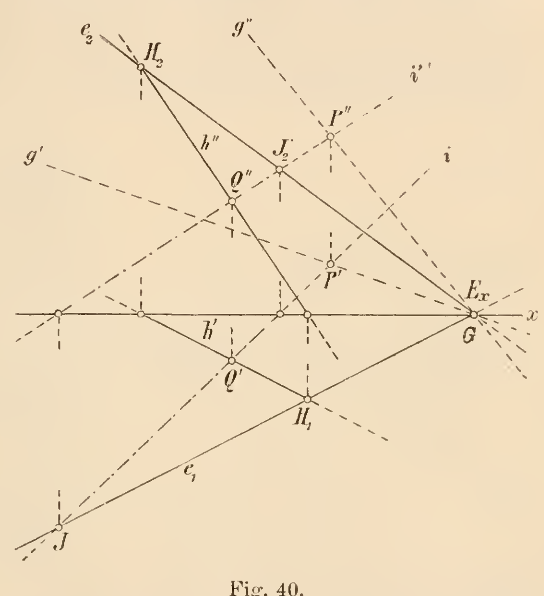


Fig. 40.

Im Interesse der Genauigkeit der Zeichnung werden die hier besprochenen Konstruktionen auch öfters verwendet, wo es theoretisch nicht nötig wäre. Ist z. B. die Gerade h beliebig, liegen aber die Spurpunkte von g nahe bei der Achse, so können die beiden Geraden windschief sein und gleichwohl können die Geraden G_1H_1 und G_2H_2 die Achse in so benachbarten Punkten schneiden, daß man sie in der Zeichnung nicht mit Sicherheit als getrennt bestimmen kann.

51. Parallele Ebenen haben in jeder Tafel parallele Spurlinien. Umgekehrt folgt aus dem Parallelismus der gleichnamigen Spuren zweier Ebenen, daß diese selbst parallel sind. Hierbei genügt es im allgemeinen die ersten und zweiten Spuren zu betrachten; nur wenn diese sämtlich zur Achse parallel laufen. sind noch die Spuren in irgend einer Hilfsebene, z. B. der Seitenrißebene, als unter sich parallel festzustellen.

52. Die in einer Ebene E parallel zur ersten oder zweiten Tafel, folglich auch parallel zu den gleichnamigen Spuren gezogenen Geraden heißen erste oder zweite *Hauptlinien (Streichlinien)* von E. Die eine Projektion einer Hauptlinie ist parallel zur gleichnamigen Spur (und zu ihr selbst), die andere zur Achse. Die Hauptlinien vertreten oft bei Konstruktionen die Spuren; letztere sind Hauptlinien von spezieller Lage.

53. Wie zu einer Projektion eines auf gegebener Geraden g gelegenen Punktes die andere Projektion, oder zu einer Spur einer durch g gehenden Ebene E die andere Spur gefunden wird, ist aus dem Vorhergehenden unmittelbar zu entnehmen. Die Aufgaben: Aus *einer* Projektion eines Punktes P und den beiden Spuren einer ihn enthaltenden Ebene E die *andere* Projektion, sowie aus *einer* Spur von E und beiden Projektionen des auf ihr liegenden Punktes P die *andere* Spur zu finden, werden auf folgende Art gelöst. Man ziehe (Fig. 41) durch P' eine Gerade h' parallel zu e_1; diese stellt den Grundriß einer ersten Hauptlinie von E dar, deren Aufriß h'' parallel zur Achse durch den Spurpunkt H_2 auf e_2 geht ($H_2' = h' \times x$, $H_2'H_2 \perp x$); P'' liegt dann auf h''. — Im anderen Falle sei neben P' und P'' die Spur e_1 gegeben. Man lege auch hier eine erste Hauptlinie h durch P, ziehe also h' durch P' parallel zu e_1 und h'' durch P'' parallel zu x; dann liegt H_2 senkrecht über $h' \times x$ und die gesuchte Spur e_2 verbindet H_2 und E_x. — Statt der Hauptlinie h kann man in beiden Fällen auch eine beliebige in E durch P gezogene Gerade benutzen. Zieht man z. B. i' durch P' parallel x, so ist $J_1 = i' \times e_1$ der erste Spurpunkt einer in E liegenden Geraden i. Der zu J_1 gehörige Aufriß liegt auf der Achse, durch diesen zieht man i'' und zwar im ersten Falle parallel zu e_2 und im zweiten durch P'', woraus sich dann entweder P'' oder e_2 ergiebt.

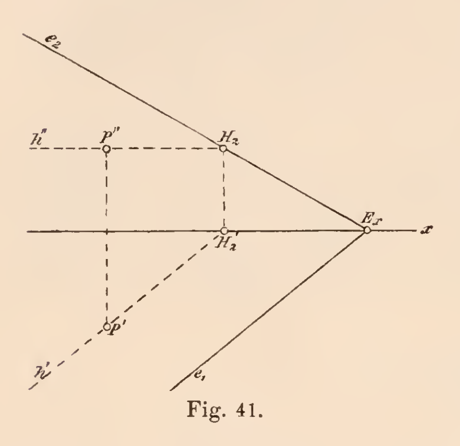


Fig. 41.

Auf Grund der angeführten Sätze können eine Reihe von Fundamentalaufgaben gelöst werden, welche sich darauf beziehen, Punkte, Gerade und Ebenen, durch ihre Projektionen, resp.

Spuren darzustellen, wenn dieselben ursprünglich auf andere Weise definiert sind.

54. Die Verbindungslinie g zweier Punkte P und Q. Sind P und Q endliche Punkte, so hat man nur $g' = P'Q'$ und $g'' = P''Q''$ zu ziehen. — Liegt einer der Punkte, etwa Q, unendlich fern, d. h. bildet er die Richtung einer gegebenen Geraden q, so lautet die Aufgabe: Eine Gerade g parallel zu einer Geraden q durch einen Punkt P zu legen. Hier zieht man g' parallel zu q' durch P' und g'' parallel q'' durch P''.

55. Die Verbindungsebene E zweier sich schneidender oder paralleler Geraden g und h. Aus den Projektionen von g

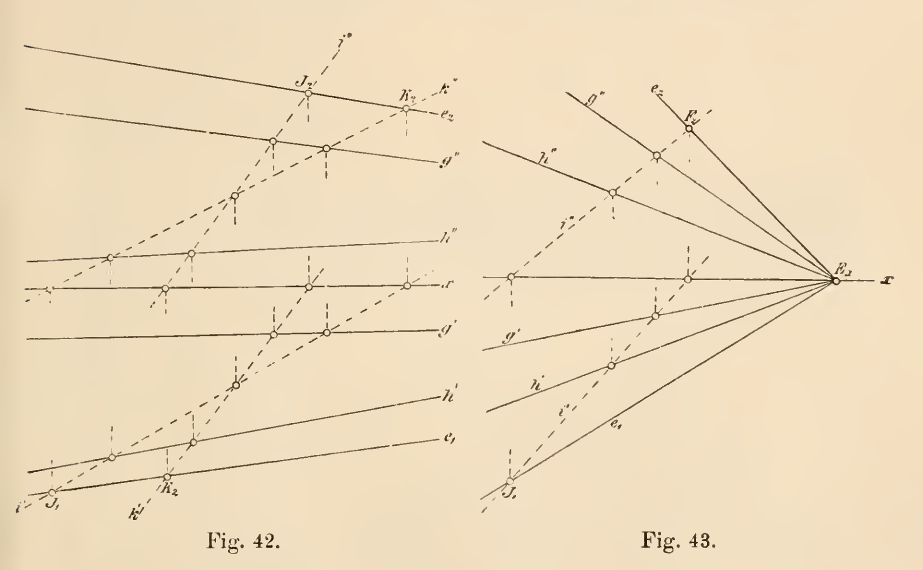


Fig. 42. Fig. 43.

und h findet man zuerst deren Spurpunkte G_1, G_2, H_1, H_2, hierauf die Spuren der Verbindungsebene $\mathsf{E} = gh$ als $e_1 = G_1 H_1$ und $e_2 = G_2 H_2$ (Fig. 36, 37 u. 38). — Liegen die Spurpunkte teilweise oder sämtlich außerhalb der Zeichnungsfläche, so benutzt man zwei Hilfsgeraden i und k (Fig. 42), welche g und h gleichzeitig schneiden, bestimmt deren Spurpunkte J_1, J_2, K_1, K_2 und erhält hierauf die Spuren der Verbindungsebene $\mathsf{E} = gh = ik$ als $e_1 = J_1 K_1$ und $e_2 = J_2 K_2$. Eventuell genügt schon eine Hilfsgerade i. — Ähnlich kann man verfahren, wenn sich die gegebenen Geraden auf der Achse in E_x schneiden. Man zieht eine beide Gerade schneidende Hilfsgerade i in beiden Projektionen und verbindet ihre Spurpunkte J_1 und J_2 mit E_x (Fig. 43). Diese Verbindungslinien stellen die Spuren e_1

und e_2 der Verbindungsebene $\mathsf{E} = gh$ dar. Auf dieselbe Weise kommt man zum Ziele, wenn E_x unendlich fern liegt, also g und h beide zur Achse parallel laufen.

56. Wird die Verbindungsebene E eines Punktes P und einer Geraden k gesucht, so wähle man auf k einen Hilfspunkt Q nach Willkür, ziehe die Gerade $i = PQ$ in beiden Projektionen und bestimme wie oben $\mathsf{E} = ik$. Insbesondere kann man die Hilfsgerade i durch P zu k parallel annehmen. — Ist k eine unendlich ferne Gerade, d. h. die Stellung einer Ebene K, so ist die Aufgabe: Durch einen Punkt P eine Parallelebene E zu K zu legen. Die Spuren und also auch die Hauptlinien von E sind parallel zu den Spuren von K. Zieht man also l' parallel zu k_1 durch P' und l'' parallel zu x durch P'', so ist l eine erste Hauptlinie von E (Fig. 44). Durch ihren zweiten Spurpunkt L_2 geht dann e_2 parallel zu k_2 und durch $E_x = e_2 \times x$ geht e_1 parallel k_1.

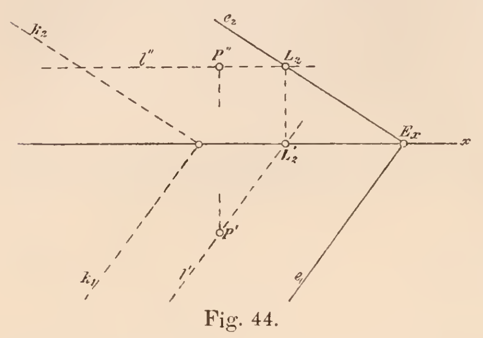


Fig. 44.

57. Ist die Verbindungsebene E dreier Punkte A, B, C durch ihre Projektionen $A', B', C', A'', B'', C''$ gegeben (Fig. 45), so sind zugleich die Projektionen der drei auf E liegenden Geraden $a = BC, b = CA, c = AB$ bekannt. Man kann ihre Spurpunkte aufsuchen und erhält die Spuren e_1 und e_2 der gesuchten Ebene wiederum als deren Verbindungslinien ($e_1 = A_1B_1C_1$, $e_2 = A_2B_2C_2$).

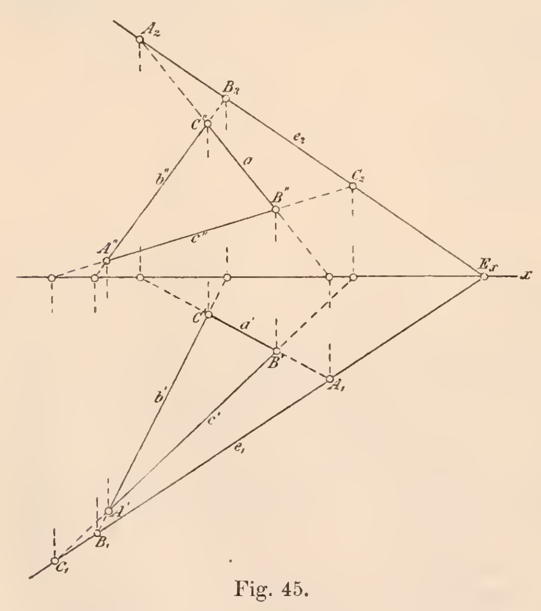


Fig. 45.

Die Parallelebene E zu einer Geraden g durch eine

Gerade h zu legen erscheint als ein spezieller Fall der voranstehenden Aufgabe, indem einer der drei Punkte ins Unendliche rückt. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt P auf h eine Parallele i zu g, wobei man der Einfachheit halber i' mit g' zusammenfallen lassen kann ($g' \times h' = P'$, P'' auf h'', $i'' \parallel g''$ durch P''). Die Spuren der Ebene E verbinden alsdann die gleichnamigen Spurpunkte der Geraden h und i; man hat also $e_1 = J_1 H_1$ und $e_2 = J_2 H_2$ (Fig. 46).

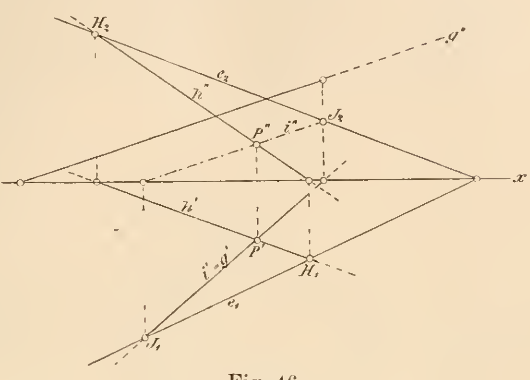


Fig. 46.

Einen weiteren Spezialfall bildet die Aufgabe: **Durch einen Punkt P eine Ebene E parallel zu zwei gegebenen Geraden g und h zu legen.** Zieht man durch P' die Parallelen i' und k' resp. zu g' und h', ebenso durch P'' die Parallelen i'' und k''

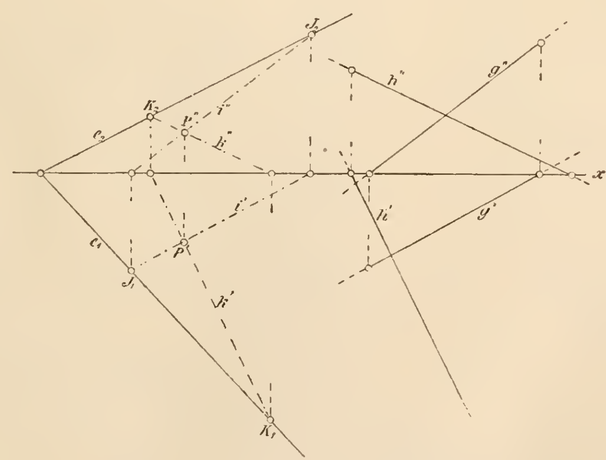
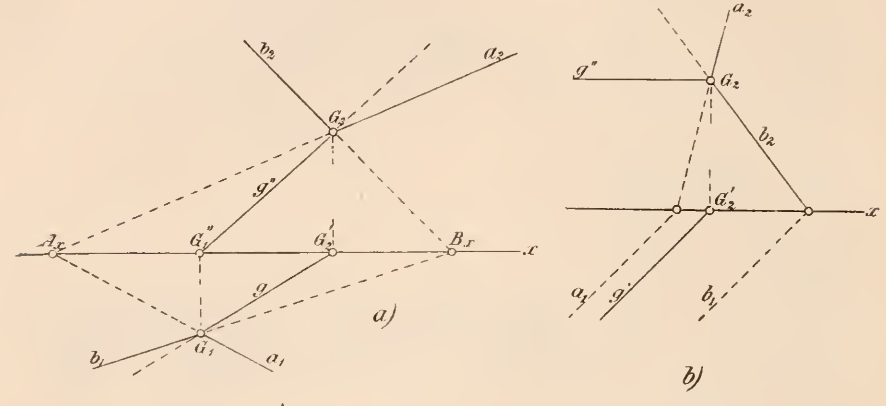


Fig. 47.

resp. zu g'' und h'', so sind i und k zwei Gerade durch P und resp. zu g und h parallel, welche die gesuchte Ebene E bestimmen. Ihre Spuren sind $e_1 = J_1 K_1$ und $e_2 = J_2 K_2$ (Fig. 47).

58. Die Schnittlinie g zweier Ebenen A und B. Man findet die Spurpunkte von g als Schnittpunkte der gleichnamigen

Spurlinien der gegebenen Ebenen (Fig. 48a), nämlich $G_1 = a_1 \times b_1$, $G_2 = a_2 \times b_2$, weiter durch Lote auf die Achse G_1'' und G_2', schließlich die Projektionen der Schnittlinie $g' = G_1 G_2'$ und $g'' = G_1'' G_2$. — Sind zwei gleichnamige Spuren der Ebenen, etwa a_1 und b_1, parallel, so ist auch die Schnittlinie g zu ihnen parallel (Fig. 48b); daher ist g'' parallel zur Achse durch $G_2 = a_2 \times b_2$ und g' parallel zu a_1 durch G_2' zu ziehen. — Sind beide Ebenen, also auch ihre



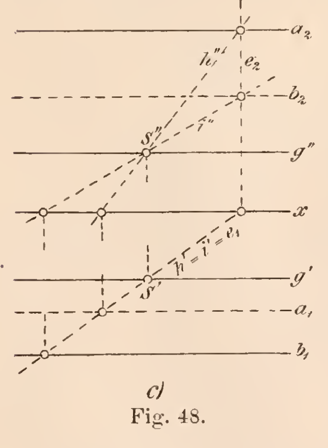


Fig. 48.

Spuren, sowie die Schnittlinie g zur Achse parallel, so schneide man sie mit einer beliebigen Hilfsebene E, die man etwa senkrecht zum Grundriß annehmen kann. Von den Schnittlinien $h = \mathsf{A} \times \mathsf{E}$ und $i = \mathsf{B} \times \mathsf{E}$ fallen die ersten Projektionen mit e_1 zusammen (Fig. 48c); aus den zweiten Projektionen ergiebt sich der Aufriß ihres Schnittpunktes $S = h \times i$ und aus ihm der Grundriß auf e_1. Die Projektionen g' und g'' der gesuchten Schnittgeraden sind nun durch S' resp. S'' parallel zur Achse zu ziehen.

59. Liegen die Spurpunkte $G_1 = a_1 \times b_1$ und $G_2 = a_2 \times b_2$ der Schnittlinie $g = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ außerhalb der Zeichnungsfläche (Fig. 49), so lege man eine Hilfsebene Γ parallel zu einer der gegebenen, etwa zu B, so daß ihre Spuren c_1 und c_2 die von A in erreichbaren Punkten H_1 und H_2 schneiden. Dann zeichne man die Schnittlinie $h = \mathsf{A} \times \Gamma$ in Grund- und Aufriß und suche auf der Achse die Punkte G_2' und G_1'', durch welche die Projektionen g' und g''

resp. zu h' und h'' parallel zu ziehen sind. Zur Konstruktion von G_2' und G_1'' dient aber die Bemerkung, daß A, C, H_1, H_1'', H_2, H_2' und A, B, G_1, G_1'', G_2, G_2' entsprechende Punkte zweier ähnlicher und ähnlich liegender Figuren sind, folglich A ihr Ähnlichkeitscentrum ist. Zieht man daher durch A einen beliebigen Strahl r, welcher b_2 und c_2 in B' und C' schneiden mag, so sind $B'G_1''$ und $B'G_2'$ resp. zu $C'H_1''$ und $C'H_2'$ parallel und demgemäß G_2' und G_1'' bestimmbar.

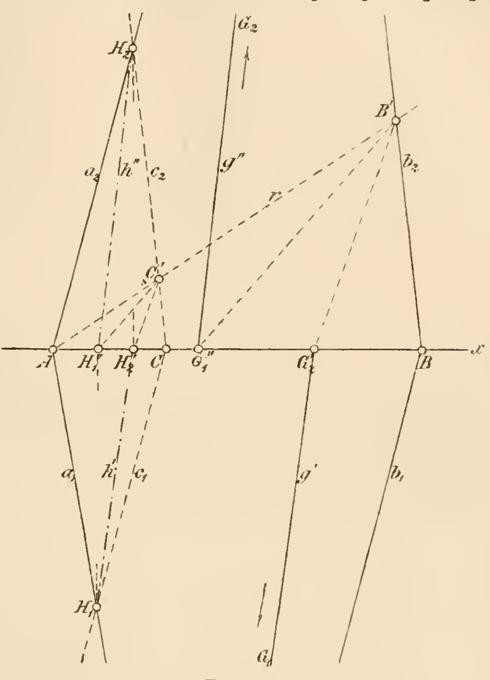


Fig. 49.

60. Schneiden sich die gegebenen Ebenen A und B in einem Punkte A der Achse (Fig. 50), so benutzt man am einfachsten eine senkrecht zum Grundriß (oder Aufriß) gestellte Hilfsebene Γ. Zuerst sucht man ihre Schnittlinien h und i mit A und B ($h' = i' = c_1$), dann ist $S = h \times i$ ein Punkt der Schnittgeraden g. Demnach verbindet g'' den Punkt A mit $S'' = h'' \times i''$ und g' den Punkt A mit S' (S' auf c_1).

Aus dem folgenden (62) ergiebt sich eine einfache Konstruktion der Schnittlinie g zweier Ebenen A und B, wenn diese je durch ein Dreieck oder — was wesentlich auf dasselbe hinauskommt — durch je zwei Gerade gegeben sind.

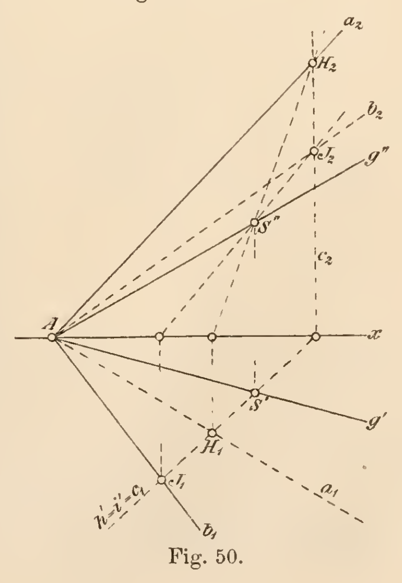


Fig. 50.

61. Der Schnittpunkt P einer Ebene E und einer Geraden k. Um $P = \mathsf{E} \times k$ zu be-

stimmen, lege man eine beliebige Hilfsebene K durch k, zeichne die Schnittlinie $i = \mathsf{K} \times \mathsf{E}$, dann ist $P = k \times i$. Insbesondere kann man die Ebene K senkrecht zum Grundriß wählen, so daß ihre erste Spur mit k' zusammenfällt und ihre zweite Spur senkrecht zur Achse wird (Fig. 51); dann ist $P'' = i'' \times k''$ und P' liegt senkrecht darunter auf $k' = i'$.

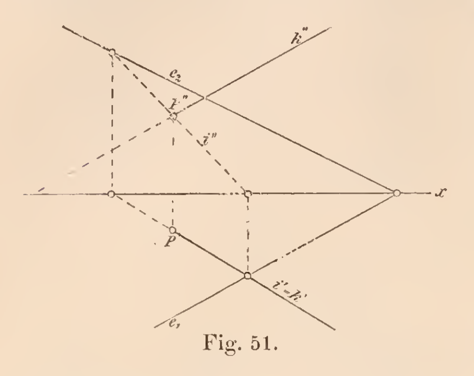


Fig. 51.

Ist die Ebene E durch ein Dreieck ABC mit den Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ gegeben, so denke man sich wiederum durch k eine vertikale Hilfsebene gelegt, welche die Dreiecksebene in einer Geraden i schneidet, diese trifft dann die Gerade k in dem gesuchten Punkte $P = k \times i$ (Fig. 52). Die Gerade i, deren Grundriß i' sich mit k' deckt, mag die Seiten a und b in Q und R schneiden, also $Q' = a' \times i'$ und $R' = b' \times i'$, ferner Q'' auf a'' und R'' auf b''. Hiermit ist $i'' = Q''R''$ und auch $P' = i'' \times k'$ gefunden, der zugehörige Grundriß P' liegt senkrecht darunter auf k'. — Die gleiche Konstruktion führt auch zum Ziel, wenn die Ebene E durch zwei parallele Gerade bestimmt ist.

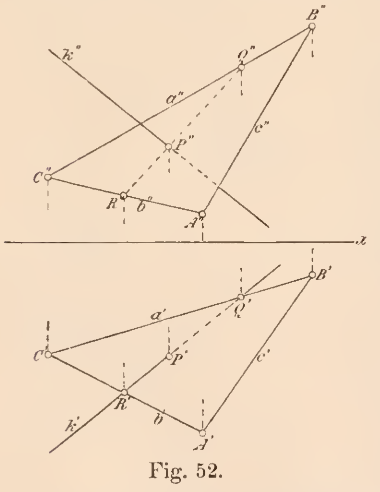


Fig. 52.

62. Auf Grund des soeben erklärten Verfahrens wird auch die Schnittlinie g der Ebenen zweier gegebener Dreiecke ABC und DEF gefunden. Man suche nämlich ganz wie vorher die Schnittpunkte P und Q der Seiten $d = EF$ und $e = DF$ des zweiten Dreiecks mit der Fläche des ersten Dreiecks, dann ist $g'' = P''Q''$ und $g' = P'Q'$ (Fig. 53). — Zur Darstellung des Schnittpunktes dreier Ebenen, $P = \mathsf{A} \times \mathsf{B} \times \Gamma$, konstruiere man zuerst die Schnittlinien $g = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ und $h = \mathsf{B} \times \Gamma$ zweier Ebenenpaare und aus diesen den gemeinsamen Punkt $P = g \times h$ nach einer der angeführten Methoden.

63. Für die Schnittpunkte S und T einer Geraden g mit den beiden Halbierungsebenen H_1 und H_2 mag beiläufig eine einfache Konstruktion angegeben werden, die sich aus den besonderen Eigenschaften der letzteren ergiebt (vergl. 41). Der Grundriß S' und Aufriß S'' liegen auf g' bezw. g'' symmetrisch zur Achse (Fig. 54); hieraus folgt, daß sie der durch $M = G_1G_2 \times x$ gezogenen Normalen zur Achse angehören, was zu ihrer Konstruktion dient. In der That hat man: $S''M : G_2G_2' = G_1''M : G_1''G_2' = G_1S' : G_1G_2' = MS' : G_2G_2'$, d. h. $S''M = MS'$. Die beiden Projektionen T' und T'' von T liegen im Schnittpunkt $g' \times g''$ vereinigt.

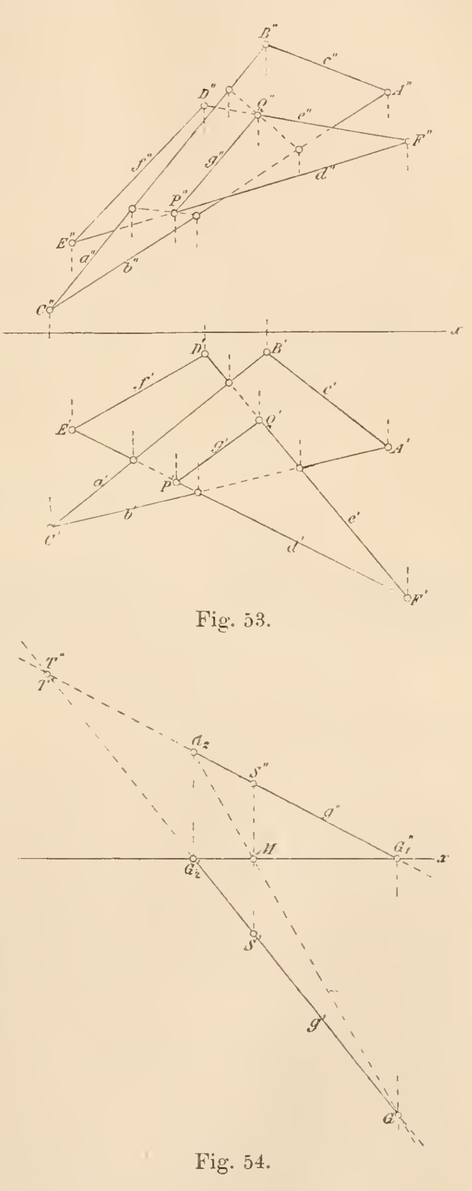
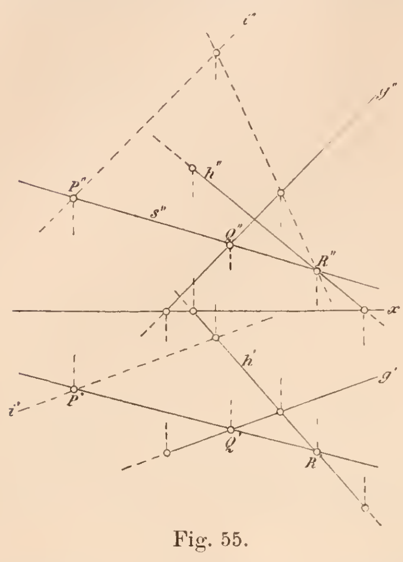


Fig. 53.

Fig. 54.

64. Durch einen Punkt P die gemeinsame Sekante s zweier Geraden g und h zu ziehen. Man konstruiere die Ebene $\mathsf{E} = Pg$, schneide sie mit h in R, dann ist PR die gesuchte Sekante, die auch g in einem Punkte Q schneidet, da sie mit g in der gemeinsamen Ebene E liegt. Bei Ausführung der Konstruktion (Fig. 55) zeichne man zuerst in beiden Projektionen die Parallele i zu g durch P und betrachte E als durch die parallelen Geraden g und i gegeben, so daß der Schnittpunkt $R = h \times gi$ nach 61 konstruiert werden kann. — Ist P ein unendlich ferner

Punkt, d. h. ist die Richtung der gemeinsamen Sekante s von g und h gegeben, so ziehe man in dieser Richtung durch irgend einen Punkt von g eine Gerade i und schneide wiederum die Ebene $\mathsf{E} = gi$ mit h in R. Die durch R gezogene Parallele zu i ist die fragliche gemeinsame Sekante.


Fig. 55.

65. Auf Grund der vorangehenden Entwickelungen kann leicht entschieden werden, ob drei Punkte in einer Geraden oder vier Punkte in einer Ebene liegen, ob drei Ebenen durch eine Gerade oder vier Ebenen durch einen Punkt gehen, ob eine Gerade zu einer Ebene parallel liegt und dergleichen mehr.

Gerade und Ebenen in rechtwinkliger Stellung. Abstände und Winkel. Die Umlegung in eine Tafel und die Drehung um die Parallele zu einer Tafel.

66. Die Grundlage unserer nächsten Entwickelungen bildet folgender Satz:

Ist ein Schenkel eines rechten Winkels zu einer Tafel parallel, so ist auch seine orthogonale Projektion auf dieselbe ein rechter Winkel. Sind nämlich g und h die Schenkel, und ist $g \parallel \Pi_1$ und l das Lot aus dem Scheitel auf Π_1, so ist $g \perp l$; da zugleich $g \perp h$, so ist auch $g \perp hl$ und ebenso $g' \perp hl$, da $g' \parallel g$ ist. Wenn aber g' auf der Ebene hl senkrecht steht, ist sie zu jeder in der Ebene liegenden Geraden rechtwinklig, also auch zu der Geraden $h' = hl \times \Pi_1$. — Offenbar kann der Satz in der allgemeineren Form ausgesprochen werden. Zwei normal zu einander gerichtete (windschiefe oder sich schneidende) Gerade g und h haben zu einander rechtwinklige Projektionen, wenn eine von ihnen zu der betreffenden Projektionsebene parallel ist.

67. Hieraus folgt weiter: Steht eine Gerade g auf einer Ebene E senkrecht, so sind ihre Projektionen zu den gleichnamigen Spuren der Ebene rechtwinklig. Es ist

nämlich g, wie zu allen Geraden der Ebene E, so insbesondere zu ihren Spuren e_1 und e_2 normal, also nach dem vorigen Satze $g' \perp e_1$ und $g'' \perp e_2$.

68. Die in einer Ebene E rechtwinklig zu ihren ersten (zweiten) Hauptlinien gezogenen Geraden werden als erste (zweite) *Falllinien* bezeichnet, insofern sie unter allen Geraden von E die größte Neigung (oder den stärksten Fall) gegen die bezügliche Tafel haben. Die eine Projektion einer Falllinie steht senkrecht auf der gleichnamigen Ebenenspur, was unmittelbar aus dem Satze in 66 folgt.

Dies vorausgeschickt, können wir zur Besprechung der in der Überschrift dieses Abschnittes bezeichneten Fundamentalaufgaben und der zu ihrer Lösung erforderlichen besonderen Methoden übergehen.

69. Das aus einem Punkte P auf eine Ebene E gefällte Lot l wird nach 67 gefunden, indem man seine Projektionen l' und l''

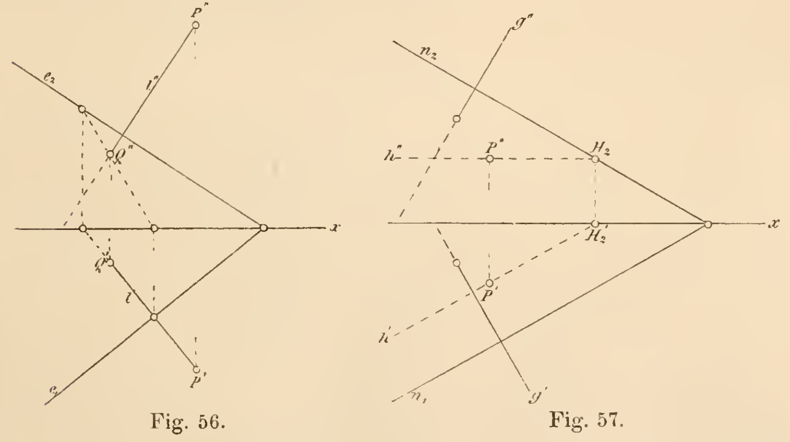


Fig. 56. Fig. 57.

resp. durch P' und P'' und senkrecht zu e_1 und e_2 zieht. Sein Fußpunkt Q ergiebt sich als Schnittpunkt $l \times \mathsf{E}$ nach dem früher (61) entwickelten Verfahren (Fig. 56). Ein anderer Weg zur Darstellung, auf dem man zugleich die Länge des Lotes oder Abstandes $(P \dashv \mathsf{E})$ erhält, findet sich in 75.

70. Die Normalebene N zu einer Geraden g durch einen Punkt P. Die Spurlinien n_1 und n_2 der gesuchten Ebene müssen rechtwinklig zu g' und g'' liegen. Legt man also durch P eine erste Hauptlinie h unserer Ebene, so ist h' durch P' senkrecht zu g' und h'' durch P'' parallel zur Achse zu ziehen. Durch den Spurpunkt H_2 von h geht dann die Spur n_2 und durch $n_2 \times x$ die Spur n_1 ($n_2 \perp g''$, $n_1 \perp g'$) (Fig. 57).

71. Die wahre Länge einer durch ihre Projektionen gegebenen Strecke. Eine Strecke AB bildet mit ihrer ersten Projektion $A'B'$ und den projizierenden Geraden ihrer Endpunkte ein ebenes, bei A' und B' rechtwinkliges Viereck $A'ABB'$. Dieses Trapez kann in der Grundrißebene verzeichnet werden, indem man (Fig. 58) in den Endpunkten von $A'B'$ die Normalen $A'A_0$ und $B'B_0$ errichtet und resp. gleich den ersten Tafelabständen der Punkte A und B, also gleich $A''A_x$ resp. $B''B_x$ macht. Die vierte Seite A_0B_0 giebt die wahre Länge der Strecke AB an. — Das Trapez $A'A_0B_0B'$ stellt eine der beiden Lagen dar, die das Trapez $A'ABB'$ annehmen kann, wenn es durch Drehung um die Grundlinie $A'B'$ in die erste Tafel umgelegt wird. Das geschilderte Verfahren bezeichnet man daher als Umlegung der Strecke in eine Tafel um ihre bezügliche Projektion.

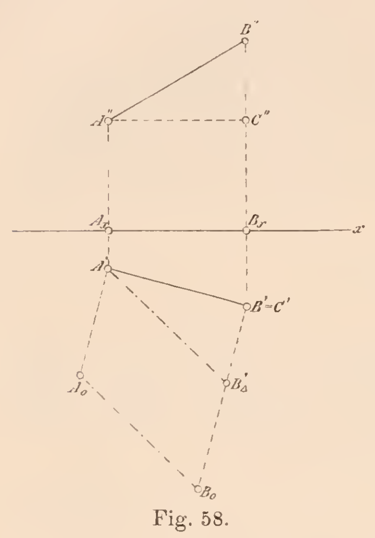


Fig. 58.

72. Wird von einem Endpunkte A der vorgelegten Strecke ein Lot AC auf BB' gefällt, so entsteht das rechtwinklige Dreieck ABC, dessen Hypotenuse die zu bestimmende Strecke ist und dessen Katheten resp. parallel und normal zum Grundriß sind (Fig. 58) ($C' = B'$, $A''C'' \parallel x$). Die Kathete AC erscheint im Grundriß $A'C'$ und die Kathete BC im Aufriß $B''C''$ in wahrer Größe. Trägt man daher an den Grundriß $A'C'$ die Strecke $C'B_\triangle' = C''B''$ unter rechtem Winkel an, so giebt $A'B_\triangle'$ die Streckenlänge an. Das Dreieck $A'B_\triangle'C'$ stellt den Grundriß des durch Drehung um seine horizontale Kathete AC in horizontale Lage gebrachten Dreiecks ABC dar. Unser Verfahren ist also anzusehen als eine Drehung der Strecke bis zum Parallelismus mit einer Tafel und zwar um eine Gerade, die durch einen Endpunkt der Strecke zu ihrer bezw. Projektion parallel läuft.

73. Endlich kann man auch noch folgende dritte Methode in Anwendung bringen. Man trage (Fig. 59) an die Strecke $B''C''$ im Aufriß als andere Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ABC die Strecke $C''A_\triangle'' = B'A'$ horizontal an und ziehe die Hypotenuse $A_\triangle''B''$, welche die gesuchte Strecke darstellt. Das Dreieck $A_\triangle''B''C''$ kann als Aufriß des um seine vertikale Kathete BC zur Aufrißebene

parallel gedrehten Dreiecks ABC angesehen werden. Bei dieser Drehung behalten die Punkte B und C ihre Lagen bei, während der Punkt A einen Kreisbogen $AA_\triangle$ in horizontaler Ebene beschreibt. Der Grundriß $A_\triangle'A'$ dieses Bogens ist also ein kongruenter Bogen und sein Aufriß $A_\triangle''A''$ eine Parallele zur Achse. Nach der Drehung muß die Strecke zu Π_2 parallel sein, also $B'A_\triangle' \parallel x$. Dieses dritte Verfahren führt also eine Drehung der Strecke bis zum Parallelismus mit einer Tafel aus und zwar um das aus einem Endpunkt auf die andere Tafel gefällte Lot. — Bei jedem der drei Verfahren zur Streckenbestimmung hat man die Wahl, ob man vom Grund- oder Aufriß, vom einen oder anderen Endpunkt ausgehen, sowie auch ob man die Drehung im einen oder anderen Sinne vornehmen will.

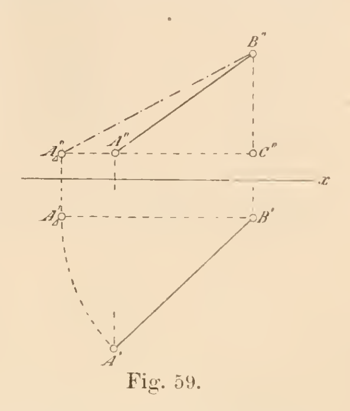


Fig. 59.

74. Die Teilung einer durch ihre Projektion gegebenen Strecke AB nach vorgeschriebenem Verhältnis erfolgt auf Grund des Satzes, daß sich parallele Strecken, also insbesondere die Teilstrecken einer Geraden, wie ihre Projektionen verhalten (vergl. 6 δ). Man teilt demnach die Projektionen $A'B'$ und $A''B''$ in dem verlangten Verhältnis. Handelt es sich darum, auf AB eine Teilstrecke AC von gegebener Länge aufzutragen, so müssen nach einer der in 71—73 gegebenen Methoden die wahre Größe von AB gezeichnet, auf ihr die Strecke AC aufgetragen und durch Zurückdrehung die Projektionen gefunden werden.

75. Die Neigungswinkel γ_1 und γ_2 einer Geraden g gegen die Tafeln. Unter dem Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene versteht man den spitzen Winkel, den sie mit ihrer senkrechten Projektion auf die Ebene einschließt. Man erhält den Winkel $\gamma_1 = \angle\, G_2G_1G_2'$ durch Umlegung der Winkelebene um ihre zweite Spur G_2G_2' in die zweite

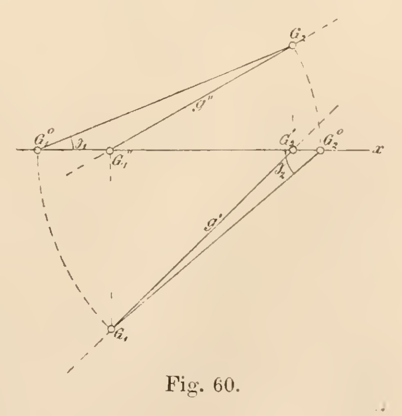


Fig. 60.

Tafel. Hierbei beschreibt der Scheitel G_1 in der Grundrißebene einen Kreisbogen $G_1 G_1^0$ um G_2', der auf der Achse endigt, und es ist $\gamma_1 = \angle\, G_2 G_1^0 G_2'$. Analog findet man den Winkel $\gamma_2 = \angle\, G_1 G_2 G_1''$ durch Umlegen in die erste Tafel als $\angle\, G_1 G_2^0 G_1''$ (Fig. 60). — Unter allen Winkeln, die eine Gerade mit den Geraden einer Ebene einschließt, ist ihr Neigungswinkel gegen dieselbe am kleinsten. Für jede Lage von g ist daher $\gamma_2 \leqq \angle\, G_1 G_2 G_2'$; da andererseits $\angle\, G_1 G_2 G_2' = \angle\, G_1^0 G_2 G_2' = R - \gamma_1$ ist, so folgt für die Summe der Tafelneigungen einer Geraden die Relation: $\gamma_1 + \gamma_2 \leqq R$.

76. Durch einen Punkt P eine Gerade g mit den Neigungswinkeln γ_1 und γ_2 gegen die Tafeln zu legen.

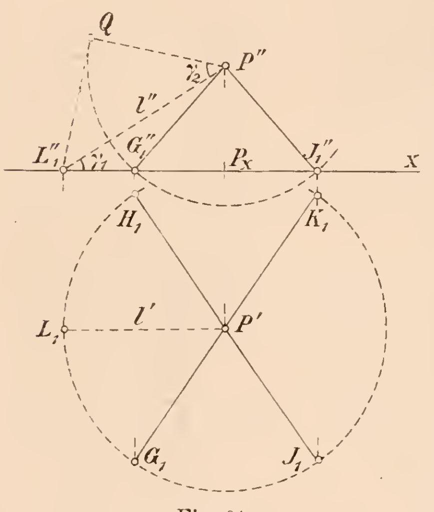


Fig. 61.

Man ziehe zunächst durch P eine Gerade l parallel zur Aufrißebene mit dem Neigungswinkel γ_1 gegen die Grundrißebene. Ist L_1 ihr erster Spurpunkt, so ist also $\angle\, P'' L_1'' P_x = \gamma_1$ und $P' L_1 \parallel x$ (Fig. 61). Dreht man nun l um die Vertikale PP', so behält sie ihren Neigungswinkel γ_1 gegen Π_1 bei, während ihr Spurpunkt L_1 einen Kreisbogen c in Π_1 um P' beschreibt. Insbesondere kann l durch eine solche Drehung in die Lage der gesuchten Geraden g übergeführt werden, deren Spurpunkt G_1 muß also auf dem genannten Kreise c liegen. Hierbei ist er so zu bestimmen, daß der Aufriß von PG_1 die Länge $P'' G_1'' = PG_1 . \cos\gamma_2 = PL_1 . \cos\gamma_2 = P'' L_1'' . \cos\gamma_2$ erhält. Man zeichne demgemäß über $P'' L_1''$ als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete $P'' Q$ mit l'' den Winkel γ_2 einschließt, und schlage um P'' mit dem Radius $P'' Q$ einen Kreisbogen, so schneidet dieser die Achse in G_1''; denn dann ist $P'' G_1'' = P'' Q = P'' L_1'' . \cos\gamma_2$ wie verlangt. Der Spurpunkt G_1 liegt auf c senkrecht unter G_1''. Es giebt offenbar vier Lösungen unserer Aufgabe, nämlich die Geraden g, h, i und k, deren Spurpunkte G_1, H_1, J_1 und K_1 auf dem Kreise c liegen und die Endpunkte zweier in Bezug auf l' symmetrischer Durchmesser bilden. Eine andere Lösung ist in 78 enthalten.

77. Die Neigungswinkel ε_1 und ε_2 einer Ebene E gegen

die Tafeln. Unter dem Neigungswinkel einer Ebene gegen eine der Tafeln wird der Neigungswinkel von irgend einer gleichnamigen Falllinie der Ebene verstanden. Er wird bestimmt, indem man ihn entweder (wie in 75) in die ungleichnamige Tafel, oder um den einen Schenkel in die gleichnamige Tafel umlegt. Um ε_1 zu finden, ziehen wir (Fig. 62) F_1F_2' normal zu e_1 als Grundriß einer ersten Falllinie mit den Spurpunkten F_1 und F_2 und zeichnen nach dem früheren Verfahren $\varepsilon_1 = \angle F_2F_1F_2' = \angle F_2F_1{}^0F_2'$. Um ε_2 zu bestimmen, ziehen wir G_2G_1'' normal zu e_2 als Aufriß einer zweiten Falllinie mit den Spurpunkten G_1 und G_2 und legen das Dreieck $G_1G_2G_1''$ um seine Kathete G_2G_1'' in die Aufrißebene als Dreieck $G_1{}^0G_2G_1''$ um, wodurch $\varepsilon_2 = \angle\, G_1{}^0G_2G_1''$ erhalten wird ($G_1''G_1 = G_1''G_1{}^0$, $G_1''G_1{}^0 \perp G_1''G_2$). — Daß unter allen Geraden einer Ebene die Falllinien gegen die zugehörige Tafel den größten Neigungswinkel haben, ist schon oben (68) erwähnt worden. Erwägt man, daß der Neigungswinkel einer Ebene durch den gleichnamigen Neigungswinkel der Ebenennormale zu einem Rechten ergänzt wird, so folgt aus 75 für die Summe der Tafelneigungen einer Ebene die Beziehung: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqq R$.

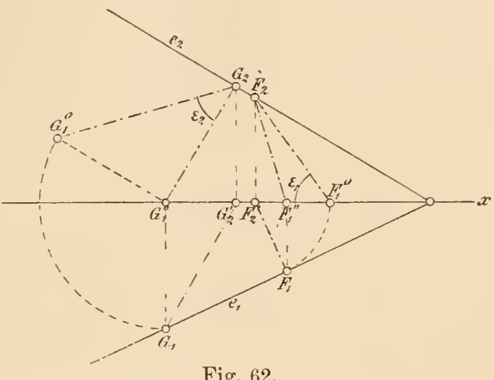


Fig. 62.

78. Eine Ebene E mit den Neigungswinkeln ε_1 und ε_2 durch einen gegebenen Punkt P zu legen. Durch einen Punkt A der Achse denken wir uns eine Gerade AB von beliebig gewählter Länge senkrecht zu E gezogen; sie besitzt die Neigungswinkel $\gamma_1 = R - \varepsilon_1$ und $\gamma_2 = R - \varepsilon_2$. Nun ziehen wir durch A senkrecht zur Achse zwei Gerade p und q, von denen die erste der Grundriß-, die zweite der Aufrißebene angehört (Fig. 63).

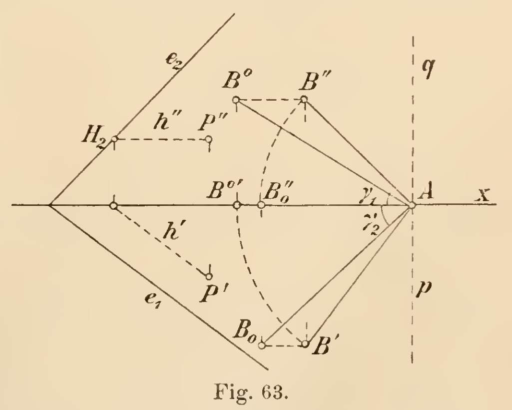


Fig. 63.

Legen wir jetzt AB um p als Strecke AB_0 in die Ebene Π_1 um und ebenso um q als Strecke AB^0 in die Ebene Π_2, so schließen AB_0 und AB^0 mit der Achse die Winkel γ_2 resp. γ_1 ein ($AB^0 = AB_0$). Beim Rückwärtsdrehen von AB_0 um p in die Raumlage AB beschreibt B_0 einen Kreisbogen, sein Aufriß einen dazu kongruenten Kreisbogen und sein Grundriß eine Parallele zur Achse. Beim Rückwärtsdrehen von AB^0 um q in die Raumlage AB beschreiben B^0 und sein Grundriß kongruente Kreisbogen und sein Aufriß eine Parallele zur Achse. So ergeben sich B' und B'' als Schnittpunkte von je einem Kreisbogen und einer Parallelen zur Achse. (Es giebt wieder vier Lösungen wie in 76, die zu der in der Figur gezeichneten Lösung symmetrisch in Bezug auf die Tafelebenen sind.)

Die Spuren e_1 und e_2 der gesuchten Ebene sind senkrecht zu AB' und AB''. Zeichnet man eine in E liegende erste Hauptlinie h durch P und ihren Spurpunkt H_2 ($h'' \parallel x$ durch P'', $h' \perp AB'$ durch P'), so ist nur noch e_2 durch H_2 normal zu AB'' und e_1 durch $e_2 \times x$ normal zu AB' zu ziehen.

79. Der senkrechte Abstand eines Punktes P von einer Ebene E kann nach 69 in Verbindung mit 71 bestimmt werden. Ebenso einfach ist folgender Weg. Ist $l = PQ$ das gesuchte Lot, so lege man durch dasselbe eine Ebene N senkrecht zu Π_2 (Fig. 64). Dann ist ihre Spur $n_2 = l''$ normal zu e_2 und ihre Spur n_1 normal zur Achse (n_2 durch P'', $n_1 \times n_2 = N$ auf x). Diese Ebene N steht auf e_2 senkrecht und schneidet E in einer Falllinie F_2F_1 ($F_2 = n_2 \times e_2$ und $F_1 = n_1 \times e_1$), die ebenfalls zu dem gesuchten Lot rechtwinklig ist. Legt man also N um die Spur n_2 in Π_2 um, so gelangt die Falllinie in die

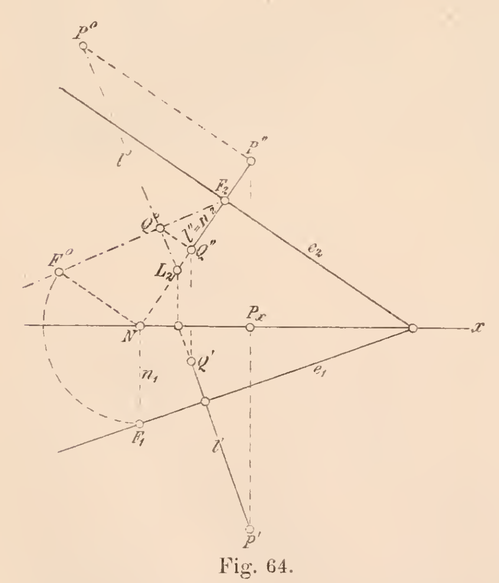


Fig. 64.

Lage $F_1{}^0F_2$ und P in die Lage P^0 ($NF_1{}^0 \perp n_2$ und $= NF_1$, $P^0P'' \perp n_2$ und $= P'P_x$). Jetzt ziehe man die Gerade $l^0 \perp F_1{}^0F_2$, welche auf der letzteren den Punkt Q^0 und auf n_2 den Spurpunkt L_2 aus-

schneidet. Aus der Umlegung Q^0 des Fußpunktes Q findet man rückwärts Q'' auf l'' durch eine zu n_2 normale Gerade Q^0Q'' und hieraus Q'. P^0Q^0 ist die wahre Länge des Abstandes.

80. Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur durch Umlegung in eine der Tafeln. Eine ebene Figur und ihre Projektion auf eine Tafel sind affin und in affiner Lage und bleiben es auch, wenn die erstere um die bezügliche Spur ihrer Ebene (d. i. um ihre Affinitätsachse) in die Tafel umgelegt wird (vergl. 10). Durch Benutzung dieses Umstandes werden die zur Umlegung nötigen Operationen vereinfacht. Es sei beispielsweise ein Dreieck ABC durch die Spuren e_1 und e_2 seiner Ebene E und seinen Aufriß $A''B''C''$ gegeben, woraus sich der Grundriß in bekannter Weise ergiebt (Fig. 65). Zur Ermittelung seiner wahren Gestalt lege man das Dreieck um e_2 in die Aufrißebene um. Man denke sich in E durch den Punkt A eine Falllinie f gezogen ($f' \perp e_2$, $f'' \perp e_2$). Diese lege man, um zunächst ihre Länge zwischen den Spurpunkten F_1 und F_2 zu finden, wie in voriger Nummer um f'' seitwärts in die Aufrißebene nieder als $f_0 = F_2F_{10}$; sodann lege man sie um e_2 in Π_2 um als $f^0 = F_2F_1{}^0$. Hieraus ergiebt sich die Umlegung $e_1{}^0 = E_xF_1{}^0$ von e_1. Die Umlegung $A^0B^0C^0$ des Dreiecks ABC aber kann als die affine Figur zu $A''B''C''$ gezeichnet werden, da man außer der Affinitätsachse e_2 zwei einander entsprechende Punkte $F_1{}^0$ und $F_1{}''$ kennt (vergl. 11); die Affinitätsstrahlen sind normal zu e_2. So ist $B^0B'' \perp e_2$ und die Parallelen durch B'' und B^0 resp. zu x und $e_1{}^0$ treffen sich in einem Punkte von e_2; denn bei unserer Affinität

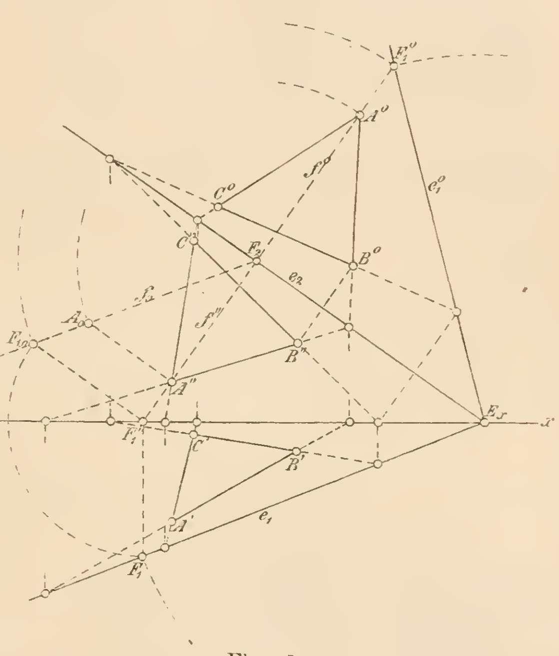


Fig. 65.

entsprechen sich der Aufriß der Spur e_1, d. h. die Achse x und ihre Umlegung e_1^0. Ferner schneiden sich $B''C''$ und B^0C^0 auf e_2 und treffen x resp. e_1^0 in entsprechenden Punkten u. s. f. — Man kann die Umlegung eines jeden Punktes auch mittels seines Abstandes von der Drehachse e_2 konstruieren, indem man den Umstand benutzt, daß sich dieser Abstand zu seiner Projektion jedesmal wie $F_{10}F_2$ zu $F_1''F_2$ verhält. So schneidet eine Parallele zu e_2 durch B'' auf f_0 die wahre Länge des Abstandes $(B \dashv e_2)$ ab.

Die oben ausgeführte Umlegung der Falllinie f und ihres Spurpunktes F_1 um e_2 nach f^0 und F_1^0 in die Aufrißebene läßt sich durch folgende Überlegung noch einfacher gestalten. Der Abstand des Punktes F_1 von E_x erscheint sowohl im Grundriß als auch in der Umlegung in wahrer Länge, also $F_1E_x = F_1^0E_x$. Deshalb liegt F_1^0 sowohl auf einem Kreis mit dem Centrum E_x und dem Radius E_xF_1, als auch auf einer durch F_1'' senkrecht zu e_2 gezogenen Geraden.

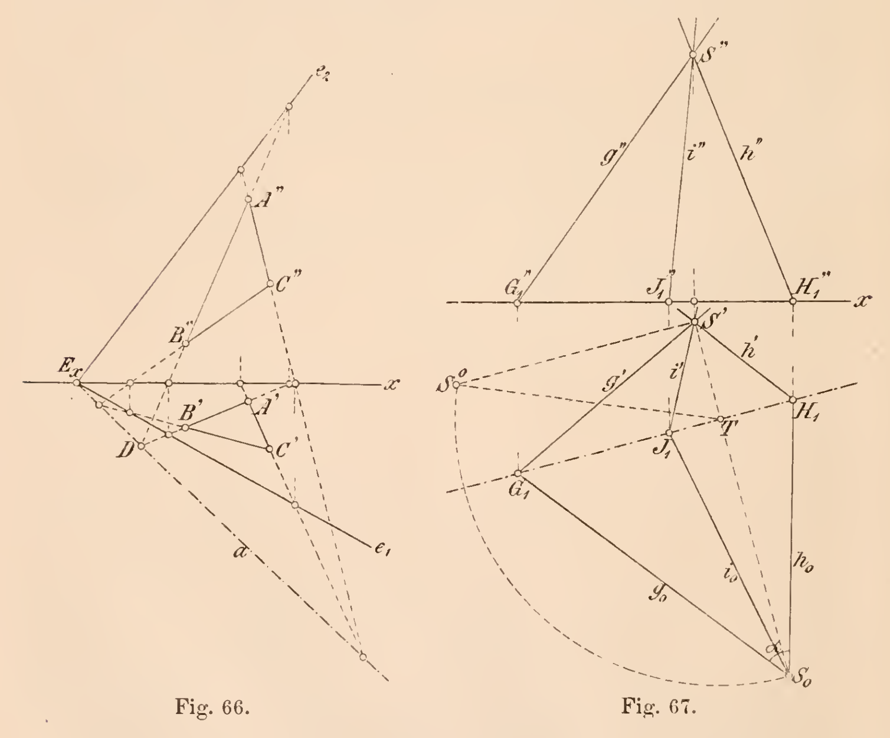


Fig. 66. Fig. 67.

81. Affinität zwischen Grund- und Aufriß einer ebenen Figur. Die beiden Projektionen einer ebenen Figur sind affin und befinden sich nach der Umlegung der einen Tafel in die andere in

affiner Lage. In der That sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte parallel, nämlich senkrecht zur Achse; sie bilden die Affinitätsstrahlen; andererseits fallen Grund- und Aufriß der Geraden, in welcher die Ebene E der betrachteten Figur von der zweiten Halbierungsebene H_2 geschnitten wird, in eine Gerade a (Fig. 66) zusammen; dies ist die Affinitätsachse. Die Gerade a geht durch den Achsenschnittpunkt E_x von E; einen zweiten Punkt auf ihr liefert der Durchschnitt D der beiden Projektionen von irgend einer in E gezogenen Geraden (vergl. 64). — Hiernach kann die Affinität benutzt werden, um von einer in gegebener Ebene liegenden Figur aus einer Projektion die andere abzuleiten (wie dies in unserer Figur für das Dreieck ABC ausgeführt ist).

82. Der Winkel α zweier durch ihre Projektionen gegebenen Geraden g und h. Man kann annehmen, daß beide Gerade sich in einem Punkte S schneiden (indem man nötigenfalls die eine durch eine Parallele ersetzt). Den Scheitel S lege man um die Verbindungslinie der Spurpunkte der Schenkel in eine Tafel um, z. B. durch Drehung um G_1H_1 (Fig. 67). Der niedergelegte Punkt S_0 findet sich auf der aus S' zur Drehachse gezogenen Normalen $S'T$, und seine Entfernung S_0T von dieser ist nach früherem gleich S^0T, wo $S^0S'T$ das um die Kathete $S'T$ in den Grundriß umgelegte Dreieck $SS'T$ bedeutet $\left(S^0S' = (S'' \dashv x)\right)$. Dann ist $\alpha = \angle\, G_1S_0H_1$.

Die Halbierung des Winkels α kann nur nach seiner Darstellung in wahrer Größe gefunden werden. Die umgelegte Halbierungslinie i_0 schneidet auf der Drehachse den ersten Spurpunkt J_1 aus, woraus sich dann i' und i'' ergeben.

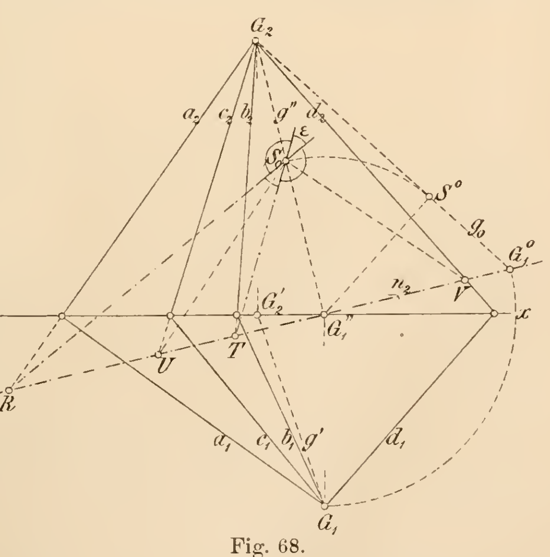


Fig. 68.

83. Um den Winkel ε zweier durch ihre Spuren gegebenen Ebenen A und B zu finden, zeichnen wir zunächst ihre Schnittlinie g mit ihren Spurpunkten $G_1 = a_1 \times b_1$ und $G_2 = a_2 \times b_2$ (Fig. 68). Eine

Normalebene N zu g schneidet A und B in den Schenkeln und g in dem Scheitel S des gesuchten Winkels ε. Die zweite Spur n_2 von N ist senkrecht zu g'' und wir ziehen sie etwa durch G_1''; dann sind $R = n_2 \times a_2$ und $T = n_2 \times b_2$ die Spurpunkte der Schenkel. Legen wir jetzt den Winkel $\varepsilon = \angle RST$ um n_2 in die Aufrißebene nieder, so gelangt sein Scheitel S in eine bestimmte Lage S_0 auf g'', denn $S_0 S''$ muß senkrecht zur Drehachse n_2 sein. Dabei ist $G_1''S$ das von G_1'' auf g gefällte Lot und $G_1''S_0$ ist seine wahre Länge. Diese finden wir, indem wir g um g'' in die Aufrißebene als g^0 umlegen und von G_1'' das Lot $G_1''S^0$ auf g^0 fällen ($G_1''G_1{}^0 = G_1''G_1$, $G_1{}^0$ auf $n_2 \perp g''$). Schließlich ist $\angle RS_0T$ der gesuchte Winkel oder dessen Nebenwinkel.

Um die zu A und B gehörigen Winkelhalbierungsebenen Γ und Δ zu bestimmen, schneide man n_2 mit den beiden Geraden, die den umgelegten Winkel ε und seinen Nebenwinkel halbieren, in den Punkten U und V; es sind dies die zweiten Spurpunkte der Winkelhalbierenden von ε und seinem Nebenwinkel. Da die gesuchten Ebenen je eine dieser Geraden enthalten müssen, so ist $c_2 = G_2U$ und $d_2 = G_2V$, während c_1 und d_1 aus G_1 nach ihren Schnittpunkten mit der Achse zu ziehen sind.

Der Winkel zweier Ebenen ist dem von ihren Normalen eingeschlossenen gleich. Man kann daher von einem beliebigen Punkte die Lote auf diese Ebene fällen und deren Winkel nach 82 bestimmen.

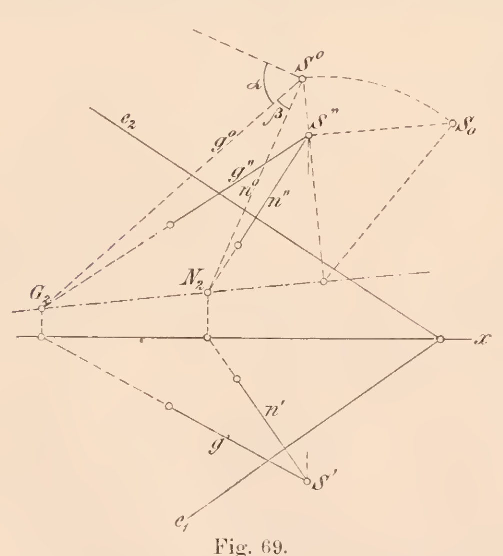


Fig. 69.

84. Der Neigungswinkel α einer Geraden g gegen eine Ebene E ergänzt den Winkel zwischen g und der Ebenennormale zu einem Rechten. Man fälle daher aus irgend einem Punkte S von g auf E ein Lot n und bestimme die wahre Größe des Winkels $\beta = \angle gn$ nach dem in 82 dargelegten Verfahren (Fig. 69). Zu diesem Zweck lege man etwa S um die Verbindungslinie G_2N_2 der zweiten Spurpunkte

von g und n in die zweite Tafel um. Mit β ist auch der Winkel $\alpha = R - \beta$ bekannt.

85. Die Bestimmung der wahren Gestalt eines in beiden Projektionen gegebenen Dreiecks ABC durch Paralleldrehung seiner Ebene zu einer Tafel. Man schneide die Dreiecksebene mit einer zur Aufrißtafel parallelen Hilfsebene Π in der Hauptlinie $a = DE$, die als Achse der Drehung dienen soll. Die Paralleldrehung zu Π_2 kann man dann als Umlegung um a in die Ebene Π auffassen. Der Aufriß des gedrehten Dreiecks $A_\triangle B_\triangle C_\triangle$ wird seine wahre Gestalt zeigen, der Grundriß in die Gerade a' fallen (Fig. 70). Der Eckpunkt A beschreibt einen Kreisbogen, dessen Ebene auf a normal steht und dessen Aufriß folglich in die zu a'' senkrechte Gerade $A''G''$ fällt. Der Radius dieses Bogens ist das von A auf a gefällte Lot AG und bildet die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit

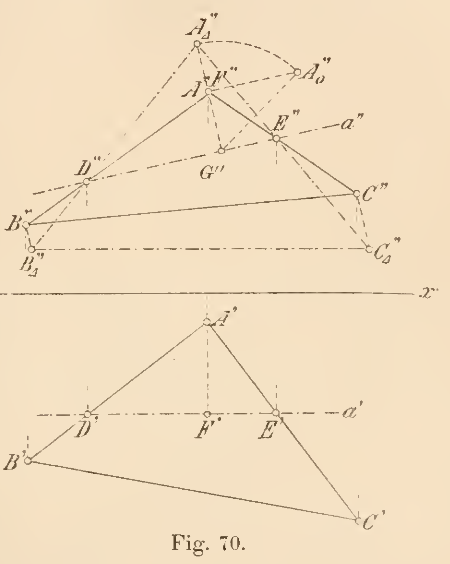


Fig. 70.

den Katheten $AF = (A \dashv \Pi)$ und $FG = (F \dashv a)$; erstere erscheint mit ihrer wahren Länge im Grundriß $A'F'$, letztere im Aufriß $F''G''$ ($A'F' \perp a'$, $F''G'' \perp a''$, $F'' = A''$). Dieses rechtwinklige Dreieck AFG sowie die Bahnkurve $AA_\triangle$ des Punktes A zeichnen wir, um FG in die Hilfsebene Π umgelegt, im Aufriß als Dreieck $A_0''F''G''$ und Kreisbogen $A_0''A_\triangle''$. Da man nun $A_\triangle''$ kennt, kann die weitere Konstruktion mit Benutzung der Affinität erfolgen; a'' ist die Affinitätsachse und $A_\triangle''$ und A'' sind ein Paar entsprechender affiner Punkte ($A''B'' \times A_\triangle''B_\triangle''$ auf a'', $B''B_\triangle'' \perp a''$).

Nach dem auseinandergesetzten Verfahren kann die wahre Gestalt jeder durch ihre Projektionen gegebenen ebenen Figur ermittelt werden.

86. Der senkrechte Abstand eines Punktes P von einer Geraden g. P und g seien durch ihre Projektionen gegeben. Ein erster Weg zur Ermittelung des Abstandes $PQ = (P \dashv g)$ ist folgender. Man bestimme mittels zweier Hauptlinien h_1 und h_2

die Normalebene N zu g, welche den Punkt P enthält, indem man als Projektionen von h_1 und h_2 durch P' resp. P'' je eine Parallele zur Achse und eine Normale zur gleichnamigen Projektion von g zieht (Fig. 71). Hierauf schneide man N mit g nach dem in 61 erklärten Verfahren in Q und bestimme die wahre Länge von $PQ = (P \dashv g)$ nach der in 73 angeführten Methode als $P_\triangle{}'Q'$.

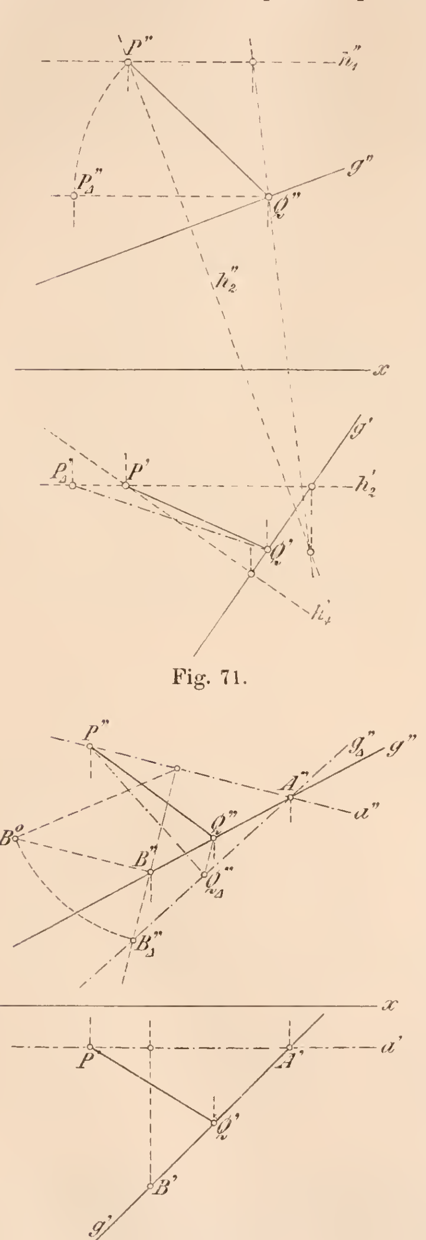


Fig. 71.

Fig. 72.

Wir geben eine zweite Lösung der vorigen Aufgabe an, welche auf der in 85 entwickelten Methode beruht. P und g liegen in einer Ebene, die wir um eine Achse a parallel zum Aufriß drehen. Als Drehachse a diene die zweite Hauptlinie durch $P\,(a' \parallel x)$, welche die Gerade g im Punkte A trifft (Fig. 72). Um dieselbe werde die Gerade g und mit ihr das von P auf sie gefällte Lot PQ gedreht, bis sie zum Aufriß parallel werden. Die gedrehte Gerade $g_\triangle$ und das gedrehte Lot $PQ_\triangle$ erscheinen im Aufriß zu einander rechtwinklig und letzteres in wahrer Länge. Die Drehung selbst wird an einem auf g beliebig gewählten Punkte B (genau wie in 85) vorgenommen, hierauf $g_\triangle'' = A''B_\triangle''$ und senkrecht dazu $P''Q_\triangle''$ gezogen. Q'' findet man durch Zurückdrehen in die ursprüngliche Lage, wobei der von Q beschriebene Kreisbogen sich als Senkrechte zu a'' projiziert. Aus dem Aufriß ergiebt sich der Grundriß Q' und die beiden Projektionen von PQ.

87. Das in 79 angegebene Verfahren, um Lote auf eine durch ihre Spurlinien gegebene Ebene zu fällen, läßt sich umgekehrt anwenden, um auf ihr die Normale in einem ihrer Punkte zu errichten. Wir führen gegenwärtig eine Modifikation desselben an, die zur Errichtung einer Normalen von gegebener Länge l auf einer Dreiecksebene in vorgeschriebenem Punkte P dient. Man denke sich durch P parallel zur Aufrißebene eine Hilfsebene Π gelegt und zeichne die Hauptlinie h, die sie aus der Dreiecksebene ABC ausschneidet (Fig. 73). Ferner denke man sich zu h eine Normalebene N durch P, welche ABC in einer Falllinie f schneidet; es wird dann $f'' \perp h''$ sein. Die gesuchte Normale liegt in N und steht auf f senkrecht. Man drehe also die Ebene N um ihre in Π liegende Hilfsspur n, bis sie mit Π zur Deckung kommt; dabei ist zu beachten, daß der Grundriß n' dieser Hilfsspur mit h', der Aufriß n'' mit f'' zusammenfällt. Man erhält zuerst durch Drehung eines Punktes der Falllinie, etwa F auf AB, die Lage von $F_\triangle''$ und von $f_\triangle''$ $(F''F_\triangle'' = (F' \dashv n'))$, sodann den Aufriß der gedachten Normalen $l_\triangle''$ $(\perp f_\triangle'')$, dem die Länge $l = P''Q_\triangle''$ zu erteilen ist. Beim Zurückdrehen um n beschreibt der Aufriß des Endpunktes die Strecke $Q_\triangle''Q''$; senkrecht unter Q'' und um dieselbe Strecke von n' entfernt findet man Q'. Hierbei ist zu erwägen, daß F und Q in der Ebene N auf verschiedenen Seiten von n liegen, wie man aus der gedrehten Ebene erkennt, und daß deshalb auch F' und Q' im Grundriß auf verschiedenen Seiten von n' liegen müssen. — Die zu PQ entgegengesetzt gerichtete Normale sei PR, R liegt mit F auf der nämlichen Seite von n und ebenso müssen sich ihre Grundrisse R' und F' in Bezug auf n' verhalten.

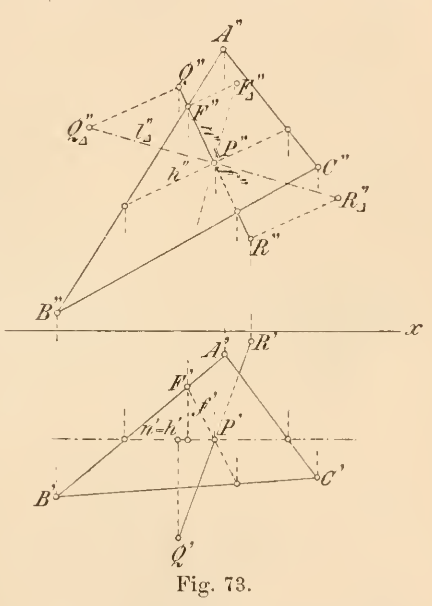


Fig. 73.

88. Für spätere Anwendungen ist die Lösung der Aufgabe von Wichtigkeit: einen Punkt P um eine Tafelparallele a durch einen gegebenen Winkel ω zu drehen. Durch die Achse a, die

man etwa zur Aufrißtafel parallel nehmen mag, lege man eine vertikale Hilfsebene Π und durch P eine Ebene N normal zu a, welche die Bahnlinie dieses Punktes enthält. N schneidet in Π die Hilfsspur n aus ($n'' \perp a''$, $n' = a'$) (Fig. 74). Eine Seitenansicht, die man durch Umlegen von N in Π gewinnt, zeigt die Bahnlinie in ihrer wahren Gestalt, nämlich als den um $Q'' = n'' \times a''$ durch die Seitenansicht P^0 von P beschriebenen Kreisbogen. Trägt man daher an $Q''P^0$ in vorgeschriebenem Drehungssinne den Winkel $\omega = \angle\ P^0Q''P_\triangle{}^0$ an, so ist $P_\triangle{}^0$ die Seitenansicht des gedrehten Punktes. Hieraus ergiebt sich der Aufriß $P_\triangle{}''$, wenn $P_\triangle{}^0 P_\triangle{}''$ normal zu n'' gezogen, und der Grundriß $P_\triangle{}'$, wenn sein Abstand von a' derselben Strecke gleichgemacht wird. Diese letzten Operationen entsprechen dem Wiederaufrichten der umgelegten Ebene N.

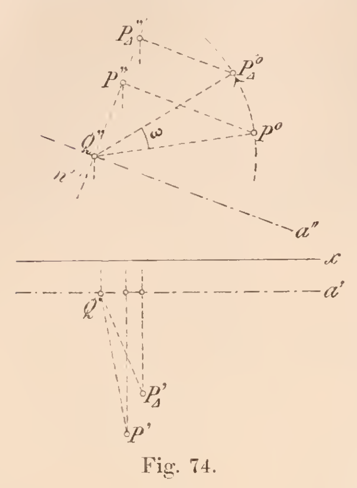


Fig. 74.

89. Der kürzeste Abstand zweier wiederschiefen Geraden ist diejenige Strecke, die auf beiden senkrecht steht. Es werde durch die eine Gerade g eine Parallelebene E zur anderen h gelegt, dann h auf E senkrecht projiziert und g mit dieser Projektion im Punkte P geschnitten. Errichtet man schließlich in P die Normale auf E, so trifft sie h in einem Punkte Q und PQ ist der gesuchte Abstand. In der That, alle Punkte von h haben von E einerlei senkrechten Abstand $d = PQ$,

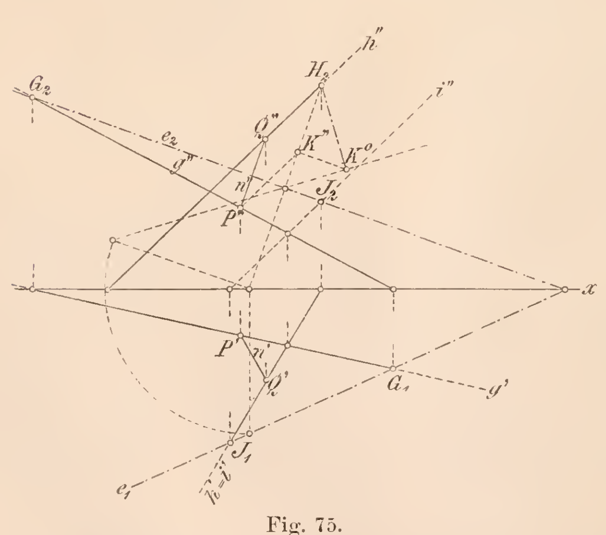


Fig. 75.

folglich kann kein Punkt von h um weniger als die Strecke d von g entfernt sein.

Aus dieser Überlegung ergiebt sich folgende Konstruktion (Fig. 75). Man ziehe durch einen Punkt von g die Gerade i parallel zu h etwa so, daß i' mit h' zusammenfällt, und zeichne die Spurlinien e_1 und e_2 der Ebene $\mathsf{E} = g\,i$. Aus einem auf h beliebig angenommenen Punkte — in der Figur ist der Spurpunkt H_2 benutzt — fälle man sodann das Lot auf E nach dem in 79 gegebenen Verfahren. Man lege nämlich durch H_2 eine Ebene senkrecht zu e_2, welche E in einer Falllinie schneidet; diese lege man um die zweite Spur der letztgenannten Ebene um und fälle von H_2 das Lot H_2K^0 auf sie, was von der Länge des kürzesten Abstandes d ist. Hieraus folgt dann auch der Aufriß H_2K'' und damit der Aufriß $P''Q''$ des gesuchten gemeinsamen Lotes, das mit jenem parallel und gleich lang ist ($K''P'' \parallel h''$, P'' auf g'', $P''Q'' \perp e_2$). Aus P'' und Q'' ergeben sich die Grundrisse P' und Q' auf g' und h' und man hat zu beachten, daß $P'Q'$ zur ersten Spur e_1 normal sein muß.

90. Die gemeinsame Normale zweier zu einer Tafel, etwa zu Π_2, parallelen Geraden liegt zu dieser senkrecht; ihr Aufriß reduziert sich demgemäß auf den Schnittpunkt der zweiten Projektionen, während ihr Grundriß direkt den kürzesten Abstand angiebt. Wir erhalten daher eine zweite Lösung unserer Aufgabe, wenn wir durch Drehung den Parallelismus der Geraden g und h zur Aufrißtafel herbeiführen. — Man ziehe, wie oben, durch den Punkt G von g die Parallele i zu h (Fig. 76) und hierauf eine in der Ebene $g\,i$ liegende, zur Aufrißtafel parallele Drehachse a. Um diese sind die gegebenen Geraden zu drehen, bis g und i, und folglich auch h zu

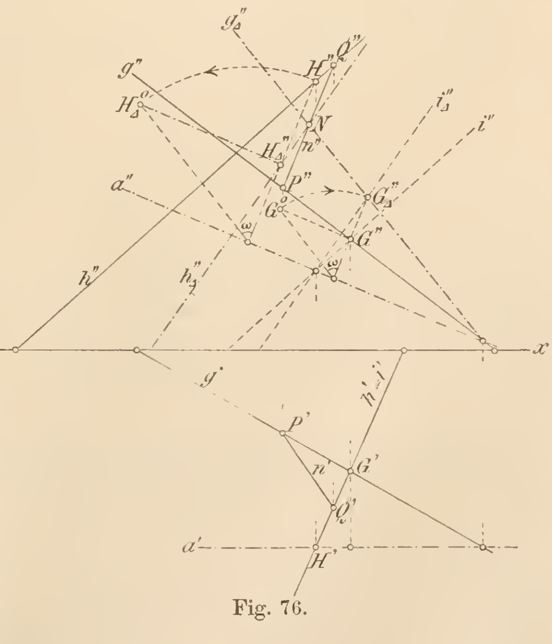


Fig. 76.

Π_2 parallel werden. Die gedrehten Elemente bezeichne der Index $_\triangle$, die erforderlichen Seitenrisse (vergl. 88) der obere Index ^{0}. Zunächst wird G in die Lage $G_\triangle$ gedreht $\big(G^0G'' \parallel a'' \perp G_\triangle'' G'',\ G^0 G'' = (G' \dashv a')\big)$; man erhält so $G_\triangle''$, $g_\triangle''$ und $i_\triangle''$. Der Seitenriß $G^0 G_\triangle''$ der Bahnlinie von G ergiebt den Drehwinkel ω. Hierauf drehen wir einen Punkt von h, am einfachsten den vertikal über der Drehachse a gelegenen Punkt H, um den gleichen Winkel ω und in gleichem Sinne. Im zugehörigen Seitenriß geht H'' in die Lage $H_\triangle{}^0$ über, wobei der beschriebene Bogen wieder zum Winkel ω gehört. In der Figur ist der letztere Seitenriß durch eine Umlegung im umgekehrten Sinne hergestellt, so daß die zu den Winkeln ω gehörigen Bogen entgegengesetzten Drehsinn haben; das bietet den Vorteil, daß die Schenkel der Winkel ω parallel werden. Die Strecke $H_\triangle{}^0 H_\triangle''$ giebt die kürzeste Entfernung d an. Ferner ergiebt sich $h_\triangle''$ durch $H_\triangle''$ und parallel zu $i_\triangle''$, sowie der Aufriß $N = g_\triangle'' \times h_\triangle''$ der gemeinsamen Normalen n nach der Drehung. Beim Zurückdrehen bewegt sich der Aufriß eines jeden Punktes von n auf der durch N gelegten Senkrechten zu a''; folglich findet man auf ihr $n'' = P''Q''$ und hier aus $n' = P'Q'$.

91. Wir führen noch eine dritte Lösung desselben Problems an, um dadurch die Bedeutung verschiedener Methoden hervortreten zu lassen. Wiederum ziehen wir durch einen Punkt von g eine Parallele i zu h, etwa so, daß $i' = h'$ wird, und zeichnen dann die Spur $e_1 = J_1 G_1$ der Ebene $\mathsf{E} = ig$. Hierauf wählen wir eine Ebene Π_3 senkrecht zu e_1, die wir als Seitenrißebene benutzen und um ihre Spur y in die Grundrißebene niederlegen (Fig. 77). Im Seitenriß konstruieren wir nun $g''' = i'''$ und $h''' \parallel i'''$ und fällen von einem Punkte A von h das Lot AC auf E. Dieses Lot ist gleich der Länge des gesuchten kürzesten Abstandes d und erscheint im Seitenriß $A'''C'''$ in wahrer Größe und normal zu g''', während sein Grundriß $A'C'$ zu e_1 senkrecht ist. In der Figur fällt A' mit $B' = g' \times h'$ zusammen ($B = g \times i$). Zuletzt verschieben wir $A'C'$ parallel mit sich selbst in der Richtung von h', bis der eine Endpunkt auf g' gelangt, indes der andere auf h' bleibt. Die so erhaltene Strecke $P'Q'$ stellt den Grundriß des gesuchten kürzesten Abstandes von g und h dar, woraus der Aufriß unmittelbar folgt. Der hier verwendete Seitenriß läßt sich entbehren, wenn man die Figur einer gewissen Drehung unterwirft. Man drehe nämlich g und h um die vertikale Achse a, welche die Geraden in B und A resp. schneidet, deren Grundriß also $A' = B' = g' \times h'$ ist, und zwar richte man die Drehung so ein, daß die gedrehte Ebene $\mathsf{E} = gi$ senkrecht zu Π_2, d. h. ihre

Spur $e_{1\triangle}$ senkrecht zur Axe x wird. Dann verbindet der Aufriß $g_\triangle''$ der gedrehten Geraden $g_\triangle$ den Punkt B'' mit $e_{1\triangle} \times x$, und das von A auf die gedrehte Ebene E gefällte Lot hat den Aufriß $A''C_\triangle''$ und erscheint in wahrer Länge, da $AC_\triangle$ parallel zu Π_2 ist. Aus dem gleichen Grunde ist $(C_\triangle \dashv a'') = (C_\triangle \dashv a)$; weil aber $C_\triangle$ seinen Ab-

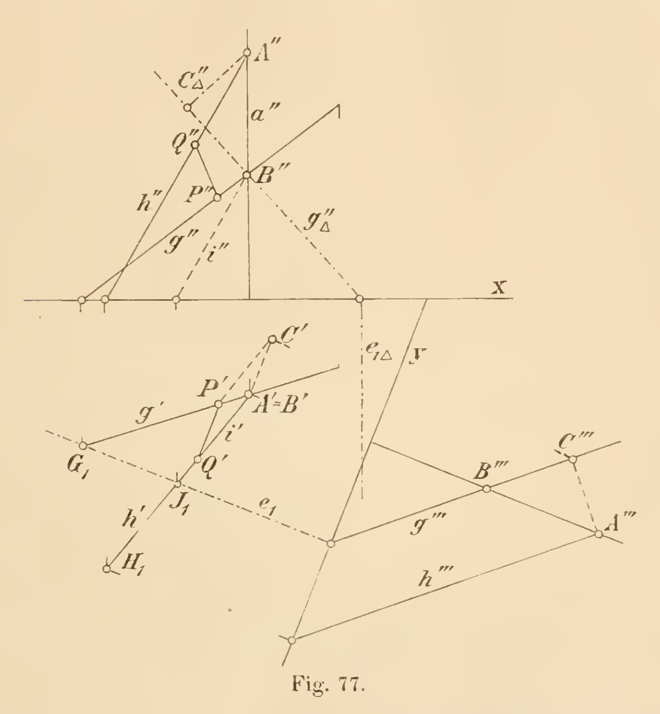


Fig. 77.

stand von a bei der Rückwärtsdrehung nicht ändert, hat man $C'A'$ senkrecht zu e_1 zu ziehen und $= (C_\triangle'' \dashv a'')$ zu machen. Jetzt verschiebt man wieder $A'C'$ wie vorher und erhält zunächst den Grundriß $P'Q'$ und sodann den Aufriß $P''Q''$.

Lösung verschiedener stereometrischer Aufgaben durch Projektionsmethoden.

Wir wenden im Folgenden die bisher entwickelten Methoden der Projektion auf eine Reihe einfacher stereometrischer Probleme an, deren Lösung in späteren Untersuchungen von Nutzen sein wird. Zu diesem Zwecke aber bedarf es der Feststellung einiger Vorbegriffe.

92. Dreht sich eine Gerade g um eine sie schneidende feste Achse a, so beschreibt sie eine Fläche, die man als Rotations-

kegel oder geraden Kreiskegel bezeichnet. Der Schnittpunkt $S = g \times a$ heißt die Spitze, die Linie a die Achse des Kegels, die auf ihm liegenden Geraden seine Erzeugenden oder Mantellinien (Kanten). Die vollständige Fläche besteht aus zwei in der Spitze zusammenhängenden Teilen oder Mänteln, die man auch durch die Benennung als Kegel und Gegenkegel unterscheidet. Jede zur Achse a senkrechte Ebene schneidet den Kegel in einem Kreise. Eine durch die Spitze gelegte Ebene hat mit dem Kegel zwei Mantellinien, eine oder keine Mantellinie gemein, je nachdem ihre Spurlinie in irgend einer Normalebene zur Achse den bezüglichen Spurkreis des Kegels in zwei Punkten schneidet, in einem Punkte berührt, oder gar nicht trifft. Eine Ebene, die mit dem Kegel nur eine Erzeugende gemein hat, heißt Berührungs- oder Tangentialebene und die fragliche Erzeugende ihre Berührungslinie. Ist k der Spurkreis des Kegels in einer beliebigen Normalebene zur Achse a (siehe die schiefe Ansicht in Fig. 78), M sein Mittelpunkt und T sein Berührungspunkt mit der Spurlinie t der Ebene T, welche den Kegel längs der Erzeugenden $g = ST$ berührt, so ist sowohl MT als auch $a = MS$ zu t rechtwinklig. Folglich ist die Ebene MST, welche die Achse a mit der Berührungslinie g verbindet, zu t und zur Tangentialebene T normal. Ein aus einem Achsenpunkt auf g gefälltes Lot, wie MN oder PQ, liegt in MST und steht daher auf der Tangentialebene T senkrecht. Umgekehrt liegt der Fußpunkt eines jeden aus einem Achsenpunkt auf die Tangentialebene T gefällten Lotes auf ihrer Berührungslinie g.

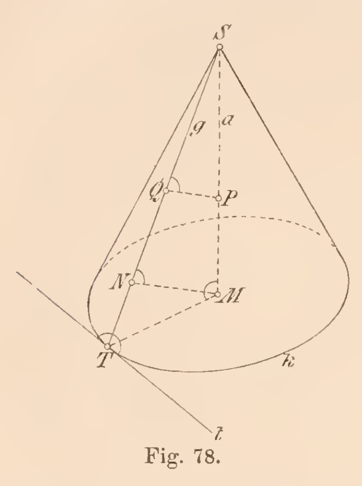


Fig. 78.

93. Ein vollständiger Rotationskegel wird von einer um seine Spitze beschriebenen Kugel in zwei gleich großen Kreisen geschnitten. Zwei Rotationskegel mit gemeinsamer Spitze haben im allgemeinen vier Erzeugende gemein. Denn eine um die gemeinsame Spitze beschriebene Kugel schneidet aus jedem der beiden Kegel ein Paar Kreise aus und jeder Kreis des einen Paares schneidet jeden Kreis des anderen Paares in zwei Punkten (als Kreise auf der nämlichen Kugelfläche). Es entstehen so acht Schnittpunkte, die sich paarweise diametral gegenüberliegen und so

vier gemeinsame Erzeugende liefern. Diese vier Geraden können paarweise in je eine Berührungslinie der Kegel zusammenrücken, bezw. in Wegfall kommen.

94. Denkt man sich durch die Spitze S eines Rotationskegels $\mathfrak{K}$ zu jeder Berührungsebene T eine Normale g_1 gezogen, so erzeugen diese einen zweiten um dieselbe Achse a beschriebenen (koaxialen) Rotationskegel $\mathfrak{K}_1$, den sogenannten Polarkegel. Legt man umgekehrt in der Mantellinie g_1 an den Polarkegel die Tangentialebene T_1 und zieht durch die Spitze S eine Normale g zu ihr, so ist g eine Mantellinie des ursprünglichen Kegels und T die zugehörige Tangentialebene. Ist nämlich g die Berührungslinie von T, so ist die Ebene ga normal zu T, folglich enthält die Ebene ga auch die Gerade g_1 (als Normale von T) und zwar sind g und g_1 rechtwinklig. Die Ebene T_1 steht aber auf der Ebene gag_1 senkrecht und die auf ihr errichtete Normale fällt demnach mit g zusammen. Die Beziehung zwischen einem Kegel und seinem Polarkegel ist umkehrbar, die Erzeugenden eines jeden sind die Normalen zu den Tangentialebenen des anderen.

Den gemeinsamen Erzeugenden zweier Rotationskegel mit gemeinsamer Spitze entsprechen die gemeinsamen Tangentialebenen ihrer Polarkegel. Hieraus folgt: zwei Rotationskegel mit gemeinsamer Spitze haben im allgemeinen vier gemeinsame Berührungsebenen. Im besonderen kann ihre Zahl sich vermindern, indem sie paarweise zusammenfallen oder ganz fortfallen.

95. Dreht sich eine Gerade g um eine zu ihr parallele feste Achse a, so beschreibt sie einen Rotationscylinder, oder geraden Kreiscylinder, den man auch als Rotationskegel mit unendlich ferner Spitze auffassen kann. Die auf ihm liegenden Geraden heißen wieder Erzeugende oder Mantellinien und a die Achse des Cylinders. Alle Ebenen normal zur Achse schneiden den Cylinder in gleich großen Kreisen. Eine Parallelebene zur Achse des Cylinders schneidet ihn entweder in zwei Mantellinien, oder berührt ihn längs einer Mantellinie, oder hat keine mit ihm gemein. Eine gegen die Achse geneigte Ebene schneidet den Cylinder in einer Kurve, die zu dem Kreise des Normalschnittes affin ist, also in einer Ellipse. Zwei Rotationscylinder mit parallelen Achsen haben entweder zwei getrennte, oder zwei vereinte, oder keine Erzeugende gemein.

96. Es mag daran erinnert werden, daß, ebenso wie die Punkte einer Kugel, auch ihre Tangenten und Tangentialebenen, da sie

normal zu den Radien nach ihren Berührungspunkten stehen, einerlei Abstand vom Centrum haben.

Analog haben die Punkte, Tangenten und Tangentialebenen eines Rotationscylinders einerlei senkrechten Abstand von seiner Achse. Denn jede Tangentialebene steht senkrecht auf der Ebene, die durch ihre Berührungslinie und die Achse gelegt wird; ihr Abstand von der Achse ist also gleich dem der Mantellinien von der Achse. Jede Tangente des Cylinders liegt in einer Tangentialebene, ihr Berührungspunkt auf deren Berührungslinie; der kürzeste Abstand einer Tangente von der Achse ist also gleich dem der sie enthaltenden Tangentialebene von der Achse, sein Endpunkt auf der Tangente ist ihr Berührungspunkt.

Der geometrische Ort aller Geraden, die man durch einen Punkt S unter gegebenem Neigungswinkel γ gegen eine Ebene E, mithin unter dem Winkel $(R - \gamma)$ gegen das von S auf E gefällte Lot a ziehen kann, ist der durch Rotation des Winkels $(R - \gamma)$ um seinen Schenkel a erzeugte Kegel mit seiner Spitze S. Der vom Kegel auf E ausgeschnittene Kreis mag als der zur Spitze S und zum Winkel γ gehörige Neigungskreis jener Ebene bezeichnet werden; sein Centrum ist der Fußpunkt des von S auf E gefällten Lotes, er enthält die Spurpunkte der oben definierten Geraden. — Den in Rede stehenden Kegel müssen andererseits alle durch S unter dem Neigungswinkel γ gegen E (oder dem Winkel $(R - \gamma)$ gegen a) gelegten Ebenen berühren, weil der Neigungswinkel einer Tangentialebene des Kegels gegen seine Achse mit dem ihrer Berührungslinie identisch ist. Die Spurlinien der fraglichen Ebenen in E berühren sonach den Neigungskreis.

97. Gerade von gegebener Tafelneigung in gegebener Ebene. Es sollen die Geraden durch einen Punkt P in der Ebene E dargestellt werden, welche mit Π_1 den Winkel γ_1 bilden. Damit die Aufgabe Lösungen habe, darf γ_1 nicht größer als die erste Tafelneigung von E sein; ist dies der Fall, so genügen ihr zwei Gerade g und h. Sie erscheinen als Schnittlinien der Ebene E mit einem Rotationskegel, dessen Spitze P, dessen Achse PP' ist und dessen Mantellinien mit ihr den Winkel $(R - \gamma_1)$ einschließen (Fig. 79). Wir zeichnen zunächst die zu Π_2 parallele Mantellinie PQ des Kegels, deren Aufriß $P''Q''$ die Achse x unter dem Winkel γ_1 in Q'' schneidet. Dann geht sein in Π_1 liegender Spurkreis k durch Q und hat den Punkt P zum Centrum; er schneidet e_1 in den Spurpunkten G_1 und H_1 der gesuchten Geraden. — Berührt e_1 den Neigungskreis k, so fallen g und h in eine Falllinie von E zusammen.

98. Ebenen von gegebener Tafelneigung durch eine gegebene Gerade. Durch eine Gerade g mögen die Ebenen gelegt werden, welche mit Π_1 den Winkel ε_1 einschließen, was nur möglich ist, wenn ε_1 nicht kleiner als die erste Tafelneigung von g ist. Man wähle auf g irgend einen Punkt (Fig. 80), etwa den zweiten Spurpunkt G_2, als Spitze eines Kegels und das von ihm auf Π_1 gefällte Lot $G_2 G_2'$ als seine Achse. Seine in der Aufrißebene liegende Mantellinie schneidet x unter dem Winkel ε_1. Dann geht der Spurkreis k des Kegels durch den (auf x liegenden) Spurpunkt der verzeichneten Mantellinie und G_2' ist sein Centrum. (Ist der auf g gewählte Punkt beliebig, so zeichne man die zu Π_2 parallele Mantellinie, deren Aufriß mit x den Winkel ε_1 bildet). Die von G_1 an k gelegten Tangenten d_1 und e_1 sind die ersten Spurlinien der gesuchten Ebenen, deren zweite Spuren durch G_2 gehen. In der That berühren diese Ebenen den genannten Kegel, besitzen also die gleiche Tafelneigung ε_1 gegen Π_1 wie seine Mantellinien.

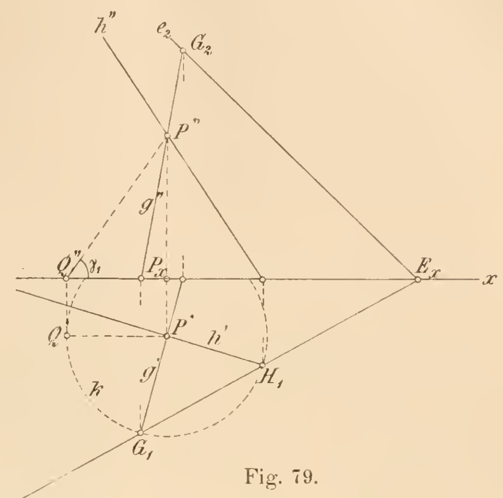
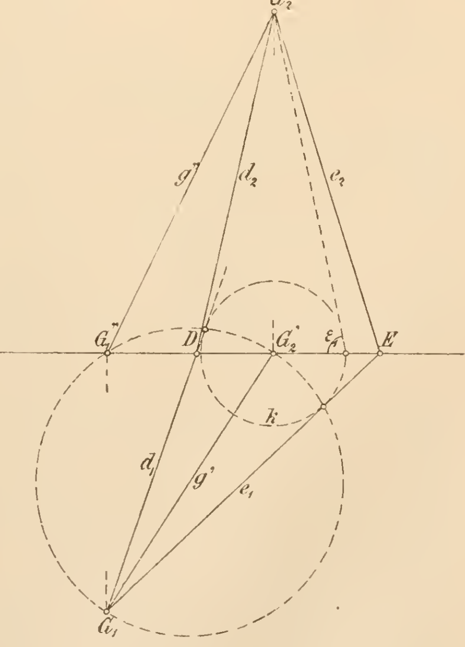


Fig. 79.



99. Die Schnittlinien zweier Rotationskegel mit gemeinsamer Spitze. Sind a und b die Achsen der beiden Kegel, die sich in der

gemeinsamen Spitze S schneiden, so lege man sie mit ihrer Ebene um die zugehörige erste Spurlinie in die Grundrißebene nieder. Dann bestimme man für diese Lage der Achsen die gesuchten Schnittlinien und führe schließlich die der vorher genannten Niederlegung entgegengesetzte Bewegung aus (nach 82 u. 88). Dadurch gelangen die Achsen a und b wieder in ihre ursprüngliche Lage und zugleich nehmen die gefundenen Schnittlinien eine Lage ein, in der sie die Lösung der ursprünglich gestellten Aufgabe darstellen. Wir behandeln hier nur den Fall, wo die Achsen a und b in Π_1 liegen (Fig. 81), so daß Π_1 die Kegel $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ in je zwei Erzeugenden. K_1K_3, K_2K_4 und L_1L_3, L_2L_4 schneidet. Eine um den Punkt S als Centrum beschriebene Kugel, die Π_1 in einem Kreise c schneidet, hat mit den Kegeln je zwei Kreise gemein, deren Ebenen resp. zu a und b normal sind. Diese Kreise projizieren sich deshalb als gerade Linien K_1K_2 und K_3K_4, resp. L_1L_2 und L_3L_4, und die Schnittpunkte A', B', C', D' der letzteren sind die Projektionen von je zwei symmetrisch zu Π_1 liegenden Schnittpunkten A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 der ersteren. Den Abstand des einzelnen Schnittpunktes von der Grundrißebene (nach oben oder unten) entnimmt man aus der Umlegung eines der

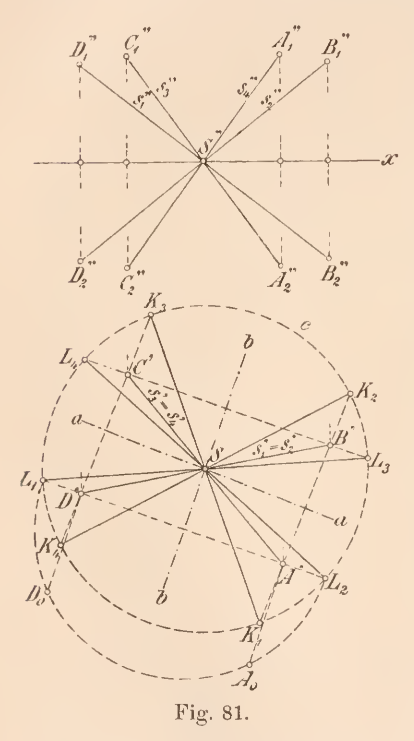


Fig. 81.

beiden ihn enthaltenden Kreise um seinen in Π_1 liegenden Durchmesser. Daraus ergiebt sich dann sofort der Aufriß des fraglichen Punktes $(A_0A' = (A_1'' \dashv x)$ u. s. w.), sowie die Aufrisse $A_1''C_2''$, $A_2''C_1''$, $B_1''D_2''$, $B_2''D_1''$ der gesuchten Schnittlinien und ihre paarweise sich deckenden Grundrisse $A'C'$ und $B'D'$. — Je nachdem die vier Ecken des Parallelogramms $A'B'C'D'$ alle vier innerhalb, oder außerhalb, oder teils inner-, teils außerhalb liegen, besitzen die beiden Kegel vier, keine oder zwei gemeinsame Erzeugenden. Fallen zwei gegenüberliegende Ecken auf den Kreis c, so berühren sich die Kegel in einer in Π_1 gelegenen Mantellinie.

100. Die gemeinsamen Tangentialebenen zweier Rotationskegel mit gemeinsamer Spitze. Wir nehmen wiederum die Kegelachsen a und b in Π_1 an; als Erzeugende der Kegel $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ seien SK_1, SK_2 und SL_1, SL_2 in Π_1 gegeben (Fig. 82). Es genügt, die Konstruktion für eine der vier im allgemeinen möglichen

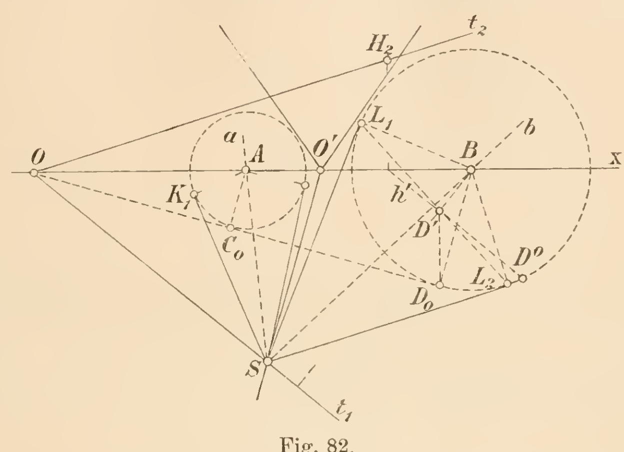


Fig. 82.

gemeinsamen Berührungsebenen der Kegel $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ durchzuführen, da sich die übrigen ganz ebenso zeichnen lassen.

Wir wählen auf a und b willkürlich zwei Punkte A und B, etwa die Schnittpunkte mit der Achse x, und denken uns aus ihnen auf die gesuchte Berührungsebene T die Lote AC und BD gefällt, deren Fußpunkte C und D auf den Berührungslinien liegen (vergl. 92). Die Verbindungslinie CD, die mit den parallelen Loten in einer Ebene liegt, trifft die Achse x in einem Punkte O. Durch O geht auch die um x in Π_1 umgelegte Gerade C_0D_0, die man in folgender Weise bestimmt. Alle von A auf die Mantellinien des Kegels $\mathfrak{K}$ gefällten Lote sind gleich, also $AK_1 = AC = AC_0$ $(AK_1 \perp SK_1)$, und da $AC \perp CO$ ist, ist auch $AC_0 \perp C_0O$. Ganz ebenso findet man $BL_1 = BD = BD_0$ und $BD_0 \perp OD_0$, so daß die Gerade OC_0D_0 die beiden Kreise berührt, welche um die Punkte A resp. B mit den Radien AK_1 resp. BL_1 beschrieben sind. Demnach ist O ein Ähnlichkeitspunkt dieser beiden Kreise (vergl. 4) und $OS = t_1$ die erste Spurlinie der gesuchten Ebene T. Die Fußpunkte aller aus B auf die Mantellinien des Kegels $\mathfrak{L}$ gefällten Lote liegen auf einem Kreise, dessen Projektion mit seinem in Π_1 liegenden Durchmesser L_1L_2 zusammenfällt. Auf diesem findet man daher auch den zu D gehörigen Grundriß $D'(D_0D' \perp x,\ BD' \perp t_1)$ und durch Umlegen des

rechtwinkligen Dreiecks $DD'B$ um eine Kathete $D'B$ den Tafelabstand $DD' = D^0D'$ des Punktes D ($D^0D' \parallel t_1$, D^0 auf dem Kreis). Die Hauptlinie $h (\parallel t_1)$ durch D hat den gleichen Tafelabstand, also liegt ihr zweiter Spurpunkt H_2 senkrecht über $h' \times x$ im Abstand D^0D'. Damit ist die zweite Spur $t_2 = OH_2$ von T gefunden.

Symmetrisch zu T in Bezug auf Π_1 liegt eine zweite gemeinsame Tangentialebene; ihre erste Spur ist wieder t_1, während ihre zweite Spur mit x den gleichen Winkel bildet wie t_2. Ist O' der andere Ähnlichkeitspunkt der beiden um A und B beschriebenen Kreise, so ist $O'S$ die gemeinsame erste Spur zweier weiterer Tangentialebenen, die wiederum zu Π_1 symmetrisch sind. Ihre zweiten Spuren sind in der Figur eingetragen, jedoch ohne Konstruktion.

Die gegebenen Kegel haben nur dann vier verschiedene Tangentialebenen gemein, wenn die Linien OS und $O'S$ beide außerhalb derselben liegen. Umschließen die Kegelflächen eine dieser Linien, oder beide, so kommen zwei resp. vier gemeinsame Tangentialebenen in Wegfall. Den Übergang bilden die Fälle, wo die gegebenen Kegel einander längs einer Mantellinie berühren, die dann in Π_1 liegen muß.

Es mag noch erwähnt werden, daß die Bestimmung der gemeinsamen Tangentialebenen zweier Rotationskegel mit derselben Spitze auch auf die der gemeinsamen Erzeugenden ihrer Polarkegel zurückgeführt werden kann (vergl. 94).

101. Das in 99 gegebene Verfahren läßt sich, natürlich mit gewissen Abkürzungen, auf die schon in 76 behandelte Aufgabe anwenden: die Geraden durch einen gegebenen Punkt P mit den Neigungswinkeln γ_1 und γ_2 gegen die Tafeln zu ziehen. Die zum gegebenen Punkt P und den gegebenen Winkeln γ_1 und γ_2 in Π_1 und Π_2 gehörigen Neigungskreise k_1 und k_2 bestimmen zwei Rotationskegel mit der Spitze P, deren gemeinsame Erzeugende die Lösungen des Problems bilden. Die Achsen PP' und PP'' dieser Kegel liegen in einer zur Projektionsachse x senkrechten Ebene Π_3, die als Seitenrißebene zu benutzen ist. Damit nimmt die Aufgabe, was die Darstellung der dritten Projektionen der gesuchten Geraden betrifft, dieselbe Form, wie in 99 für die ersten Projektionen an. Zur Auffindung der ersten und zweiten Projektionen dient hier die Bemerkung, daß die bezüglichen Spurpunkte auf den Neigungskreisen k_1 und k_2 liegen.

102. Die in 78 erledigte Aufgabe: durch einen Punkt P die Ebenen mit den gegebenen Tafelneigungen ε_1 und ε_2 zu legen, kann auch nach der in 100 dargelegten Methode be-

handelt werden. Diese Ebenen müssen die beiden Kegel gleichzeitig berühren, welche durch den Punkt P als Spitze und die zu ihr und zu den Winkeln ε_1 und ε_2 in Π_1 und Π_2 gehörigen Neigungskreise k_1 und k_2 bestimmt sind. Man benutze wiederum die durch P gelegte Seitenrißebene Π_3. Hat man in ihr, wie in 100 für Π_1, die paarweise zusammenfallenden dritten Ebenenspuren gefunden, so hat man aus ihren Schnittpunkten mit den Nebenachsen y und z nur noch die Tangenten an die Kreise k_1 und k_2 zu legen; diese sind die ersten und zweiten Spuren der gesuchten Ebenen. — Man kann die Aufgabe auch auf die in 99 gelöste zurückführen, indem man zuerst die Geraden durch P konstruiert, welche die Tafelneigungen $(R - \varepsilon_1)$ und $(R - \varepsilon_2)$ haben und zu ihnen die Normalebenen durch P legt.

103. Um die Geraden darzustellen, welche zwei gegebene windschiefe Gerade k und i unter gegebenen Winkeln α und β schneiden, suche man zuerst die Richtungen derselben auf die folgende Art. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt S auf k eine Parallele l zu i. Die Schnittlinien der Kegel $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, die durch Rotation des Winkels α um den Schenkel k und des Winkels β um den Schenkel l erzeugt werden, wenn die Scheitel dieser Winkel in S vereinigt liegen, geben die fraglichen Richtungen an. Man lege daher k und l in Π_1 um die Spur ihrer Ebene nieder (oder drehe sie zu Π_1 parallel), wende zur Bestimmung der gemeinsamen Mantellinien der mitgedrehten Kegel das Verfahren in 99 an und drehe hierauf zurück. Schließlich lege man durch k und i parallel zu einer der gefundenen Richtungen zwei Ebenen, die sich dann in einer der gesuchten gemeinsamen Sekanten von k und i schneiden.

104. In ähnlicher Weise erhält man die Ebenen durch einen gegebenen Punkt P, die mit zwei gegebenen Geraden k und i gegebene Neigungswinkel α und β einschließen. Auch diese Aufgabe hat, wie die vorangehenden, im allgemeinen vier Lösungen. Ist wiederum l eine Parallele zu i, welche k schneidet, und sind $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ die wie vorher bestimmten Kegel, so geben ihre gemeinsamen Tangentialebenen die Stellungen an, welche die unserer Aufgabe genügenden Ebenen haben. Letztere sind also durch P parallel zu jenen zu ziehen. Statt aber die fraglichen Berührungsebenen nach 100 zu bestimmen, empfiehlt es sich hier, die Polarkegel von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ miteinander zu schneiden und zu ihren gemeinsamen Erzeugenden durch P die Normalebenen zu legen. Man gelangt so kürzer zum Ziele.

105. Es sei die Aufgabe gestellt: in einer gegebenen Ebene E eine Gerade zu ziehen, die von zwei festen Punkten P und Q des Raumes vorgeschriebene Abstände p und q hat. Man denke sich um P und Q resp. mit den Radien p und q je eine Kugel beschrieben. Die gesuchten Geraden sind dann die in E liegenden gemeinsamen Tangenten beider Kugeln, oder — was dasselbe besagt — sie sind die gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise m und n, welche E aus jenen Kugeln ausschneidet. Man erkennt hieraus, daß die Aufgabe keine Lösung besitzen kann, falls eine der beiden Kugeln die Ebene E nicht schneidet, daß sie aber — abgesehen von diesem Falle — keine, vier oder zwei Lösungen besitzt, je nachdem einer der beiden Kreise den anderen einschließt, oder beide sich gegenseitig ausschließen, oder sich schneiden. Man führt die Konstruktion am besten mit Hilfe einer Seitenrißebene Π_3 durch, die normal zur ersten Spur e_1 von E ist (Fig. 83). Man zeichne die Seitenrisse P''' und Q''', sowie die Seitenrißspur e_3; letztere erhält man mittels einer Hauptlinie h $(h' \| e_1)$, durch deren Spurpunkt H_3 sie geht $\big((H_3 \dashv y) = (H_2 \dashv x)\big)$. Nun fälle man von P und Q auf E die Lote PM und QN, und schlage um ihre Fußpunkte M und N resp. die Kreise m und n. Um die Durchmesser dieser Kreise zu bestimmen, lege man durch P und Q Ebenen parallel zu Π_3; sie schneiden die bezw. Kugeln in größten Kreisen und die Ebene E in Falllinien; auf diesen werden durch die letztgenannten Kreise die obengenannten Durchmesser AB und CD ausgeschnitten. Alle diese Dinge stellen sich in Π_3 in wahrer Größe dar. Die gemeinsamen Tangenten von m

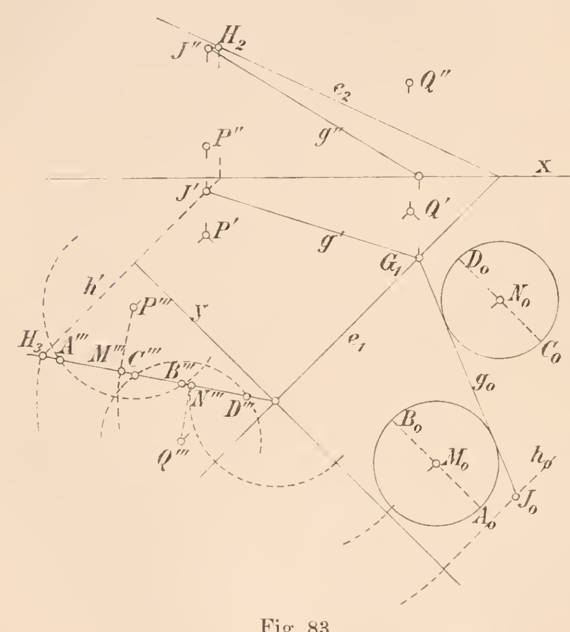


Fig. 83.

und n findet man, indem man zunächst in der um e_1 in den Grundriß niedergelegten Ebene E die gemeinsamen Tangenten an m_0 und n_0 zeichnet. Man suche M_0, A_0 und B_0 auf der umgelegten Falllinie, deren Verlängerung durch P' geht, und ebenso N_0, C_0 und D_0 auf der umgelegten Falllinie, deren Verlängerung durch Q' geht. Dann kann man m_0 und n_0 und ihre gemeinsamen Tangenten, von denen g_0 in der Figur eine ist, unmittelbar zeichnen. Daraus ergiebt sich g' als Verbindungslinie des Spurpunktes $G_1 = g_0 \times e_1$ mit dem zu $J_0 = g_0 \times h_0$ gehörigen Grundriß J' und hieraus sofort g''.

106. Durch einen Punkt P die Geraden zu legen, die in Bezug auf zwei gegebene Gerade a und b die vorgeschriebenen kürzesten Abstände p und q besitzen. Alle Geraden, die in Bezug auf a den kürzesten Abstand p aufweisen, berühren nach 96 einen Rotationscylinder $\mathfrak{K}$ mit der Achse a, dessen Normalschnitt ein Kreis vom Radius p ist. Ganz ebenso müssen die gesuchten Geraden einen Rotationscylinder $\mathfrak{L}$ mit der Achse b berühren, dessen Normalschnitt ein Kreis vom Radius q ist. Man lege demgemäß durch P zwei Tangentialebenen, eine an den Cylinder $\mathfrak{K}$ und eine an den Cylinder $\mathfrak{L}$; ihre gemeinsame Schnittlinie ist eine von den gesuchten Geraden. Es giebt offenbar vier Lösungen unserer Aufgabe, da man von P aus sowohl an $\mathfrak{K}$ als auch an $\mathfrak{L}$ je zwei Tangentialebenen legen kann. Hieraus erkennt man auch, daß die Konstruktion nur dann, aber auch immer dann möglich ist, wenn die Abstände des Punktes P von den Geraden a und b größer als p und q respektive sind.

Die eigentliche Konstruktion gestaltet sich, wie folgt. Alle Tangentialebenen an den Cylinder $\mathfrak{K}$ sind zu seiner Achse a parallel; die beiden durch P gehenden Tangentialebenen enthalten demnach eine Gerade c, die durch P parallel zu a gezogen wird. Legt man ferner durch P eine Normalebene zu a, so schneidet diese a in einem Punkte M und $\mathfrak{K}$ in einem Kreise m mit dem Centrum M und dem Radius p. Jede der beiden aus P an m gezogenen Tangenten bestimmt mit c zusammen eine der gemeinten Tangentialebenen an $\mathfrak{K}$. Legt man ebenso durch P eine Normalebene zu b, welche b in N und den Cylinder $\mathfrak{L}$ in einem Kreise n schneidet, so gehören die aus P an den Kreis n gelegten Tangenten zwei Tangentialebenen des Cylinders $\mathfrak{L}$ an, die außerdem eine Parallele d zu b durch P enthalten. Die Schnittlinien der letzteren und ersteren Tangentialebenen stellen die Lösungen unseres Problems dar.

Die Normalebene zu a bestimmt man durch zwei Hauptlinien g und h ($g' \| x$, $h'' \| x$, $g'' \perp a''$, $h' \perp a'$), die durch P gezogen sind, sucht ihren Schnittpunkt M mit a und dreht sie um g parallel zur Aufrißebene nach 85. Gelangt hierbei M nach $M_\triangle$, so schlage man um diesen Punkt mit dem Radius p den Kreis $m_\triangle$ und lege aus P zwei Tangenten $t_\triangle$ und $u_\triangle$ an ihn; durch Zurückdrehen gewinnt man die Tangenten t und u. Man kann dazu die Affinität benutzen, für welche g'' die Achse ist und $M_\triangle$ und M'' ein Paar entsprechender Punkte sind; t'' und u'' stellen die zu $t_\triangle$ und $u_\triangle$ affinen Geraden dar. Ihre Grundrisse ergeben sich ebenfalls nach 85. In gleicher Weise konstruiere man v'', w'' und v', w' als die Projektionen der aus P an den Kreis n gelegten Tangenten. Zuletzt schneide man die Ebenen ct und cu mit den Ebenen dv und dw, was die vier Lösungen liefert.

107. Ein Dreieck ABC, dessen erste Projektion gegeben ist, soll so bestimmt werden, daß seine zweite Projektion einem gegebenen Dreieck $A_1B_1C_1$ ähnlich wird. Die Aufgabe läßt die Lage des Dreiecks ABC insofern unbestimmt, als eine Parallelverschiebung desselben in der Richtung senkrecht zu Π_1 belanglos ist. Man darf daher den ersten Tafelabstand eines Eckpunktes, etwa A, willkürlich fixieren, indem man A'' auf der durch A' senkrecht zur Achse x gezogenen Geraden irgendwie wählt.

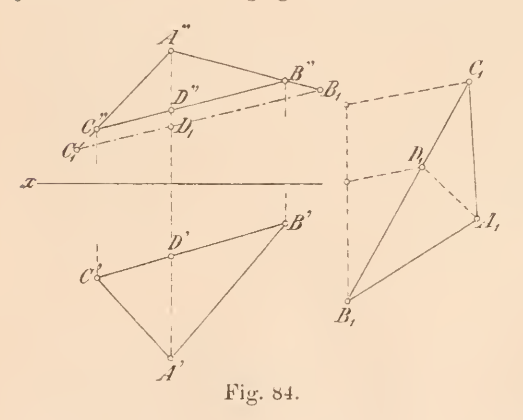


Fig. 84.

Diese Gerade teile $B'C'$ im Punkte D' (Fig. 84), die entsprechende Strecke $B''C''$ im Punkte D''; dann muß $B''D'' : D''C'' = B'D' : D'C'$ sein. Entspricht ferner im Dreieck $A_1B_1C_1$ dem Punkte D'' der Punkt D_1, so hat man wegen der vorausgesetzten Ähnlichkeit: $B_1D_1 : D_1C_1 = B''D'' : D''C''$. Man teile daher die Seite B_1C_1 durch den Punkt D_1 im Verhältnis $B'D' : D'C'$, zeichne sodann $\triangle A_1B_1C_1$ in solcher Lage, daß A_1 sich mit A'' deckt, D_1 auf $A'A''$ und die Punkte B' und B_1 auf dieselbe Seite von $A'A''$ zu liegen kommen. Zuletzt schneide man die Geraden $A''B_1$ und $A''C_1$ mit den Vertikalen durch B' und C' in B'' und C'', womit der Aufriß $A''B''C''$ des gesuchten Dreiecks gefunden ist.

108. Ein Dreieck, dessen zweite Projektion $A''B''C''$ gegeben ist, soll so bestimmt werden, dass es einem gegebenen Dreieck $A_2B_2C_2$ ähnlich wird. Auch diese Aufgabe ist in derselben Weise wie die vorige unbestimmt, indem eine Parallelverschiebung des Dreiecks in der zu Π_2 senkrechten Richtung ohne Belang ist. Wir denken uns zunächst, daß ein unserer Aufgabe genügendes Dreieck ABC gefunden und durch Umlegung um die zweite Spur e_2 seiner Ebene in seiner wahren Gestalt als

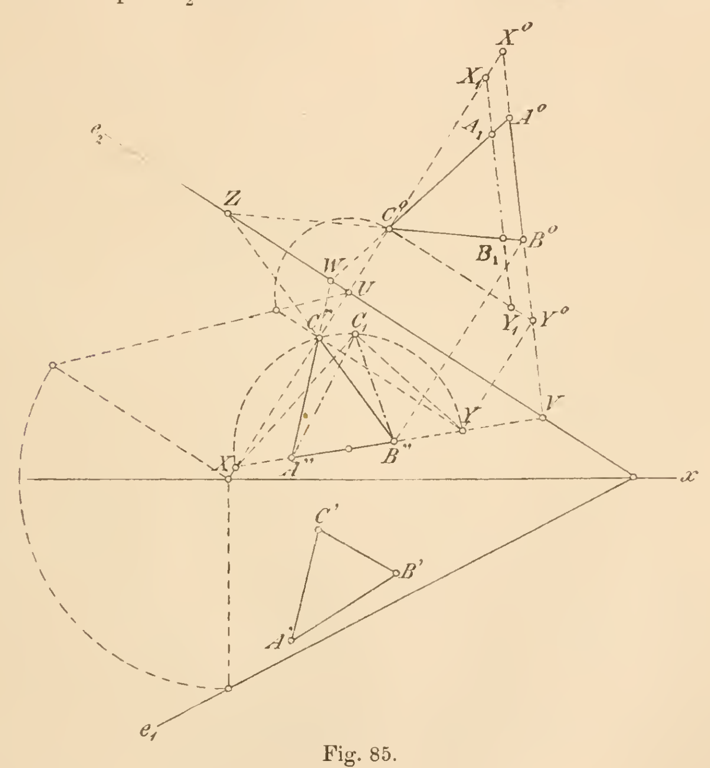


Fig. 85.

$\triangle\, A^0B^0C^0$ dargestellt sei (Fig. 85). Dann kann man durch C eine Haupt- und eine Falllinie ziehen, welche die Dreiecksseite AB in zwei Punkten Y und X schneiden werden. Im Aufriß und in der Umlegung ergeben sich so zwei rechtwinklige Dreiecke $X''C''Y''$ und $X^0C^0Y^0$, deren Katheten $C''Y''$ und C^0Y^0 gleich lang und parallel sind und deren Katheten $X''C''$ und X^0C^0 auf der nämlichen Geraden liegen. Zugleich besteht die Relation: $X^0A^0 : A^0B^0 : B^0Y^0 = X''A'' : A''B'' : B''Y''$. Schneidet man also die Seiten C^0X^0, C^0A^0, C^0B^0, C^0Y^0 mit einer Parallelen zu A^0B^0 bezüglich in den Punkten

X_1, A_1, B_1, Y_1 und richtet es dabei so ein, daß $A_1 B_1 = A''B''$ wird, so wird zugleich $X_1 A_1 = X''A''$ und $B_1 Y_1 = B''Y''$. Jetzt kann man das Dreieck $X_1 C^0 Y_1$ samt den Punkten A_1 und B_1 auf seiner Hypotenuse so verschieben, daß die Punkte $X_1 A_1 B_1 Y_1$ sich mit den Punkten $X'' A'' B'' Y''$ der Reihe nach decken. Dabei mag C^0 nach C_1 gelangt sein.

Das Dreieck $A'' C_1 B''$ läßt sich aber unmittelbar aus den Daten unserer Aufgabe zeichnen, indem es die Seite $A''B''$ besitzt und dem Dreieck $A_2 C_2 B_2$ ähnlich ist. Die Punkte X'' und Y'' findet man dann dadurch, daß $\angle X''C''Y'' = \angle X''C_1 Y'' = R$ ist; ein Kreis durch C'' und C_1, dessen Centrum auf $A''B''$ liegt, schneidet sie aus. Nun ist $X''C''Y''$ die Projektion eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten auf einer Haupt- und einer Falllinie liegen und dessen Umlegung zu $\triangle X''C_1 Y''$ ähnlich ist. Dabei ist zu beachten, daß die Kathete $X''C''$ dieser Falllinie angehört, wenn $X''C'' < X''C_1$ ist. Man bringe demnach das letztgenannte Dreieck in eine solche Lage $X_1 C^0 Y_1$, daß seine Kathete $X_1 C^0$ auf der Verlängerung von $X''C''$ liegt, wobei seine Kathete $C^0 Y_1$ zu $C''Y''$ parallel wird. Jetzt trage man $C^0 Y^0 = C''Y''$ auf $C^0 Y_1$ auf und ziehe $Y^0 X^0 \parallel Y_1 X_1$, so ist $\triangle X^0 C^0 Y^0$ die Umlegung und $\triangle X''C''Y''$ die Projektion eines rechtwinkligen Dreiecks XCY. Ist E die Ebene dieses Dreiecks, so ist ihre Spur e_2 parallel zu $C''Y''$ und geht durch den Punkt $V = X^0 Y^0 \times X''Y''$. Ist $U = e_2 \times C^0 C''$, so ist die Tafelneigung von E so zu bemessen, daß $C''U$ die orthogonale Projektion von $CU = C^0 U$ wird; bildet man also aus $C^0 U$ und $C''U$ als Hypotenuse und Kathete ein rechtwinkliges Dreieck, so schließen sie den Winkel der Tafelneigung ein. Bestimmt man noch A_1 und B_1 auf $X_1 Y_1$, indem man $X_1 A_1 = X''A''$ und $Y_1 B_1 = Y''B''$ macht, und schneidet die Geraden $C^0 A_1$ und $C^0 B_1$ mit $X^0 Y^0$ in A^0 und B^0, so sind A^0 und B^0 die Umlegungen der Punkte A und B, deren Aufrisse A'' und B'' sind. Denn nach der Konstruktion gilt die Relation: $X''A'' : A''B'' : B''Y'' = X^0 A^0, A^0 B^0 : B^0 Y^0$, damit werden aber $A''A^0$ und $B''B^0$ zu e_2 senkrecht, w. z. b. w. Somit ist die Umlegung $A^0 B^0 C^0$ des gesuchten Dreiecks gefunden; in der Figur ist dann noch eine x-Achse angenommen und der Grundriß, sowie die Spur e_1 aus Aufriß und Umlegung konstruiert.

109. Die schiefe Parallelprojektion eines gegebenen Kreises vom Radius r auf eine Ebene Π_1 soll so bestimmt werden, daß sein Bild eine Ellipse von gegebenen Halbachsen a und b wird. Der Kreis k werde um die Spur e_1 seiner Ebene in Π_1 niedergelegt. Seine Umlegung k_0 (Fig. 86b) und sein

Bild, die Ellipse k_1, müssen sich in Bezug auf e_1 als Achse in affiner Lage befinden; mithin muß dem zu e_1 parallelen Kreisdurchmesser C_0D_0 ein ihm gleicher und paralleler Ellipsendurchmesser C_1D_1 entsprechen. Damit aber eine Ellipse mit den Halbachsen a und b einen Durchmesser von der Länge $2r$ habe, muß $a \geqq r \geqq b$ sein. Diese Bedingung entscheidet über die Lösbarkeit unseres Problems; ist sie erfüllt, so giebt es im allgemeinen zwei Ellipsendurchmesser der geforderten Art symmetrisch zu den Achsen.

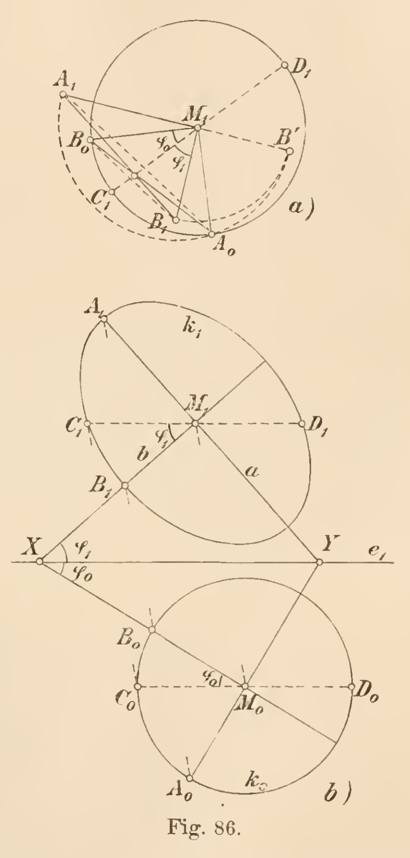


Fig. 86.

Sind M_1A_1 und M_1B_1 die Halbachsen der Ellipse k_1 und schneiden sie die Spur e_1 in X und Y, so entsprechen ihnen beim affinen Kreis k_0 zwei rechtwinklige Halbmesser M_0A_0 und M_0B_0, welche die Spur e_1 ebenfalls in X und Y schneiden (vergl. 19). In dieser affinen Beziehung zwischen k_1 und k_0 entspricht dem $\triangle A_1M_1B_1$ das $\triangle A_0M_0B_0$. Nun bleiben zwei Figuren $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$ in affiner Lage, wenn man die eine in der Richtung der Affinitätsstrahlen gegen die andere verschiebt. Sind nämlich h_0 und h_1 zwei zur Affinitätsachse e_1 parallele, sich entsprechende Gerade, so sind je zwei auf ihnen liegende, entsprechende Strecken einander gleich. Führt man also die gemeinte Verschiebung von $\mathfrak{F}_0$ aus, so daß h_0 und h_1 sich decken, so fallen auf h_1 je zwei entsprechende Punkte zusammen, d. h. diese Gerade bildet nach der Verschiebung die Affinitätsachse, während die Affinitätsrichtung ersichtlich die frühere bleibt. Insbesondere bleiben die Dreiecke $A_1M_1B_1$ und $A_0M_0B_0$ in affiner Lage, wenn man das letztere um die Strecke M_0M_1 verschiebt; dann deckt sich C_0D_0 mit C_1D_1 und diese Gerade wird für die neue Lage der Dreiecke zur Affinitätsachse.

Es gilt hiernach zwei der Größe nach bekannte rechtwinklige

Dreiecke $A_1 M_1 B_1$ (mit den Katheten a und b) und $A_0 M_0 B_0$ (mit den Katheten r) in eine solche affine Lage zu bringen, daß M_0 und M_1 sich decken (Fig. 86a). Dazu ist nur nötig, daß $B_0 B_1 \parallel A_0 A_1$ wird, die Affinitätsachse verbindet dann M_1 mit dem Punkt $A_0 B_0 \times A_1 B_1$. Lassen wir also $\triangle M_1 B_0 B_1$ eine Drehung von 90^0 um M_1 ausführen, so gelangt B_0 nach A_0 und B_1 nach B' auf $M_1 A_1$, zugleich ist $\angle B' A_0 A_1 = R$. Das liefert folgende Konstruktion. Man trage $M_1 B_1 = M_1 B'$ an $M_1 A_1$ an, beschreibe über $B' A_1$ einen Halbkreis und schlage um M_1 mit dem Radius r einen Kreis. Beide Kreise schneiden sich in dem gesuchten Punkt A_0, während $M_1 B_0 = r$ senkrecht zu $M_1 A_0$ zu ziehen ist. Nun zeichne man noch die Affinitätsachse $C_1 D_1$ ein, die M_1 mit $A_0 B_0 \times A_1 B_1$ verbindet. Wie aber in Figur 86a $M_1 B_0$ und $M_1 B_1$ mit $M_1 C_1$ die Winkel φ_0 resp. φ_1 einschließen, so müssen in Figur 86b $M_0 B_0$ und $M_1 B_1$ mit e_1 die nämlichen Winkel φ_0 und φ_1 bilden. Man ziehe also $M_0 X$ unter dem Winkel φ_0 gegen e_1 und $M_0 Y$ senkrecht dazu, ziehe ferner $M_1 X$ unter dem Winkel φ_1 gegen e_1 und $M_1 Y$ dazu senkrecht; so erhält man den Mittelpunkt M_1 der gesuchten Ellipse und auf $M_1 X$ und $M_1 Y$ ihre Scheitel A_1 und B_1 ($M_0 M_1 \parallel A_0 A_1 \parallel B_0 B_1$). Damit ist unsere Aufgabe gelöst. — Wird der Kreis k_0 in seine ursprüngliche Lage aufgedreht, so bleibt er durch Parallelprojektion auf die Ellipse bezogen.

DRITTES KAPITEL.

Ebenflächige Gebilde, Körper.

Die körperliche Ecke; das Dreikant.

110. An einem ebenflächigen Gebilde[3]) unterscheidet man Seitenflächen, Kanten und Ecken. Die Kanten sind in zweifacher Weise angeordnet; einerseits bilden sie ebene Vielecke, andererseits körperliche Ecken.

Eine körperliche n-kantige Ecke oder kürzer ein n-Kant wird gebildet von n Strahlen und n Ebenen, die von einem Punkte ausgehen. Dieser Punkt heißt der Scheitel, jene Strahlen die Kanten und die zwischen ihnen liegenden Winkel die Seiten (Seitenflächen) der körperlichen Ecke. Jede Seite wird von zwei

Kanten begrenzt und kann daher auch als Kantenwinkel bezeichnet werden, in jeder Kante stoßen zwei Seiten aneinander und bilden die *Flächenwinkel* oder kurz die *Winkel* des n-Kants.

Zwei n-Kante, welche alle Seiten und alle Winkel entsprechend gleich haben, sind entweder *kongruent* oder *symmetrisch*. Dies erkennt man unmittelbar, wenn man die beiden n-Kante in eine solche gegenseitige Lage bringt, daß zwei aufeinanderfolgende Kanten des einen mit den entsprechenden des anderen zusammenfallen, wobei dann beide n-Kante sich entweder ganz decken oder sich in symmetrischer Lage in Bezug auf die gemeinsame Seitenfläche als Symmetrieebene befinden. Verlängert man die Kanten eines n-Kants über den Scheitel hinaus, so erhält man ein neues n-Kant, dessen Seiten die Scheitelwinkel der Seiten des ersteren sind; beide n-Kante sind symmetrisch.

111. Ein n-Kant, bei dem jeder Flächenwinkel $< 2R$ ist, heißt *konkav*. *Bei einem konkaven n-Kant ist die Summe der Seiten* $< 4R$, vorausgesetzt, daß sich die Seitenflächen nicht durchkreuzen. Schneidet man nämlich das n-Kant mit einer Ebene, die alle Kanten trifft, so entsteht ein Körper, den man als n-seitige Pyramide bezeichnet; derselbe wird begrenzt von einem n-Eck, der Basisfläche, und n Dreiecken, den Seitenflächen (vergl. Fig. 87). Nennt man die Ecken der Basisfläche $1, 2, \ldots . n$ und die nach ihnen laufenden Kanten $k_1, k_2, \ldots k_n$, so kann man die Kantenwinkel durch $\angle k_1k_2$, $\angle k_2k_3 \ldots . \angle k_nk_1$, die Flächenwinkel durch $\angle k_1$, $\angle k_2, \ldots . \angle k_n$ bezeichnen. Bedenkt man, daß die Winkelsumme in jedem der n Seitendreiecke $2R$ beträgt, so folgt:

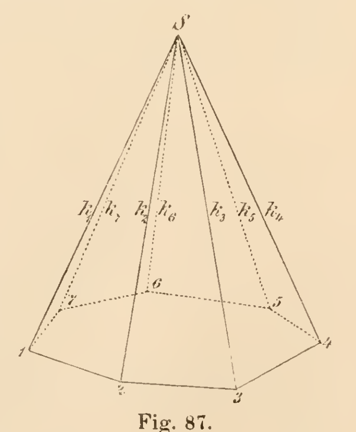


Fig. 87.

$$\angle k_1k_2 + \angle k_2k_3 + \ldots . + \angle k_nk_1 = 2nR - \angle S12 - \angle S21 - \angle S23 - \angle S32 - \ldots - \angle Sn1 - \angle S1n.$$

Nun ist der Punkt 2 Scheitel eines Dreikants mit den Kanten 2 1, 2 3, 2 S, und da in jedem Dreikant die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist, hat man:

$$\angle S21 + \angle S23 > \angle 123.$$

Indem man die analogen Resultate für die Ecken 3, 4, ..., n, 1 benutzt, geht die frühere Gleichung in die Ungleichung über:

$$\angle k_1k_2 + \angle k_2k_3 + \ldots . + k_nk_1 < 2nR - \angle 123 - \angle 234 - \ldots .$$

oder, da die Winkelsumme im n-Eck $(2n - 4) R$ beträgt, in:

$$\angle k_1 k_2 + \angle k_2 k_3 + \ldots + \angle k_n k_1 < 4 R.$$

Fällt man von einem Punkt im Innern eines n-Kants der Reihe nach Lote auf seine Seitenflächen, so bestimmen die aufeinanderfolgenden Lote die Seitenflächen eines neuen n-Kants, des Polar-n-kants. Daraus folgt sofort, daß auch die Kanten des ursprünglichen n-Kants auf den bezüglichen Seitenflächen seines Polar-n-kants senkrecht stehen; und es ist weiter ersichtlich, daß die Kantenwinkel eines jeden von ihnen die Supplemente der entsprechenden Flächenwinkel des anderen sind. Dabei sind solche Kanten und Seiten als entsprechend aufgefaßt, die aufeinander senkrecht stehen.

Die Summe der Winkel (Flächenwinkel) eines konkaven n-Kants ist $> (2n - 4) R$. Denn für das zugehörige Polar-n-kant, das ebenfalls konkav ist, ist nach dem vorangehenden Satze die Summe der Seiten $< 4 R$, also die Summe der zugehörigen Supplementwinkel $> (2n-4) R$; diese sind aber jenen Flächenwinkeln gleich.

112. Wie in der Ebene die Konstruktion der n-Ecke auf die der Dreiecke zurückgeführt wird, so wird im Raume die Konstruktion der n-Kante auf die der Dreikante reduziert. Wir werden uns deshalb weiterhin ausführlicher mit den Dreikanten zu beschäftigen haben. In einem Dreikant sind alle Winkel und alle Seiten $< 2 R$. Seine Kanten sollen durchweg mit a, b, c, die gegenüberliegenden Seiten mit $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ bezeichnet werden, so daß $\mathsf{A} = bc$, $\mathsf{B} = ca$, $\Gamma = ab$ und $a = \mathsf{B} \times \Gamma$, $b = \Gamma \times \mathsf{A}$, $c = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ ist.

$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ bedeuten dann zugleich die Kantenwinkel, und a, b, c die Flächenwinkel des Dreikants. Nach den vorausgeschickten Untersuchungen haben wir die Ungleichungen:

$$0 < \mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma < 4 R$$

$$\text{und } 2 R < a + b + c < 6 R.$$

Hierzu kommen noch die Ungleichungen:

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} > \Gamma, \quad \mathsf{B} + \Gamma > \mathsf{A}, \quad \Gamma + \mathsf{A} > \mathsf{B},$$

welche besagen, daß die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist. Es ist hier nicht nötig, diese letzteren Ungleichungen zu beweisen, da sie bei der folgenden Konstruktion des Dreikants aus seinen drei Seiten sofort als richtig erkannt werden. Mit Hilfe des Polardreikants folgern wir aus den letzten Ungleichungen noch die weiteren:

$$a + b < 2 R + c, \quad b + c < 2 R + a, \quad c + a < 2 R + b.$$

Von den sechs Bestimmungsstücken (drei Seiten und drei Winkeln) eines Dreikants genügt es irgend drei zu kennen, um

das zugehörige Dreikant konstruktiv zu bestimmen. Soll die Konstruktion nicht unmöglich werden, so dürfen die gegebenen Stücke den angeführten Ungleichungen nicht widersprechen. Es ergeben sich nun die folgenden 6 Aufgaben:

Ein Dreikant zu konstruieren

1. aus: A, B, Γ — seinen drei Seiten,
2. aus: A, B, c — zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
3. aus: A, B, a — zwei Seiten und dem einer von ihnen gegenüberliegenden Winkel,
4. aus: A, b, c — einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln,
5. aus: A, a, b — einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel,
6. aus: a, b, c — seinen drei Winkeln.

Diese Aufgaben lassen sich unter Benutzung des Polardreikants paarweise aufeinander zurückführen. Die Aufgaben 3. und 5. lassen, wie wir später sehen werden, eventuell zwei Lösungen zu, alle anderen jedoch stets nur eine Lösung, abgesehen davon, daß es zu jeder Lösung eine symmetrische giebt.

113. Konstruktion des Dreikants aus seinen drei Seiten A, B, Γ. Wir denken uns das Dreikant mit der Seitenfläche Γ in der Zeichenebene liegend, trennen es längs der Kante c auf und legen die Seiten A $= bc$ und B $= ac$ um die bezüglichen Kanten b und a in die Zeichenebene nieder, so daß die gegebenen Seiten am Scheitel S nebeneinander zu liegen kommen (vergl. Fig. 88). Gehen wir von dieser Lage aus, so gewinnen wir das Dreikant, indem wir die Seiten A und B um die Kanten b und a zurückdrehen, bis die Kanten c_0 und c^0 in c zusammenfallen. Dann fällt auch P_0 mit P^0 in P zusammen, wenn wir $SP_0 = SP^0$ wählen. Bei dieser Drehung beschreibt P_0 einen Kreisbogen um a als Achse, d. h. die Projektion

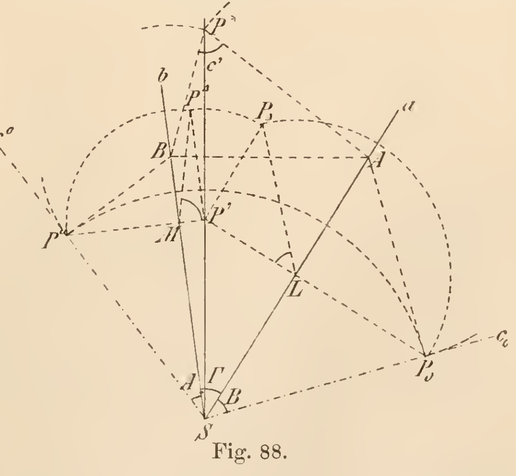


Fig. 88.

dieses Punktes bewegt sich auf einer Senkrechten zu a; ebenso bewegt sich bei der Drehung von P^0 um b seine Projektion auf einer Senkrechten zu b. Der Schnittpunkt P' dieser Senkrechten ist die Projektion des Raumpunktes P, also $c' = SP'$ die Projektion der Kante c. Legt man die Ebenen jener Kreisbogen P_0P und P^0P in die Zeichenebene um, so erhält man die Kreisbogen $P_0P_\triangle$ und $P^0P^\triangle$, wobei $P'P_\triangle \perp P'P_0$ und $P'P^\triangle \perp P'P^0$ ist. Zugleich giebt $P'P_\triangle = P'P^\triangle = P'P$ die Höhe des Punktes P über der Zeichenebene an, und ferner ist: $\angle P'MP^\triangle = \angle b$ und $\angle P'LP_\triangle = \angle a$. Um noch $\angle c$ zu erhalten, errichte man in P auf der Kante c eine senkrechte Ebene, die die Kanten a und b in A und B schneidet, dann ist $\angle APB = \angle c$. Hiernach stehen PA und PB auf c senkrecht, also ist $P^0B \perp c^0$ und $P_0A \perp c_0$, und $AB \perp c'$ als Spur einer zu c senkrechten Ebene. Legt man das Dreieck APB um seine Seite AB in die Zeichenebene um, so kommt P^* — die umgelegte Ecke — auf c' zu liegen und es ist $P^*A = P_0A$, $P^*B = P^0B$ und $\angle AP^*B = \angle c$.

Natürlich giebt es zwei Dreikante, die symmetrisch in Bezug auf die Zeichenebene liegen. Die ganze Aufgabe stimmt in ihrem Wesen mit der in 99 behandelten überein. Auch erkennt man leicht, daß es nur dann eine Lösung giebt, wenn $\mathsf{A} + \mathsf{B} > \Gamma$ ist, was zwei analoge Relationen nach sich zieht.

114. Konstruktion des Dreikants aus zwei Seiten A, B und dem eingeschlossenen Winkel c (Fig. 89). Man lege die Seiten nebeneinander in die Zeichenebene und drehe dann die eine A um die Kante c, bis sie mit B den gegebenen Winkel c einschließt. Ein Punkt P_0 auf b_0 beschreibt hierbei wieder einen Kreisbogen um c als Achse und seine Projektion eine Senkrechte zu c.

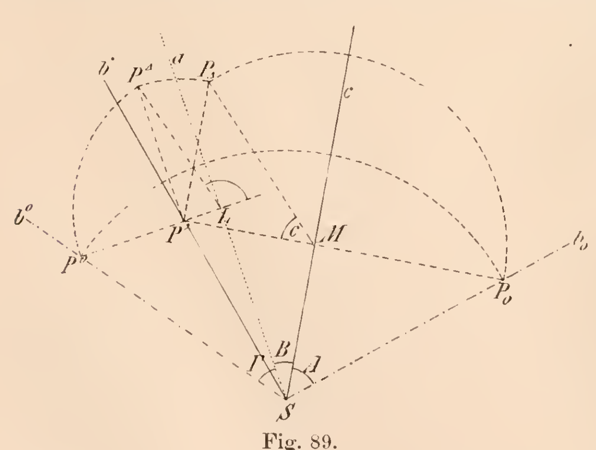


Fig. 89.

Durch Umlegen des Kreisbogens in die Zeichenebene ergiebt sich der Bogen $P_0P_\triangle$, dessen Centriwinkel $= 2R - c$ ist. Lotet man

von $P_\triangle$ auf P_0M, so erhält man P' und damit b'. Dreht man die Seite $ba = \Gamma$ um die Kante a, so beschreibt die Projektion von P eine Senkrechte zu a und es gelangt P nach P^0, wobei $SP_0 = SP^0$ ist. Auch kann man $LP^0 = LP^\triangle$ aus dem rechtwinkligen Dreieck $P^\triangle P'L$, dessen Katheten $P^\triangle P' = P_\triangle P'$ und $P'L$ man kennt, bestimmen. Hiermit ist Γ und $a = \angle P^\triangle LP'$ gefunden; der dritte Winkel des Dreikants bestimmt sich wie vorher.

115. Konstruktion des Dreikants aus einer Seite A und den beiden anliegenden Winkeln b und c. Die Seite A lege man in die Zeichenebene und durch ihre Kanten b resp. c lege man Ebenen, die mit ihr den Winkel b resp. c einschließen; die Schnittlinie dieser Ebenen ist die gesuchte Kante a. Um a zu konstruieren, ziehe man in den Ebenen $ab = \Gamma$ und $ac = B$ Hauptlinien, die in einer Parallelebene zur Zeichenebene liegen. In

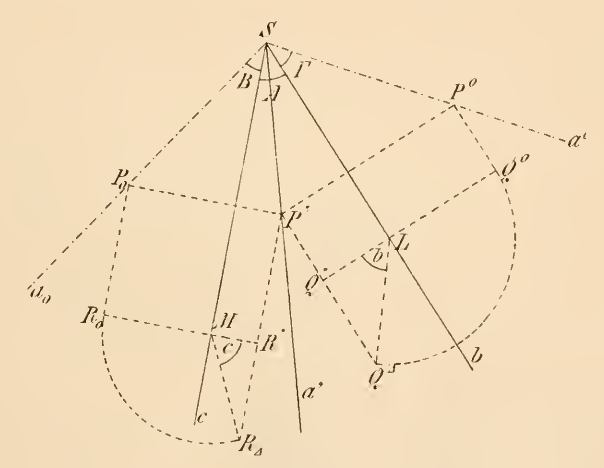


Fig. 90.

Fig. 90 sind $Q'P'$ und $R'P'$ die Projektionen solcher Hauptlinien, wenn $Q^\triangle Q' = R_\triangle R'$ ist. Denn offenbar ist R' die Projektion eines Punktes R der Ebene $ac = B$, dessen Abstand von der Tafelebene gleich $R_\triangle R'$ ist; analoges gilt für Q'. Der Schnittpunkt P unserer Hauptlinien ergiebt die Kante $a = SP$. Durch Umlegen der Seiten ac und ab in die Zeichenebene erhält man B und Γ in wahrer Größe. Die entsprechende Konstruktion ist nach den bereits behandelten Aufgaben 113 und 114 leicht zu verstehen.

116. Konstruktion des Dreikants aus zwei Seiten A, B und dem der Seite A gegenüberliegenden Winkel a.

1. Lösung (Fig. 91). Wir breiten die beiden Seiten A und B nebeneinander in die Zeichenebene aus, die wir mit der gesuchten Seite Γ zusammenfallen lassen. Nun drehen wir die Seite B um die Kante a, bis sie mit der Tafelebene den Winkel a einschließt. Indem wir dabei genau wie in 113 vorgehen, gewinnen wir P' und damit c' und erkennen, daß P den Tafelabstand $PP' = P_\triangle P'$ besitzt. Das von P auf die gesuchte Kante b gefällte Lot PM hat die Länge P_0M_{00}, woraus sich das Lot $P'M$ als Kathete eines Dreiecks mit der Hypotenuse $P_\triangle M_\triangle = P_0M_{00}$ und der Kathete $P_\triangle P'$ ergiebt. Man braucht also nur um P' einen Kreis mit dem Radius $P'M_\triangle$ zu ziehen, die gesuchte Kante b muß dann diesen Kreis berühren.

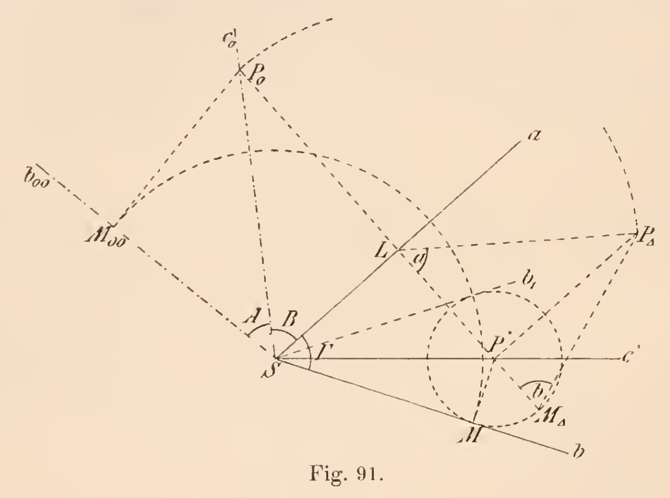


Fig. 91.

Damit ist Γ = ∠ ab und $b = \angle P_\triangle M_\triangle P'$ gefunden. Zur Kontrolle dient: $SM = SM_{00}$.

Ist, wie im vorliegenden Beispiel, A < B, — folglich $P_0M_{00} < P_0L$ und $P_\triangle M_\triangle < P_\triangle L$ —, so schneidet der Kreis um P' die Kante a nicht und es giebt zwei ganz verschiedene Dreikante (abc und ab_1c), oder gar keines, wenn $P_0M_{00} < P_\triangle P'$ ist. Ist dagegen A > B, so schneidet der Kreis um P' die Kante a und es giebt immer ein Dreikant, so lange A < B + Γ.

117. 2. Lösung (Fig. 92). Wir lassen jetzt die Seite B mit der Zeichenebene zusammenfallen. Durch die Kante a legen wir eine Ebene Γ mit dem Neigungswinkel a und um die Kante c als Achse einen Rotationskegel, indem wir die Seite A um ihre Kante c sich drehen lassen. Die gesuchte Kante b muß dann gleichzeitig auf jener Ebene Γ und diesem Kegel liegen. Um die Schnittlinie

der Ebene und des Kegels zu finden, benutzen wir eine zu c senkrechte Hilfsebene, die wir um ihre Spur in die Zeichenebene niederlegen. Unser Kegel weist in der niedergelegten Hilfsebene als Spur den Kreis mit dem Mittelpunkt L und dem Radius LB_0 auf und unsere Ebene Γ die Spur AP''. Denn ein Punkt P von Γ, dessen Projektion $P' = L$ ist, hat den Tafelabstand $P''P' = P_\triangle P'$, wo $P_\triangle P'$ Kathete des rechtwinkligen Dreiecks $P_\triangle P'M$ ist. Eine in M zu a senkrechte Ebene schneidet nämlich Γ in der Geraden PM, deren Umlegung in die Tafel offenbar $MP_\triangle$ ist und mit MP' den Winkel a

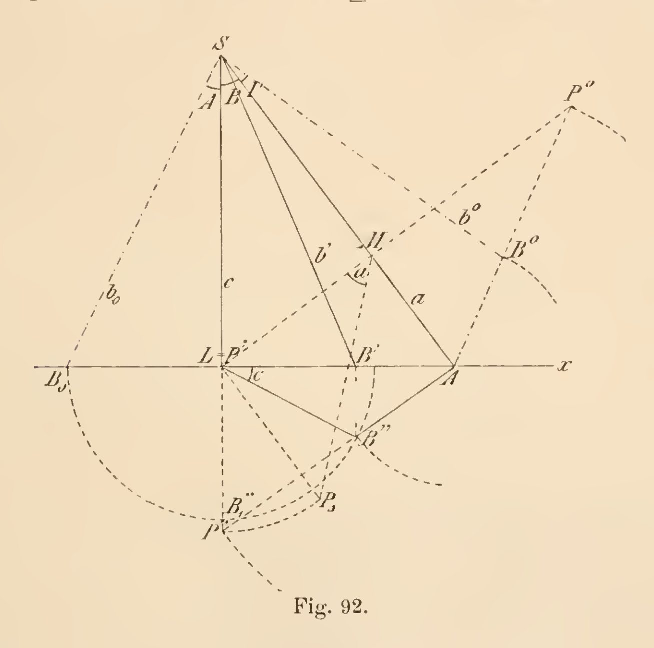


Fig. 92.

einschließt. Spurkreis und Spurlinie AP'' schneiden sich in B'', dem Spurpunkt der gesuchten Kante b in der Hilfsebene, woraus sich sofort b' ergiebt. $\angle B''LA = c$ und die wahre Größe der Seite $ab =$ Γ erhält man durch Umlegen derselben um die Kante a. In der Figur ist zu diesem Zwecke zunächst P nach P^0 umgelegt, hierdurch AP^0 und auf dieser Geraden B^0 bestimmt. Zur Kontrolle dient die Gleichheit von SB_0 und SB^0. Eine zweite Lösung liefert der Punkt B_1'', doch ist die weitere Durchführung derselben unterlassen, um die Figur nicht zu sehr zu komplizieren.

118. Konstruktion des Dreikants aus einer Seite B, einem anliegenden Winkel a und dem gegenüberliegenden Winkel b (Fig. 93).

Lassen wir die Zeichenebene mit der gesuchten Seite Γ zusammenfallen und denken wir uns B in dieselbe niedergelegt. Alsdann drehen wir B um die Kante a, bis sie mit der Tafel den Winkel a einschließt; ganz wie früher erhalten wir so P' und c' und $P'P_\triangle$ als Tafelabstand des Punktes P. Durch $c = SP$ ist nun eine Ebene zu legen, die mit der Tafel den Winkel b bildet. Die Spuren aller Ebenen durch P mit der Tafelneigung $= b$ berühren nach 96 einen Kreis mit dem Mittelpunkt P'. Sein Radius ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks $P_\triangle P' M_\triangle$, dessen andere Kathete gleich dem Tafelabstand PP' ist und dem Winkel b gegenüberliegt.

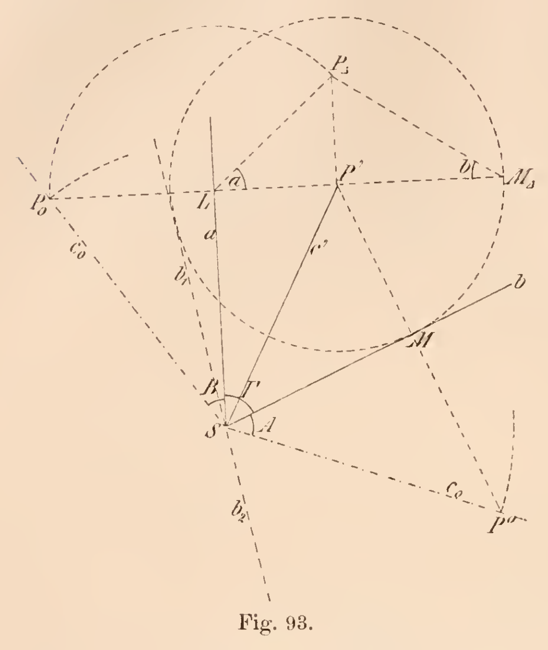


Fig. 93.

Die Spur der gesuchten Seite A ist also die von S an unseren Kreis gelegte Tangente b. Die Tangente b_1 liefert in unserer Zeichnung ein Dreikant mit dem Winkel $2R - a$, dagegen liefert die Verlängerung von b_1 über S hinaus, nämlich b_2, mit a und c ein Dreikant, welches die gegebenen drei Stücke B, a, b besitzt. Es kann, ganz wie in der vorhergehenden Nummer, zwei oder keine oder eine Lösung geben, je nachdem S außerhalb, innerhalb oder auf dem Kreise um P' liegt. Mit b ist Seite $ab =$ Γ gefunden, während sich die wahre Größe von A durch Niederlegen in die Tafel ergiebt. ($MP^0 = M_\triangle P_\triangle$. Kontrolle: $SP_0 = SP^0$.).

119. Konstruktion des Dreikants aus seinen drei Winkeln a, b, c. 1. Lösung (Fig. 94). Wir legen eine Seite, etwa A, in die Grundrißebene, und wählen die Aufrißebene senkrecht zur Kante c, so daß die Ebene der Seite B die Kante c zur ersten, die Gerade, die mit der x-Achse den Winkel c einschließt, zur zweiten Spur hat. Die gesuchte Seite Γ muß dann mit den Ebenen A resp. B die Winkel b resp. a einschließen, und kann noch durch einen be-

liebigen Punkt, etwa den Punkt P in Π_2, gelegt werden. Da Γ mit A den Winkel b bildet, so muß sie den Kegel berühren, der durch Rotation von PQ um die Achse PP' entsteht ($\angle\, PQP' = b$). Ganz ebenso muß Γ den Kegel berühren, der durch Rotation von PR um die Achse PF entsteht ($\angle\, PRF = a$, $PF \perp CF$). Es sind also die gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Kegel mit den Achsen PP' und PF zu bestimmen und wir verfahren dabei wie in 100.

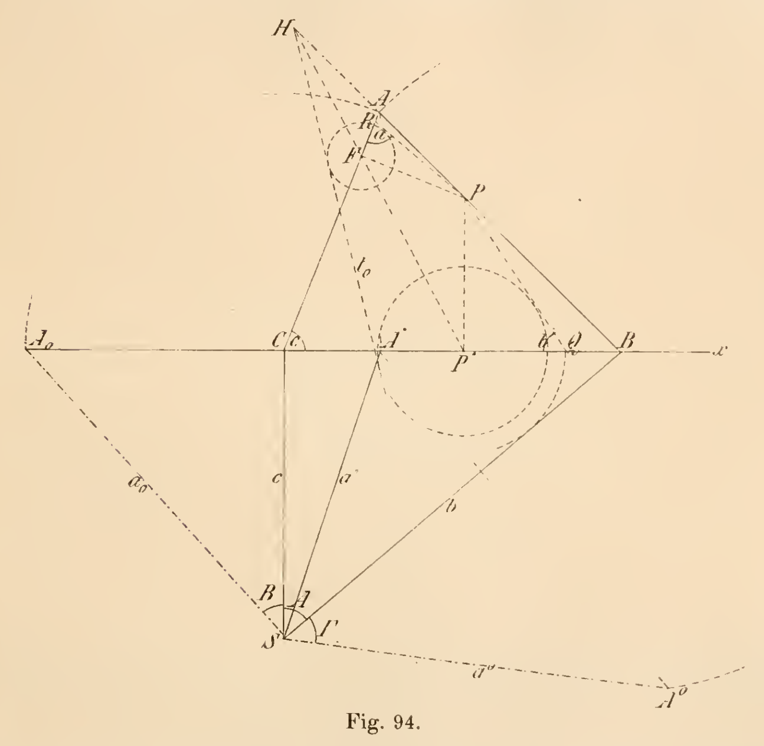


Fig. 94.

Wir denken uns nämlich aus P' und F auf die gesuchte Tangentialebene die beiden Lote gefällt. Die Verbindungslinie ihrer Fußpunkte ist eine gemeinsame Tangente t beider Kegel, ihr Schnittpunkt H mit $P'F$ ist ihr zweiter Spurpunkt und folglich PH die zweite Spurlinie der gesuchten Seite Γ. Um H wirklich zu konstruieren, suchen wir die um $P'F$ niedergelegte Tangente t_0, deren Abstände von P' und F gleich sind den Abständen dieser Punkte von den Geraden PQ und PR respektive. Die Kante b, d. h. die erste Spur der Seite Γ, findet man nun als Tangente aus B an den ersten Spurkreis des Kegels, der durch Rotation von PQ um die Achse PP' gebildet wurde; die Kante $a = SA$ legt man noch

um c resp. b nieder und erhält so die wahre Größe der Seiten B und Γ.

120. 2. Lösung (Fig. 95). Man zeichne zunächst ein Dreikant mit den drei Seiten: $\mathsf{A}_1 = 2R - a$, $\mathsf{B}_1 = 2R - b$, $\Gamma_1 = 2R - c$, indem man ganz wie in 113 zu Werke geht. Dann wähle man auf den Kanten a_1, b_1, c_1 desselben die Punkte L, M, N respektive, und errichte in ihnen Ebenen senkrecht zu den bezüglichen Kanten. Bei geeigneter Wahl von L, M, N liegt der Schnittpunkt S dieser

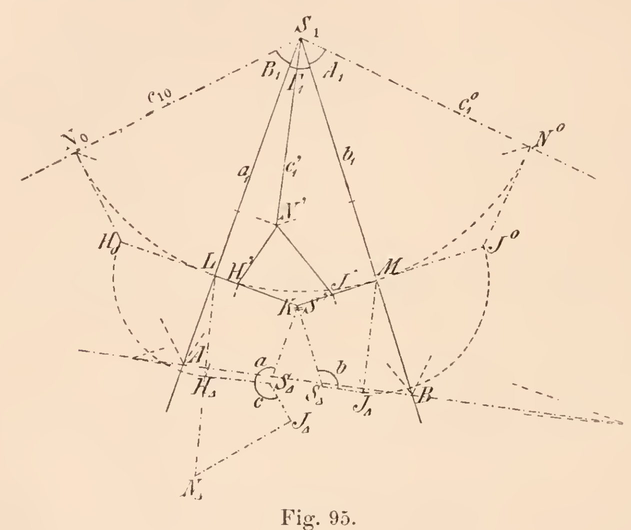


Fig. 95.

Ebenen im Innern des Dreikantes $a_1\, b_1\, c_1$; die Ebenen schneiden sich dann in den Kanten des Polardreikantes mit dem Scheitel S, das die vorgeschriebenen Winkel a, b, c besitzt. In der Figur ist die Spur AB der in N auf c_1 normalen Ebene wie früher bestimmt. Die Spuren der in L auf a_1, und in M auf b_1 normalen Ebenen sind LK und MK; sie schneiden aus den Seiten B_1 resp. Γ_1 die Geraden LH resp. MJ aus, die in den umgelegten Seiten zu LH_0 und MJ^0 werden. Das gesuchte Dreikant hat den Scheitel S und die Kanten SJ, SH, SK, die auf den Seiten A_1, B_1, Γ_1 respektive senkrecht stehen. Die Seitenflächen unseres Dreikantes sind $HSJN$, $JSKM$ und $KSHL$, deren wahre Größe wir durch Umlegen in die Zeichenebene finden. So erhält man $KS_\triangle J_\triangle M$, indem man $S_\triangle K$ und $J_\triangle J' \perp KM$ zieht, $J_\triangle M = J^0 M$ macht und $S_\triangle J_\triangle$ durch den Spurpunkt von JS, d. h. durch $AB \times J'S'$ zieht; ganz ebenso findet man $KS_\triangle H_\triangle L$ ($\angle\, MJ_\triangle S_\triangle = R$, $\angle\, LH_\triangle S_\triangle = R$, $KS_\triangle = KS_\triangle$). Von dem

Vierecke $SJNH$ kennt man die wahre Länge aller Seiten und die Winkel $\angle SJN = R$ und $\angle SHN = R$ und kann also die wahre Größe $S_\triangle J_\triangle N_\triangle H_\triangle$ zeichnen ($J_\triangle N_\triangle = J^0N^0$, $H_\triangle N_\triangle = H_0N_0$, $H_\triangle S_\triangle = H_\triangle S_\triangle$). Damit ist dann $a = \angle H_\triangle S_\triangle K$, $b = \angle J_\triangle S_\triangle K$ und $c = \angle J_\triangle S_\triangle H_\triangle$ gefunden.

121. Wird ein Dreikant von einer koncentrischen Kugelfläche geschnitten, so entsteht ein sphärisches Dreieck. Seine Ecken liegen auf den Kanten a, b, c. Seine Seiten (als Bogen größter Kreise auf der Kugel durch ihre Centriwinkel bestimmt)

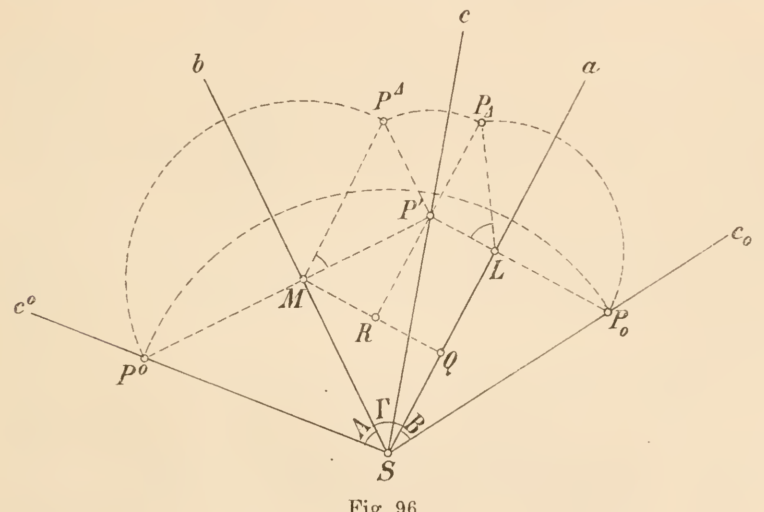


Fig. 96.

entsprechen den Seiten A, B, Γ des Dreikants und seine Winkel stimmen mit den Winkeln a, b, c desselben resp. überein.

Die gegebenen Dreikantskonstruktionen bilden daher das Äquivalent für die Berechnungen der sphärischen Trigonometrie und aus unseren Figuren müssen sich die Formeln der letzteren ablesen lassen.

In Fig. 96, die auf dieselbe Art wie Fig. 88 in 113 entsteht, ziehe man $MQ \perp a$ und die Verlängerung von $P_\triangle P'$ bis R auf MQ. Ferner wähle man der Einfachheit halber den Kugelradius als Längeneinheit und setze dementsprechend: $SP_0 = SP^0 = 1$. Dann ist $MP^0 = \sin \mathsf{A}$, $LP_0 = \sin \mathsf{B}$ und $P'P^\triangle = \sin \mathsf{A} \sin b$, $P'P_\triangle = \sin \mathsf{B} \,.\, \sin a$. Die sofort erkennbare Gleichheit der beiden letzten Strecken giebt: $\sin \mathsf{A} \sin b = \sin \mathsf{B} \sin a$, oder allgemein die Formel:

$$\alpha) \qquad \sin \mathsf{A} : \sin \mathsf{B} : \sin \Gamma = \sin a : \sin b : \sin c.$$

Sodann ist $SM = \cos \mathsf{A}$, $SL = \cos \mathsf{B}$, $SQ = \cos \mathsf{A} \cos \Gamma$, $MQ = \cos \mathsf{A} \sin \Gamma$, $MP' = \sin \mathsf{A} \cos b$, $RP' = MP' . \sin \Gamma = \sin \mathsf{A} \sin \Gamma \cos b$, $MR = MP' . \cos \Gamma = \sin \mathsf{A} \cos \Gamma \cos b$, $P'L = LP_\triangle . \cos a = \sin \mathsf{B} \cos a$. Aus der Relation: $SL = SQ + RP'$ folgt daher:

$$\beta) \qquad \cos \mathsf{B} = \cos \mathsf{A} \cos \Gamma + \sin \mathsf{A} \sin \Gamma \cos b.$$

Aus der Beziehung: $MQ = MR + P'L$ folgt zunächst:

$$\cos \mathsf{A} \sin \Gamma = \sin \mathsf{A} \cos \Gamma \cos b + \sin \mathsf{B} \cos a;$$

dividiert man die Gleichung mit $\sin \mathsf{A}$ und setzt dann (nach α) statt $\sin \mathsf{B} : \sin \mathsf{A}$ das Verhältnis $\sin b : \sin a$ ein, so findet man:

$$\gamma) \qquad \operatorname{cotg} \mathsf{A} \sin \Gamma = \cos \Gamma \cos b + \operatorname{cotg} a \sin b.$$

Aus β) und γ) kann man gleichbedeutende Formeln entwickeln, indem man die Symbole der Seiten A, B, Γ, zugleich aber die Symbole a, b, c der ihnen gegenüberliegenden Winkel mit einander vertauscht. Bedenkt man noch, daß die abgeleiteten Gleichungen auch für das „Polardreieck“ gelten müssen, das den Kugelschnitt eines „Polardreikantes“ bildet und dessen Seiten und Winkel sich mit den Winkeln und Seiten unseres Dreikantes je zu $2\,R$ ergänzen, sowie daß die Sinus supplementärer Winkel (Bogen) gleich, ihre Cosinus aber entgegengesetzt gleich sind, so findet man z. B. aus β) die Gleichung:

$$\delta) \qquad \cos b = -\cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \mathsf{B}.$$

Die angeführten Gleichungen bilden die Grundlage der sphärischen Trigonometrie; aus ihnen läßt sich der ganze Formelapparat derselben entwickeln, worauf indessen hier nicht näher eingegangen werden soll.

122. Nachdem wir Dreikante aus Seiten und Winkeln konstruiert haben, könnten wir solche auch aus anderen Bestimmungsstücken konstruieren. Hierbei wird es jedoch öfters geboten sein, die Formeln der sphärischen Trigonometrie zu benutzen, um zu solchen Bestimmungsstücken zu gelangen, die ein einfaches Zeichnen ermöglichen. Nicht jede drei beliebig gewählten Bestimmungsstücke führen zu einer Konstruktion. Die Aufgabe wird vielmehr häufig konstruktiv unlösbar, weil sie, analytisch formuliert, von Gleichungen höheren Grades abhängt. Um hier ein konstruierbares Beispiel zu geben, soll ein Dreikant aus einer Seite A, dem gegenüberliegenden Winkel a und dem Neigungswinkel α der Kante a gegen die Seite A gezeichnet werden.

Wir errichten in einem Punkte A der Kante a eine zu ihr senkrechte Ebene E, die die Kanten b und c resp. in B und C schneidet (Fig. 97). Verschiebt man A auf a, so verschiebt sich auch B auf b und C auf c, so daß durch geeignete Wahl von A die Linie

BC eine vorgeschriebene Länge erhält. Läßt man nun A mit der Zeichenebene zusammenfallen, nimmt in dieser BC beliebig an und legt die Ebene E um ihre Spur BC um, so muß man zwei Dreiecke CBS und CBA_0 mit folgenden Eigenschaften erhalten. $\angle BSC$ = A und $\angle BA_0C = a$; die Lote aus A_0 und S auf BC treffen diese Linie in dem gleichen Punkte F, da $a' \perp BC$ und $\angle FSA = \alpha$. Man konstruiere also über BC als Sehne zwei Kreise, von denen der erstere den Winkel A, der letztere den Winkel a als Peripheriewinkel faßt. Dann sind S und A_0 auf diesen Kreisen so zu bestimmen, daß $A_0S \perp BC$ und $A_0F : SF = \sin\,\alpha$ ist. Sind nun JL_0 und JK den gesuchten Strecken FA_0 resp. FS gleich, so ist:

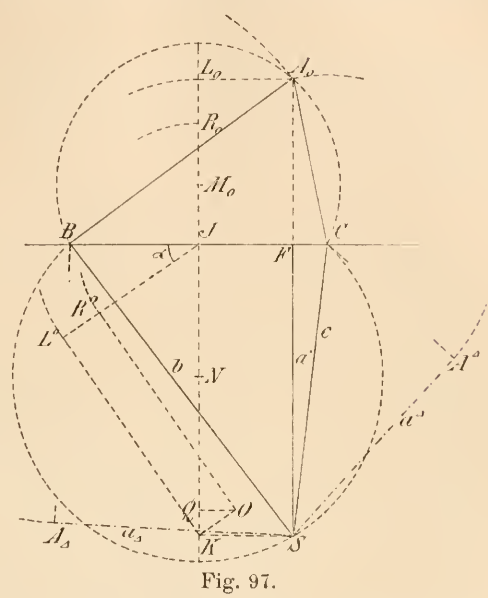


Fig. 97.

$$M_0A_0^2 = M_0L_0^2 + L_0A_0^2 = M_0J^2 + JC^2$$
$$\text{und } NS^2 = NK^2 + KS^2 = NJ^2 + JC^2,$$

also durch Subtraktion:

$$M_0L_0^2 - M_0J^2 = NK^2 - NJ^2,$$

oder indem man die Differenz der Quadrate zerlegt:

$$L_0J \,.\, L_0R_0 = KJ \,.\, KQ,$$

wobei $L_0R_0 = M_0L_0 - M_0J$ und $KQ = NK - NJ$ ist.

Berücksichtigt man noch die Relation $L_0J : KJ = \sin\,\alpha$, so folgt schließlich:

$$\sin\,\alpha = L_0J : KJ = KQ : L_0R_0.$$

$M_0R_0 = M_0J$ und $NQ = NJ$ sind bekannt; es gilt also nur noch JL_0 und JK mit Hilfe der letzten Gleichung zu finden. Trägt man aber im Punkte J die Strecke $JR^0 = JR_0$ so an, daß $\angle R^0JB = \alpha$ ist, zieht in R^0 eine Senkrechte zu JR^0 und in Q eine Senkrechte zu JQ, die sich in O schneiden, so liegt K auf einer zu JR^0 durch O gezogenen Parallelen und L^0 auf einem von K auf JR^0 gefällten

Lote. In der That ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke L^0JK und QKO sofort:

$$\sin\alpha = L_0J : JK = QK : KO = QK : L_0R_0.$$

Hiermit ist $FA_0 = JL^0$ bekannt und die Kanten des gesuchten Dreikantes können unmittelbar gezeichnet werden.

Für das Umlegen der Seiten B und Γ genügt es zu bemerken, daß $CA^\triangle = CA_0$ und $CA^\triangle \perp SA^\triangle$, sowie $BA_\triangle = BA_0$ und $BA_\triangle \perp SA_\triangle$ ist.

Allgemeines über Vielflache; reguläre Vielflache.

123. Unter einem Vielflach oder Polyëder ist ein räumliches Gebilde zu verstehen, das von ebenen Vielecken begrenzt wird und überall geschlossen ist, also ein ebenflächiger Körper. Jene ebenen Vielecke heißen die Seitenflächen oder kurz Seiten, ihre Seitenlinien die Kanten des Vielflachs. In jeder Kante stoßen zwei Seitenflächen aneinander. Die Eckpunkte jener ebenen Vielecke sind zugleich die Ecken des Vielflachs, in denen also mindestens drei Kanten — und ebenso viele Seitenflächen — zusammenstoßen. Zwei Vielflache, die in den bezüglichen Seitenflächen einerseits und in den bezüglichen körperlichen Ecken andererseits übereinstimmen, sind kongruent resp. symmetrisch.

Zwischen der Anzahl der Ecken, der Anzahl der Seitenflächen und der Anzahl der Kanten eines Vielflachs besteht eine Beziehung (Eulerscher Satz). Sie lautet: Bei jedem Vielflach ist die Zahl der Seiten vermehrt um die Zahl der Ecken gleich der Zahl der Kanten vermehrt um 2.

Zum Beweise gehen wir von einem Vielflach mit F Flächen, E Ecken und K Kanten aus, nehmen von demselben eine Seitenfläche nach der anderen weg, bis zuletzt nur noch eine einzige Fläche übrig bleibt, und sehen zu, welche Veränderung hierbei die Zahl: $F + E - K$ erfährt. Bei Beseitigung der ersten Fläche reduziert sich diese Zahl um eine Einheit. Es entsteht nämlich dadurch ein offenes Vielflach, das einen freien Rand besitzt; die Zahl der Flächen hat sich dabei um 1 vermindert, die der Kanten und Ecken jedoch nicht. Freilich gehören diese teilweise dem Rande des offenen Vielflachs an. Bei Beseitigung jeder weiteren Fläche reduziert sich jene Zahl nicht mehr. Denn beim Abtrennen einer Seitenfläche, die n aufeinanderfolgende Kanten des freien Randes enthält, vermindert sich F um 1, K um n und E um $(n-1)$. Nach der Ausführung von $(F-1)$ Operationen wird also die obige Zahl sich nur um 1 vermindert haben, so daß sie dann

gleich $F + E - K - 1$ ist. Es ist aber jetzt nur noch ein Seitenpolygon vom ganzen Vielflach übrig, so daß die Zahl der Ecken nun gleich der Zahl der Kanten ist, mithin muß

$$F + E - K - 1 = 1, \text{ oder: } F + E = K + 2 \text{ sein.}$$

Bei dieser Beweisführung wurde vorausgesetzt, daß jedesmal die Seitenfläche, die man abtrennt, an den freien Rand grenzt, aber nur mit einer Anzahl aufeinanderfolgender Kanten. Würde dagegen eine Seitenfläche entfernt, die an zwei getrennten Stellen — mit Kanten, die nicht aufeinander folgen — an den Rand des offenen Vielflachs grenzt, so würden zwei getrennte Ränder entstehen. Das kann vermieden werden, wenn nicht zuletzt alle Seitenflächen an zwei Stellen an den freien Rand angrenzen; dann gilt der obige Satz nicht mehr, vielmehr müssen Modifikationen angebracht werden, auf die jedoch hier nicht eingegangen werden soll. Läßt sich auf einem Vielflach keine geschlossene Folge von Kanten angeben, ohne daß das Vielflach in zwei getrennte Teile zerfällt wenn man es längs dieser Kantenfolge aufschneidet, so sind die oben geschilderten Operationen immer möglich und der Satz ist gültig.

124. Legen wir uns jetzt die Frage vor: wie viele Bestimmungsstücke (Konstanten) besitzt ein Vielflach? Offenbar ist ein Vielflach durch die Wahl seiner Eckpunkte völlig bestimmt. Die Lage eines Raumpunktes hängt aber von der Wahl dreier Konstanten ab — etwa seiner Abstände von drei festen Ebenen Die Annahme sämtlicher Eckpunkte ergiebt demnach $3\,E$ Konstanten. An dieser Konstantenzahl sind indes noch zwei Korrektionen anzubringen. Erstens ist durch die Annahme der Eckpunkte im Raume nicht nur die Gestalt des Vielflachs an sich, sondern auch seine. räumliche Lage fixiert. Die Bestimmung der räumlichen Lage eines Gegenstandes erfordert aber 6 Konstanten. Denn einen Punkt desselben kann man an eine bestimmte Stelle im Raume bringen, das bedingt 3 Konstanten, einer Achse durch jenen Punkt kann man eine bestimmte Richtung geben, das bedingt zwei weitere Konstanten, und um jene Achse kann man den Gegenstand noch drehen, was noch eine Konstante erheischt. Die Zahl 6 ist also von der ursprünglich gefundenen Zahl zu subtrahieren. Zweitens können nicht alle Eckpunkte ganz beliebig angenommen werden, wenn die Seitenflächen nicht lauter Dreiecke sind. Ist z. B. eine Seite des Vielflachs ein Viereck, so können nur drei Ecken desselben beliebig im Raume angenommen werden, die vierte muß dann in der Ebene der drei ersten liegen. Jedes Viereck, das dem Vielflach angehört, vermindert also die Zahl der Konstanten um 1.

Ebenso vermindert jedes Fünfeck die Zahl der Konstanten um 2, da die vierte und die fünfte Ecke in der Ebene der drei ersten liegen müssen, u. s. w.

Die Gesamtzahl aller Seitenflächen hatten wir F genannt, und wir wollen nun mit F_3, F_4, F_5, ... die Anzahl der dreieckigen, viereckigen, fünfeckigen .... Seiten bezeichnen, so daß: $F = F_3 + F_4 + F_5 + \ldots$ ist.

Die Zahl der willkürlichen Konstanten eines Vielflachs ist nun:

$$3E - F_4 - 2F_5 - 3F_6 - \ldots - 6.$$

Mit Berücksichtigung der Relation: $E + F = K + 2$ wird sie:

$$3K - 3F - F_4 - 2F_5 - 3F_6 - \ldots,$$

$$\text{oder: } 3K - [3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \ldots].$$

Der Klammerausdruck ist aber $= 2K$, da jede dreieckige Fläche drei, jede viereckige vier Kanten liefert u. s. f., wobei dann jede Kante zweimal gezählt ist. Wir erkennen also: Jedes Vielflach enthält ebenso viele willkürliche Konstanten als Kanten.

Daraus folgt, daß, wenn die Kanten eines Vielflachs sowie ihre Verteilung in die Seitenflächen gegeben sind, im allgemeinen nur eine endliche Zahl entsprechender Vielflache existieren kann.

125. Aus dem Eulerschen Satze können wir eine Reihe weiterer Schlüsse ziehen, wenn wir bestimmte Voraussetzungen über die Art der Seitenflächen und der Ecken eines Vielflachs machen. Nehmen wir an, daß alle Seitenflächen des Vielflachs Dreiecke und alle Ecken Dreikante sind, so ergiebt sich das Vierflach mit 4 Ecken. Sind die Flächen Dreiecke, aber die Ecken vierkantig, so erhält man das Achtflach mit 6 Ecken; sind endlich die Flächen Dreiecke, aber die Ecken fünfkantig, so entsteht das Zwanzigflach mit 12 Ecken. Für alle diese Fälle ist nämlich $K = \frac{3F}{2}$ also $F = 2E - 4$, und ferner $K = \frac{nE}{2}$, wo $n = 3$, resp. 4, resp. 5 zu nehmen ist. Vielflache, deren Seitenflächen Dreiecke sind, können nicht lauter sechskantige und mehrkantige Ecken aufweisen, wie sich direkt aus dem Eulerschen Satze ergiebt.

Nehmen wir nun an, ein Vielflach besitze lauter viereckige Seitenflächen, so daß $K = 2F$, und $E = F + 2$ ist, und seine Ecken seien Dreikante, dann ist es ein Sechsflach mit 8 Ecken. Wollte man voraussetzen, alle Ecken seien Vierkante, Fünfkante u. s. w., so würde der Eulersche Satz wieder zu einem Widerspruch führen.

Ein Vielflach kann auch lauter fünfeckige Seitenflächen be-

sitzen; sind dann alle Ecken Dreikante, so hat man es mit dem Zwölfflach mit 20 Ecken zu thun.

126. Es mag hier noch darauf hingewiesen werden, daß nicht alle Annahmen über die Zahlen der Ecken und Flächen, welche dem Eulerschen Satze genügen, auch wirklich einem Vielflache entsprechen. Einige Beispiele mögen dieses erläutern. Gehen wir von dem Falle aus, daß alle Seitenflächen Dreiecke sind, so folgt aus dem Eulerschen Satze die Zahl der Ecken: $E = \frac{F}{2} + 2$. Bezeichnen wir die Zahl der Dreiecke, Vierecke u. s. w. wie vorher mit F_3, F_4 u. s. w. und analog die Zahl der Dreikante, Vierkante u. s. w. mit E_3, E_4 u. s. w., so ergeben sich folgende Fälle.

Ist $F_3 = 4$, also $E = 4$, so findet man ein Vielflach mit $E_3 = 4$.

Ist $F_3 = 6$, also $E = 5$, so findet man ein Vielflach mit $E_3 = 2, E_4 = 3$.

Ist $F_3 = 8$, also $E = 6$, so findet man ein Vielflach mit $E_3 = E_4 = E_5 = 2$ und eins mit: $E_4 = 6$.

Dagegen kann weder ein Vielflach mit: $E_3 = E_5 = 1$, $E_4 = 4$ noch ein solches mit: $E_3 = E_5 = 3$ existieren, wie man sich leicht überzeugt, obgleich diese Zahlen den weiter oben angeführten Relationen genügen.

Ist $F_3 = 10$, also $E = 7$, so giebt es Vielflache mit: $E_3 = E_5 = 3$, $E_6 = 1$, oder mit: $E_3 = E_6 = 2$, $E_4 = 3$, oder mit: $E_3 = E_4 = E_5 = 2$, $E_6 = 1$, oder mit: $E_3 = 1$, $E_4 = E_5 = 3$, oder mit: $E_4 = 5$, $E_5 = 2$. Andere Vielflache kann es dagegen hier nicht geben, so z. B. existiert ein Vielflach mit $E_3 = 2$, $E_4 = 1$, $E_5 = 4$ nicht, obgleich die angeführten Relationen diese Möglichkeit zulassen. Diese Beispiele mögen zur Beleuchtung des Gesagten genügen.

127. Über die Konstruktion von Vielflachen ist im allgemeinen wenig zu sagen. Man hat besonders auf die Gruppierung der Kanten in den Seitenfläcben und an den körperlichen Ecken zu achten; das Zeichnen der Kanten basiert im wesentlichen auf Dreieckskonstruktionen und auf der Affinität zwischen beiden Projektionen einer Seitenfläche, sowie auf der Konstruktion von Dreikanten. Ein Vielflach aus den Längen seiner Kanten und ihrer Anordnung zu zeichnen müßte nach 124 möglich sein, doch giebt es in den einfachsten Fällen bereits eine so große Anzahl von Lösungen (die, analytisch aufgefaßt, durch Bestimmung der Wurzeln von einer Reihe quadratischer und höherer Gleichungen gefunden werden müssen), daß das Problem konstruktiv zu große Schwierigkeiten bietet.

Bei der Projektion eines Vielflachs haben wir einen sichtbaren und einen unsichtbaren Teil zu unterscheiden. Jeder pro-

jizierende Strahl, der das Vielflach durchschneidet, enthält einen sichtbaren und einen oder mehrere unsichtbare Punkte seiner Oberfläche; der sichtbare Punkt ist derjenige, der am weitesten von der Projektionsebene absteht, die anderen Punkte sind verdeckt. Es giebt auf dem Vielflach ein Polygon (oder mehrere), in dessen Punkten die projizierenden Strahlen das Vielflach nur streifen; dieses Polygon wird als der wahre Umriß und seine Projektion als der scheinbare Umriß bezeichnet. Der wahre Umriß trennt offenbar im allgemeinen den sichtbaren Teil der Oberfläche von dem unsichtbaren; es kann indessen vorkommen, daß er selbst unsichtbar ist, womit auch die beiderseits anliegenden Seitenflächen unsichtbar werden. In allen Fällen wird das erwähnte Kriterium ausreichen, um zu entscheiden, ob eine Kante sichtbar ist oder nicht. Am besten wählt man dazu projizierende Strahlen, die zwei Kanten des Vielflachs treffen, also durch einen Schnittpunkt ihrer Projektionen gehen; aus der anderen Projektion kann man dann unmittelbar ersehen, welcher der beiden Punkte der Projektionsebene näher liegt und somit verdeckt wird. Die unsichtbaren Kanten eines Vielflachs sind in den Zeichnungen punktiert.

128. Ein Vielflach, das nur reguläre, unter sich kongruente Seitenpolygone und ebenso reguläre, unter sich kongruente Ecken besitzt, heißt regulär. Nach 125 giebt es folgende reguläre Vielflache: das Vierflach (Tetraëder), Achtflach (Oktaëder) und Zwanzigflach (Ikosaëder), die von Dreiecken begrenzt werden, das Sechsflach (Würfel, Hexaëder), das von Quadraten und das Zwölfflach (Dodekaëder), das von Fünfecken gebildet wird.

Die Konstruktion der regulären Vielflache. Wir können hier vom Vierflach und vom Würfel absehen, da ihre Konstruktion ohne weiteres einleuchtet. Beim regulären Achtflach stoßen in den Ecken je vier gleiche Kanten zusammen, die ein reguläres Vierkant bilden und deren Endpunkte deshalb ein Quadrat bestimmen. Hieraus erkennt man, daß die 12 Kanten des Achtflachs drei Quadrate bilden, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen. Der Schnittpunkt dieser Ebenen ist der Mittelpunkt des regulären Achtflachs; ihre Schnittlinien sind die drei Diagonalen oder Achsen desselben und tragen die 6 Ecken; sie sind zugleich die Diagonalen der genannten Quadrate.

Um das Achtflach darzustellen, stellen wir etwa eine Achse senkrecht zur Horizontalebene, sie projiziert sich dann im Aufriß in wahrer Länge, während die beiden anderen Achsen im Grundriß in wahrer Länge erscheinen. Der Grundriß wird demnach ein

Quadrat mit seinen beiden Diagonalen, im Aufriß liegen die Punkte C'', D'', E'', F'' auf einer Parallelen zur x-Achse, da das Quadrat $CEDF$ zum Grundriß parallel ist (Fig. 98).

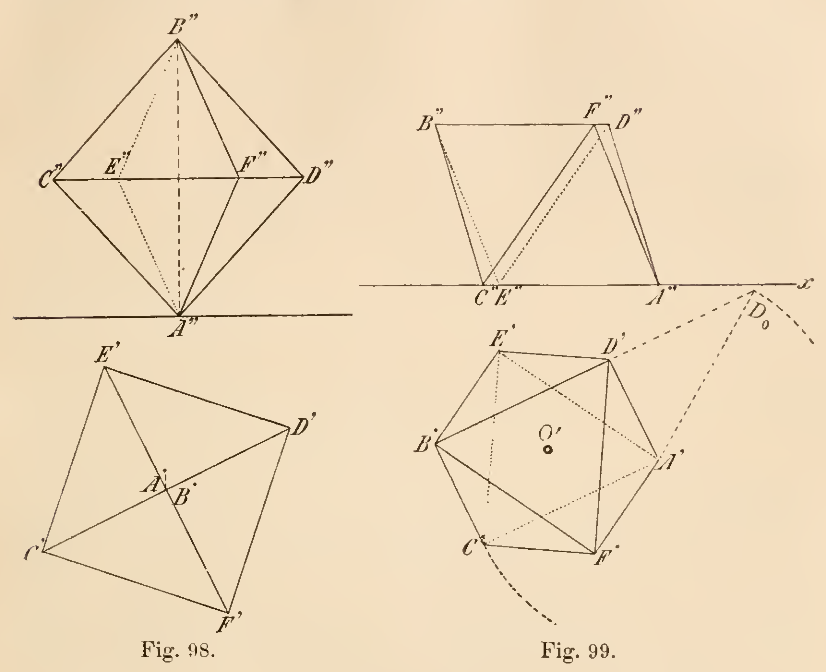


Fig. 98. Fig. 99.

Wir geben noch eine zweite Darstellung des Achtflachs, indem wir eine Seitenfläche in die Grundrißebene legen, etwa $\triangle\ ACE$ (Fig. 99). Der Mittelpunkt O des Achtflachs liegt senkrecht über der Mitte jeder Seitenfläche, also fällt O' mit dem Mittelpunkt von $\triangle\ A'C'E'$ zusammen. Verlängert man OA, OC und OE um sich selbst über O hinaus, so erhält man die Achsen AB, CD und EF, so daß O' die Projektionen $A'B'$, $C'D'$ und $E'F'$ halbiert, wodurch sich der Grundriß bestimmt. Im Aufriß fällt $A''C''E''$ auf die x-Achse und $B''D''F''$ wird parallel zn ihr; es ist also nur noch der Abstand dieser beiden Parallelen zu finden. Hierzu können wir etwa die Seite AD benutzen, von der wir die Projektion $A'D'$ und die wahre Länge ($= A'C'$) kennen. Jener Abstand ist $= D_0D'$, wenn $D_0A' = A'C'$ ist.

129. Konstruktion des Zwölfflachs. Die Ecken des Zwölfflachs sind reguläre Dreikante; errichtet man in den Mitten dreier, in einer Ecke zusammenlaufenden Kanten senkrechte Ebenen, so schneiden sich diese in einem Punkte O, der auf der Mittelsenkrechten jedes der drei regulären Fünfecke liegt, die jene körper-

liche Ecke bilden. Durch O geht demnach jede Ebene, die in der Mitte irgend einer Kante der genannten drei Fünfecke auf dieser senkrecht steht. Daraus geht weiter hervor, daß durch O die Mittelsenkrechte jeder Seitenfläche geht, die an zwei jener drei Fünfecke angrenzt. Durch Fortsetzung dieser Betrachtung folgt: O liegt über den Mitten aller Seitenflächen und ist von allen Ecken des Zwölfflachs gleich weit entfernt, man nennt deshalb O den Mittelpunkt. Die Seitenflächen sind paarweise parallel und die Ecken liegen paarweise auf 10 Achsen durch O. Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man das Zwölfflach um eine zu einer Fläche senkrechte Achse durch O dreht, und zwar um einen Winkel, der $\frac{4}{5} R$ (oder ein Vielfaches davon) beträgt. Es kommt dann das Zwölfflach mit sich selbst zur Deckung; die Fläche senkrecht zur Drehachse geht in sich selbst, von den fünf angrenzenden Flächen geht jede in die nächste über. Gleiches gilt von den fünf Flächen, die an jene anstoßen, so daß die letzte Fläche bei der Drehung in sich übergehen, also auf der Drehachse senkrecht stehen muß.

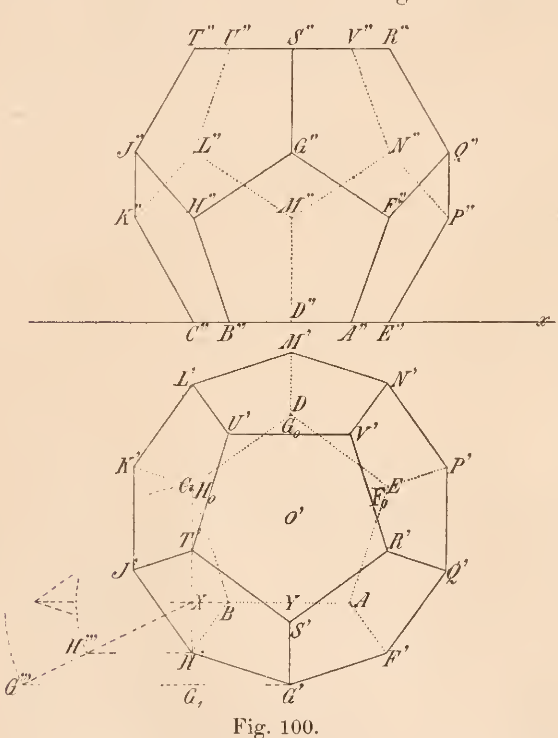


Fig. 100.

Bei der Darstellung mag eine Fläche in den Grundriß fallen, eine zweite ist dann hierzu parallel und erscheint in der Projektion wie diese als reguläres, aber um $2 R$ gedrehtes Fünfeck. Die der ersteren anliegenden 5 Flächen werden sich dann im Grundriß als kongruente Fünfecke projizieren, ebenso die 5 Flächen, die an die zweitgenannte angrenzen (Fig. 100).

Die Horizontalprojektionen der 20 Eckpunkte kommen auf zwei koncentrische Kreise zu liegen. Das Basisfünfeck sei $ABCDE$, ein angrenzendes $ABHGF$. Um seine Projektion zu erhalten, denke man sich dasselbe um AB gedreht, bis es mit dem Basisfünfeck zusammenfällt und $H_0G_0F_0$ in CDE zu liegen kommen. BH und ebenso BH' schließt mit BA und BC gleiche Winkel ein und, da $H_0H' \perp AB$, ist H' bestimmt; hiermit sind alle Ecken im Grundriß gefunden. Als Kontrolle dient der Umstand, daß sich $G_0H_0 = DC$ und $G'H'$ auf der Verlängerung von AB schneiden müssen. Im Aufriß liegen die Ecken zu je 5 auf vier Parallelen zur x-Achse, deren Abstände man durch Bestimmung der Abstände HH' und GG' gewinnt. Zu ihrer Ermittelung wähle man eine Hilfsebene $\Pi_3 \perp AB$ und zeichne in ihr eine Seitenansicht des Fünfecks $ABHGF$, das hier als Gerade erscheint ($XH''' = XH_0$, $XG''' = G_0Y$), wo dann $H'''H'$ und $G'''G_1$ die gesuchten Abstände sind ($H'''H' \parallel G'''G' \parallel BA$). Selbstverständlich ist von den 4 Parallelen die zweite ebensoweit entfernt von der ersten, wie die dritte von der vierten.

Zur Konstruktion können auch die folgenden Beziehungen verwendet werden. Es sei r_1 der Radius des Kreises $ABCDES'T'\ldots$ und r_2 der des Kreises durch $F'G'H'J'K'\ldots$; ferner sei s die Seite und d die Diagonale des Fünfecks $ABCDE$. Dann ist $r_1 : r_2 = F'R' : N'Q' = s : d$; ferner $M'N' = r_1$ und $R'N' = r_2$, da $R'N' \parallel P'Q' \parallel O'M'$ und $M'N' \parallel O'R'$; endlich $R'F' = r_1$, da $R'F'S'O'$ ein Parallelogramm ist. Daraus folgt noch $ER' = r_2 - r_1$ und da $P'Q' : ER' = r_2 : r_1$ ist, folgt weiter: $r_2 : r_1 = r_1 : r_2 - r_1$ oder: $d : s = s : d - s$, wie ja bekannt. Offenbar ist $L'N' \perp N'R'$ und da die Diagonale $LN \parallel \Pi_1$, so stehen die Diagonalen LN und NR aufeinander senkrecht. Gleiches gilt für je zwei Diagonalen, die in der nämlichen relativen Lage sich befinden, so ist $NR \perp RF$. Aber es ist die Ebene $NRF \perp \Pi_2$, demnach ist NR ebenso gegen Π_1 (resp. Π_2) geneigt wie RF gegen Π_2 (resp. Π_1) und da $NR = RF = d$, ergiebt sich: $R''F'' = R'N' = r_2$ und $R''N'' = R'F' = r_1$.

Aus dem Gesagten geht auch hervor, daß die 8 Eckpunkte $NRFELTHC$ die Ecken eines Würfels bilden.

130. Wir wollen das Zwölfflach noch in einer zweiten Lage zeichnen, wobei eine Achse, etwa AV, vertikal gestellt sein mag (Fig. 101). Die drei von A ausgehenden Kanten, etwa AB, AC, AD, haben gleiche Neigung unter sich und gleiche Neigung gegen die Horizontalebene, sie projizieren sich also als gleiche Strecken, deren Neigungswinkel $\frac{4}{3} R$ betragen. Die erste Spurlinie der Ebene ABC ist $a_1 \perp AD'$, und die in dieser Ebene gelegene Seitenfläche $ABEFC$ erhält durch Umlegen

um a_1 in die Grundrißebene die Lage $AB_0E_0F_0C_0$, wo $E_0F_0 \parallel a_1$. Da $B'B_0 \perp a_1$, so kann man B' und ebenso C', D' angeben. Benutzt man eine Hilfsebene $\Pi_3 \perp a_1$ im Punkte X, so erhält man in ihr als Seitenansicht des Fünfecks $ABEFC$ die Gerade $XB'''E'''$, wo $XB''' = XB_0$ und XE''' gleich dem Lot von X auf E_0F_0 ist ($B'''B' \parallel a_1$). $E'F'$ ist dann parallel zu a_1 und gleich E_0F_0 und geht verlängert durch E'''.

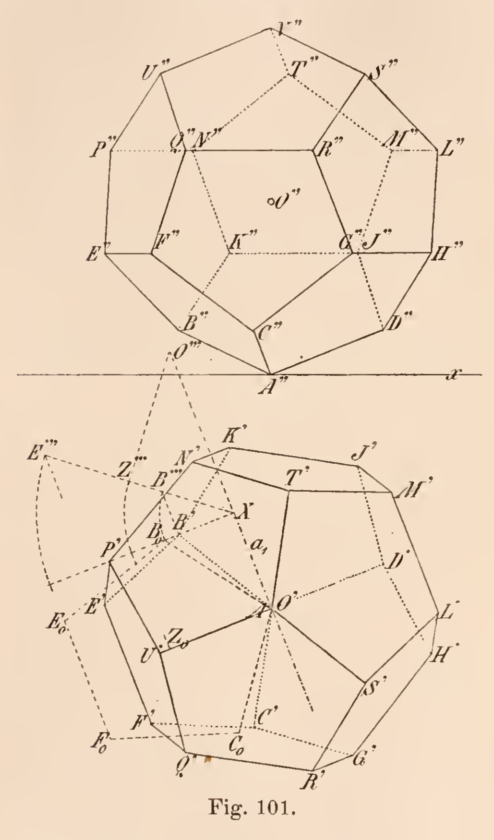


Fig. 101.

Ganz in gleicher Weise finden sich die ersten Projektionen der Eckpunkte G, H, J, K; die 10 übrigen Eckpunkte liegen diesen diametral gegenüber und sind dadurch direkt gegeben, somit ist der Grundriß des Zwölfflachs bestimmt. Zur Kontrolle dient, daß sich $B'E'$ und B_0E_0 auf a_1 schneiden müssen. Um den Aufriß zu zeichnen, suchen wir zuerst noch den Seitenriß O''' von O. O liegt aber senkrecht über dem Mittelpunkt Z des Fünfecks $ABEFC$, also ist $O'''Z''' \perp XZ'''$ und $XZ''' = AZ_0$. Da man nun Grundriß und Seitenriß von B, E und O kennt, kann man unmittelbar ihre Aufrisse finden und hieraus, wie leicht zu erkennen, die Aufrisse sämtlicher Ecken und so den Aufriß des Zwölfflachs selbst.

Auch hier mögen wieder die Beziehungen zwischen den einzelnen Strecken erwähnt werden. Wenn wir, wie vorher, mit s und d Seite und Diagonale des Fünfecks bezeichnen, so ist $d : s = s : d - s = G'D' : C'A = G'S' : H'L'$, da sich die Projektionen paralleler Strecken, wie die Strecken selbst verhalten. Nun ist: $D'S' = C'A$, also $s : d = D'S' : G'D'$ sowie $s : d - s = C'A : G'S'$, und durch Einfügen in die obige Relation kommt: $d : s : d - s = C'A : G'S' : H'L'$. Nimmt man $C'A$ an, so kann man hiernach die anderen Strecken finden.

Die Diagonalen MD und DG liegen wieder in einer Vertikal-

ebene und stehen aufeinander senkrecht (vergl. 141), folglich ist $(M'' \dashv x) - (D'' \dashv x) = D'G'$ und $(G'' \dashv x) - (D'' \dashv x) = M'D'$. Die Kanten AC und HL sind zu jenen Diagonalen parallel, also ist auch: $(C'' \dashv x) = H'L'$ und $(L'' \dashv x) - (H'' \dashv x) = AC'$.

131. Konstruktion des Zwanzigflachs. Beim Zwanzigflach stoßen in jeder Ecke fünf Kanten zusammen, die ein reguläres Fünfkant, und deren Endpunkte ein reguläres Fünfeck bilden. Je zwei aufeinanderfolgende Seiten des Fünfecks sind zwei Kanten des Zwanzigflachs, die nicht der nämlichen Seitenfläche angehören. Umgekehrt bilden je zwei von einer Ecke ausgehende Kanten, die nicht der gleichen Seitenfläche angehören, zwei Seiten eines regulären Fünfecks, dessen andere Seiten ebenfalls Kanten des Zwanzigflachs sind. Ganz ähnlich wie beim Zwölfflach zeigt man auch hier, daß die Eckpunkte paarweise auf sechs Achsen liegen,

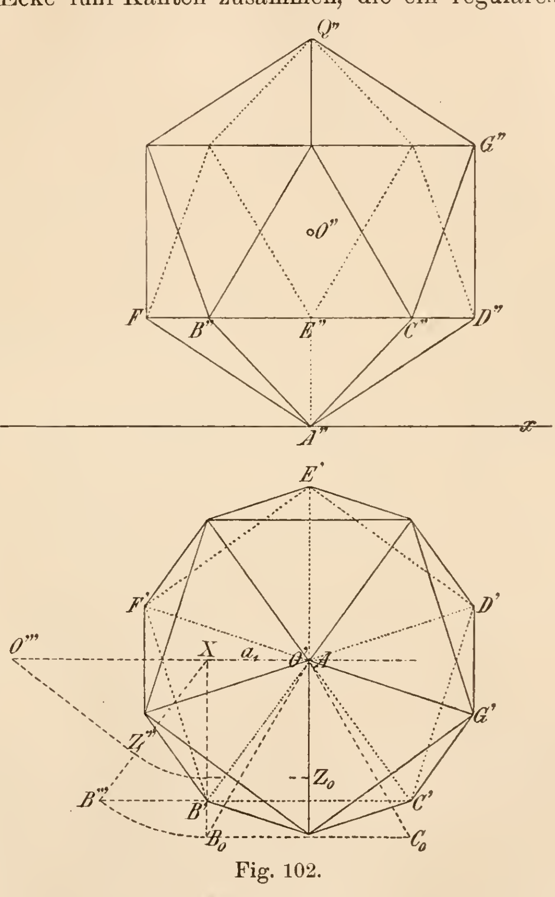


Fig. 102.

die durch einen Punkt, den Mittelpunkt, gehen, daß dieser Mittelpunkt senkrecht über der Mitte jeder Seitenfläche liegt und daß diese paarweise parallel sind.

Wählt man bei der Darstellung eine Achse etwa AQ senkrecht zum Grundriß, so bilden die Endpunkte der Kanten, die von A ausstrahlen, ein horizontales Fünfeck, ebenso die der von Q ausstrahlenden Kanten. Die Eckpunkte beider Fünfecke liegen sich diametral gegenüber, wonach sich der Grundriß sofort ergiebt (Fig. 102). Um den

Aufriß zu zeichnen, braucht man nur noch die Abstände der beiden horizontalen Fünfecke von der Grundrißebene zu kennen. Sind nun die Kanten aus A der Reihe nach AB, AC, AD, AE, AF, und ist a_1 die erste Spur der Fläche ABC, so ist $a_1 \perp AE'$. Durch Umlegen von $\triangle ABC$ um a_1 erhält man das gleichseitige Dreieck AB_0C_0. In einer Hilfsebene $\Pi_3 \perp a_1$ im Punkte X sucht man den Seitenriß B''' von B ($XB_0 = XB'''$) und den Seitenriß Z''' von dem Mittelpunkte Z des $\triangle ABC$ ($AZ_0 = XZ'''$). Da der Mittelpunkt O des Zwanzigflachs senkrecht über der Mitte Z des $\triangle ABC$ liegt, so ist $Z'''O''' \perp XB'''$. Aus Grund- und Seitenriß von B und O findet man aber die Aufrisse dieser beiden Punkte und damit die Aufrisse aller 12 Eckpunkte. Man hätte bei der Konstruktion auch das ebene reguläre Fünfeck mit den Seiten AB und AD, dessen erste Spurlinie auf AC' senkrecht steht, benutzen können, dann wäre die Konstruktion von O überflüssig geworden.

Die Höhe der Ecken über der Horizontalebene bestimmen sich auch durch folgende Betrachtung. Es ist $AD' \perp B'F'$ und folglich auch $AD \perp BF$, da BF horizontal; analog ist $AE \perp DG$, da diese Kanten in der gleichen gegenseitigen Lage sich befinden wie jene. Man folgert daraus (wie in 129), daß $A''E'' = D'G'$ und $D''G'' = AE'$.

132. Legt man bei der Darstellung eine Seitenfläche des Zwanzigflachs etwa $\triangle ABC$ in die Grundrißebene hinein, und sind die Kanten aus A der Reihe nach AB, AC, AD, AE, AL, so läßt sich die räumliche Lage von AD, AE, AL in folgender Weise bestimmen (Fig. 103). AB, AC, AD bilden ein Dreikant, für das $\angle BAC = \angle CAD = \frac{2}{3} R$ und $\angle BAD = \frac{6}{5} R$ ist, da ja nach Früherem BA und AD zwei Seiten eines regulären Fünfecks sind; ganz ebenso bestimmt sich die Kante AL. Auch die Kanten AB, AC, AE bilden ein Dreikant, für das $\angle BAC = \frac{2}{3} R$ und $\angle CAE = \angle BAE = \frac{6}{5} R$ ist. Man zeichnet zunächst das um AB umgelegte Kantenfünfeck $BAE_0G_0H_0$ und dreht es um AB zurück, so daß E' auf die Halbierungslinie des $\angle BAC$ zu liegen kommt; durch Affinität findet man auch G' und H' ($H'B = E'A$, $G_0E_0 \times G'E'$ auf AB). Beachtet man noch, daß die Ecken paarweise diametral einander gegenüberliegen, so kann man den Grundriß vollständig zeichnen. Im Aufriß liegen die 12 Ecken zu je drei auf vier Geraden parallel zur x-Achse, deren Abstände noch zu konstruieren sind. Dies geschieht wieder durch Benutzung einer Hilfsebene $\Pi_3 \perp AB$ im Punkte X, in der man die Seitenrisse E''' und G''' zeichnet.

Anstatt das Fünfeck $BAEGH$ zu benutzen, hätte man auch das Fünfeck $CALHJ$ bei der Konstruktion verwerten können.

Wiederum kann man gewisse Streckenbeziehungen zur Konstruktion von Grund- und Aufriß verwenden. Ist nämlich r_1 der Radius des Kreises durch $ABCG' \ldots$ und r_2 der des Kreises durch $D'E'H'J' \ldots$, so geht die Beziehung: $O'B : O'H' = BC : H'K'$ über

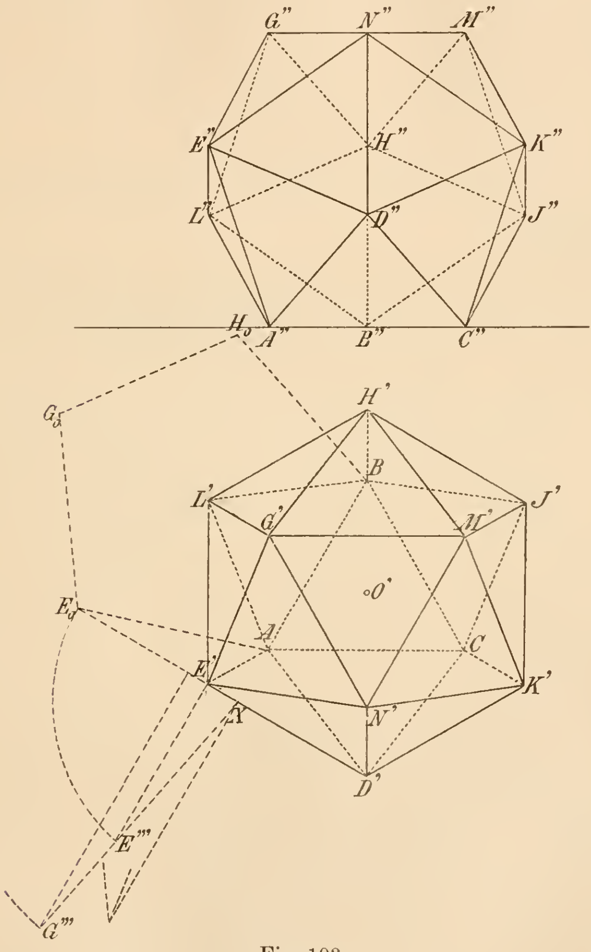


Fig. 103.

in: $r_1 : r_2 = s : d$, wo s und d Seite und Diagonale eines regulären Fünfecks sind. Da $M'C = r_1$ und $M'C : H'B = d : s = r_2 : r_1 = r_1 : r_2 - r_1$, folgt: $H'B = r_2 - r_1$, und da die Kanten JK und HB aufeinander senkrecht stehen, ergiebt sich wie früher: $H''B'' = J'K' = r_2$ und $J''K'' = H'B = r_2 - r_1$.

133. Außer den angeführten gewöhnlichen regelmäßigen

Vielflachen giebt es noch verschiedene sternförmige regelmäßige Vielflache. Diese Vielflache sind dadurch charakterisiert, daß entweder die Seitenflächen reguläre Sternfünfecke oder die Ecken reguläre Sternfünfkante sind; sie lassen sich aus den gewöhnlichen Vielflachen ableiten, indem man ihre Ecken entweder wie die des Zwölf- oder wie die des Zwanzigflachs anordnet, aber in anderer Reihenfolge durch Kanten und Flächen verbindet. Sie sollen hier nicht weiter untersucht werden, vielmehr mag es genügen, auf die bezügliche Speziallitteratur hinzuweisen[4]).

134. Es mögen hier noch einige Fragen besprochen werden, die sich auf die einfachsten Vielflache, nämlich Tetraëder und Würfel beziehen.

Von einem Tetraëder kennt man beide Projektionen, jedoch nur der *Form* nicht der *Lage* und *Größe* nach; dasselbe sei zu zeichnen. Die gesuchten Projektionen nennen wir

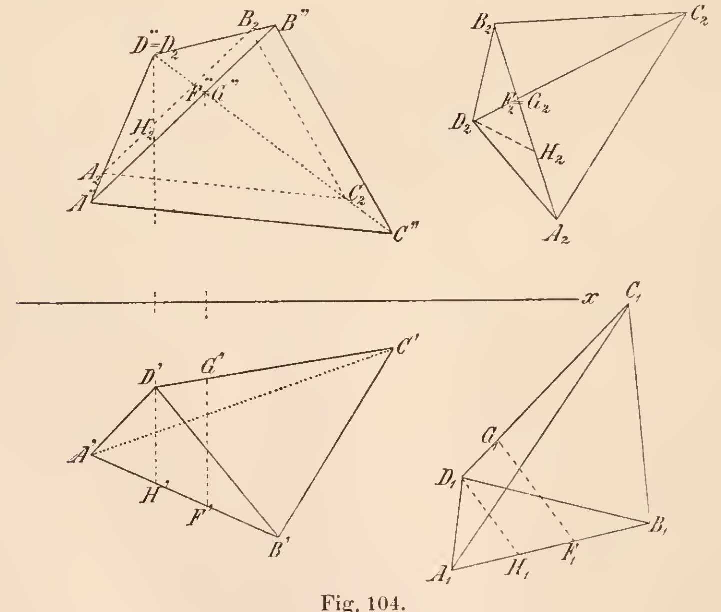


Fig. 104.

wie gewöhnlich $A'B'C'D'$ und $A''B''C''D''$; die gegebenen Figuren seien $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ und zwar setzen wir voraus, daß: $A_2B_2C_2D_2 \sim A''B''C''D''$ und $A_1B_1C_1D_1 \cong A'B'C'D'$ (Fig. 104). In der That können wir den Grundriß des Tetraëders auch der Größe nach wählen, also kongruent zu $A_1B_1C_1D_1$ annehmen; damit ist dann

auch die Größe des gesuchten Tetraëders fixiert. $A'B'C'D'$ und $A''B''C''D''$ sind nun dadurch als orthogonale Projektionen des nämlichen Tetraëders charakterisiert, daß die Linien $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$ senkrecht zu einer Geraden, nämlich der x-Achse, stehen, also untereinander parallel sind. In dem Schnittpunkte der Geraden $A''B''$ und $C''D''$ fallen die Aufrisse $F''=G''$ zweier Punkte zusammen, deren Grundrisse F' und G' resp. auf $A'B'$ und $C'D'$ liegen; dabei ist: $A'F':F'B'=A''F'':F''B''$ und $C'G':G'D'=C''G'':G''D''$. Ist $A_2B_2 \times C_2D_2 = F_2 = G_2$ und sind F_1 und G_1 die homologen Punkte zu F' und G' in der Figur $A_1B_1C_1D_1$, so folgen aus jenen Relationen die weiteren: $A_1F_1:F_1B_1 = A_2F_2:F_2B_2$ und $C_1G_1:G_1D_1 = C_2G_2:G_2D_2$, wonach sich F_1 und G_1 direkt zeichnen lassen. Legt man nun die Figur $A_1B_1C_1D_1F_1G_1$ so in die Grundrißebene, daß $F_1G_1 \perp x$-Achse wird, so stellt sie den gesuchten Grundriß unseres Tetraëders vor. Um den Aufriß zu finden, ziehe man durch D' eine Parallele zu $F'G'$, die $A'B'$ in H' schneiden mag und bestimme H_2 auf A_2B_2 gemäß der Relation: $A_2H_2:H_2B_2 = A'H':H'B'$. Nun gebe man der Figur $A_2B_2C_2D_2F_2H_2$ eine solche Lage, daß D_2H_2 in die Verlängerung von $D'H'$ fällt, dann ist der gesuchte Aufriß zu dieser Figur ähnlich und ähnlich gelegen. Man hat nur $D''=D_2$ zu wählen und auf den Geraden D_2A_2, D_2B_2 und D_2C_2 die Punkte $A''B''$ und C'' beziehentlich so zu bestimmen, daß $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ senkrecht zur x-Achse werden.

135. Einen Würfel von gegebener Kantenlänge zu zeichnen, wenn man die Richtungen der ersten Projektionen seiner Kanten kennt.

Sei A eine Ecke und seien AB, AC, AD die drei von dieser Ecke ausgehenden Kanten des Würfels, so mögen A und die Richtungen b', c', d', auf denen die Punkte B', C', D' gelegen sind, gegeben sein (Fig. 105). Da nun die Kante AB auf der Seitenfläche ACD senkrecht steht, so steht b' auf der ersten Spurlinie von ACD senkrecht. Analoges gilt für die beiden anderen Kanten. Das Spurendreieck $B_1C_1D_1$ in einer horizontalen Hilfsebene ist also so beschaffen, daß b', c', d' seine Höhen sind; dabei kann ein Spurpunkt, etwa B_1, noch beliebig gewählt werden, was einem bestimmten Abstand der Ecke A von der Hilfsebene entspricht. Legt man jetzt die Ebene B_1AC_1 um die Spur B_1C_1 in die Hilfsebene um, so erhält man $B_1A_0C_1$, wo $AA_0 \perp B_1C_1$ und $B_1A_0 \perp C_1A_0$; ganz ebenso findet man $C_1A^0D_1$ durch Umlegen der Ebene C_1AD_1. Auf A_0B_1, A_0C_1 resp. A^0C_1 und A^0D_1 trägt man die Kantenlänge des Würfels gleich $A_0B_0 = A_0C_0 = A^0C^0 = A^0D^0$ auf und gewinnt dann durch Zurück-

drehen der umgelegten Ebenen B', C', D' und damit die erste Projektion des Würfels. Um den Aufriß des Würfels zu zeichnen, hat man noch die Abstände der Ecken $ABCD$ von der Hilfsebene zu bestimmen, was in bekannter Weise geschieht; so ergiebt sich z. B. der Abstand AA_0 des Punktes A von der Hilfsbene als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $= A_0J$ und dessen andere Kathete $= AJ$ ist.

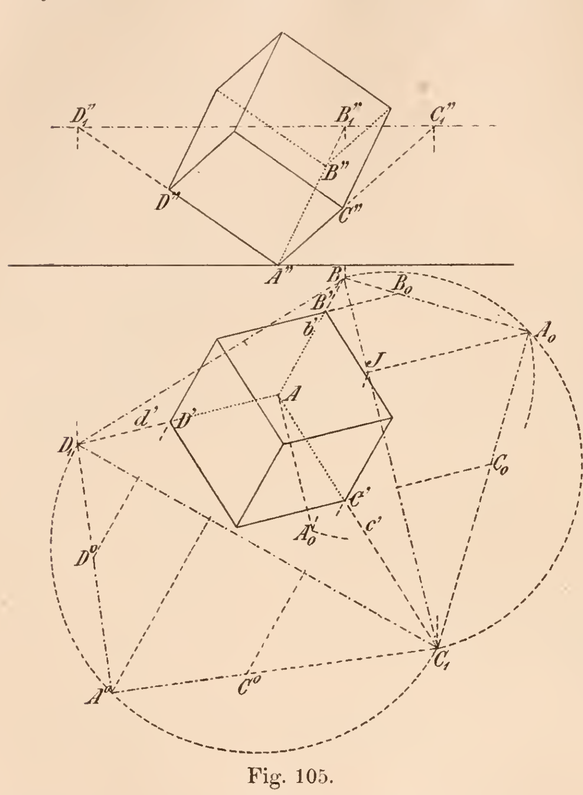


Fig. 105.

136. Einen Würfel zu zeichnen, wenn man die Längen der ersten Projektionen seiner Kanten kennt.

Eine Ecke des Würfels, etwa A, verlegen wir in die Horizontalebene, sind dann B, C und D die benachbarten Ecken und B', C', D' ihre Projektionen, so ist:

$$AB'^2 + BB'^2 = AC'^2 + CC'^2 = AD'^2 + DD'^2 = k^2,$$

wo k die Länge der Kanten des Würfels bedeutet. Nun läßt sich aber auch leicht zeigen, daß:

$$BB'^2 + CC'^2 + DD'^2 = k^2$$

ist. Errichtet man nämlich in A eine Vertikale, macht sie $= k$ und fällt von ihrem Endpunkte Lote auf die Kanten AB, AC, AD, so werden auf ihnen Strecken abgeschnitten, welche resp. gleich BB', CC', DD' sind. Diese in A zusammenstoßenden Strecken bestimmen ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Diagonale eben jene Vertikale k ist. Für ein solches Parallelepipedon gilt aber der Satz, daß die Summe der Quadrate dreier zu einander rechtwinkliger Kanten gleich dem Quadrate der Diagonale ist.

Aus jenen Relationen folgt nun die weitere:

$$AB'^2 + AC'^2 + AD'^2 = 2\,k^2,$$

die unmittelbar eine Konstruktion der Kantenlänge k ermöglicht, wie dies Fig. 106 zeigt (wobei $AB' = b$, $AC' = c$, $AD' = d$). Hiermit kennt man auch sofort die Neigungswinkel, die die Kanten AB, AC, AD mit der Horizontalebene einschließen. Nimmt man nun eine Aufrißebene zu Hilfe, die einer Kante, etwa AB, parallel ist und dreht die beiden anderen Kanten AC und AD um eine in A vertikale Achse, bis sie zur Aufrißebene parallel werden, so erhält man $A''B''$, $A''C_\triangle''$, $A''D_\triangle''$, $AB' = b$, $AC_\triangle' = c$, $AD_\triangle' = d$. Dreht man jetzt die beiden Kanten AC und AD wieder zurück, bis sie ihre richtige räumliche Lage eingenommen haben, d. h. bis sie beide auf AB senkrecht stehen, so erhält man die gewünschten Projektionen $A''C''$, $A''D''$ (wo $C_\triangle''C'' \parallel D_\triangle''D'' \parallel x$-Achse, $A''C'' \perp A''B''$, $A''D'' \perp A''B''$) und AC', AD' (wo $AC' = AC_\triangle'$, $AD' = AD_\triangle'$). Die weiteren Kanten des Würfels lassen sich dann unmittelbar in ihren Projektionen zeichnen.

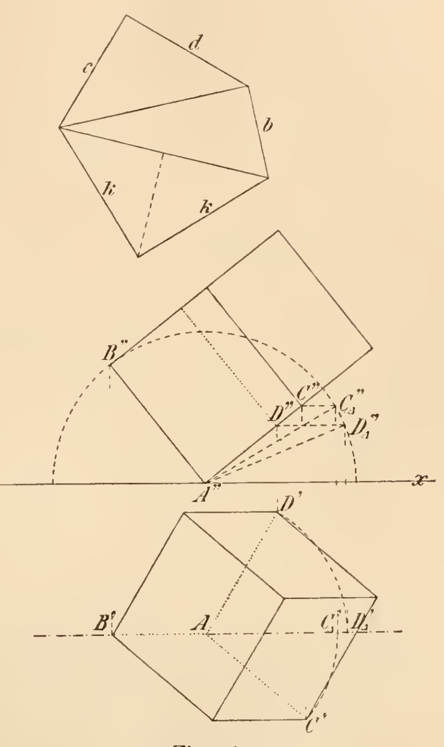


Fig. 106.

137. Einem Vierflach eine Kugel umzuschreiben.

Der Einfachheit halber mögen drei Ecken des Vierflachs $ABCD$ in der Horizontalebene gelegen sein (Fig. 107). Dann gehört der Kreis durch die Ecken ABC der Kugel an und ihr Mittelpunkt M liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M' dieses Kreises. Wählt man nun J auf diesem Kreise so, daß $D'J \parallel x$-Achse, so ist DJ eine zur Aufrißebene parallele Sehne der Kugel. Nun geht jede in der Mitte einer Kugelsehne zu ihr senkrechte Ebene durch den Kugelmittelpunkt. Die Mittelebene der Sehne DJ projiziert

sich aber im Aufriß als eine Gerade, die auf $D''J''$ in der Mitte senkrecht steht, auf der sich also M'' befinden muß. Wählt man endlich auf dem Kreise durch ABC einen Punkt K so, daß $M'K \parallel x$-Achse, so ist MK ein Kugelradius, dessen wahre Größe gleich $M''K''$ ist, wonach sich die Kugelprojektionen direkt zeichnen lassen.

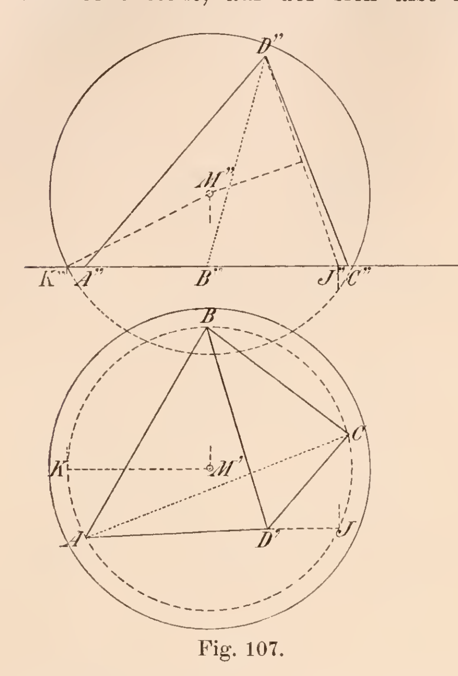


Fig. 107.

138. Einem Vierflach eine Kugel einzubeschreiben.

Der Kugelmittelpunkt muß von den vier Flächen des Körpers gleichen Abstand besitzen. Sind nun A, B, C, D wieder die vier Ecken und konstruiert man drei Ebenen, die die Flächenwinkel längs der Kanten AB, BC, CA halbieren, so hat ihr Schnittpunkt offenbar gleichen Abstand von den vier Seitenflächen, ist also der gesuchte Kugelmittelpunkt. Durch ihn gehen natürlich auch die Halbierungsebenen der Winkel an den anderen Kanten. Je nachdem man nun bei jenen Kanten die Innen- oder die Außenwinkel halbiert, erhält man acht verschiedene Lagen und demnach acht einbeschriebene Kugeln, die freilich die Flächen nicht alle von innen, sondern teilweise von außen berühren. Halbiert man überall die Innenwinkel, so liegt die einbeschriebene Kugel im Innern des Vierflachs.

Um diese Kugel zu finden, setzen wir wieder voraus, daß die Ecken ABC in der Grundrißebene liegen, dann können wir uns zur Konstruktion der Halbierungsebenen in den Kanten AB, BC, CA der folgenden Methode bedienen (Fig. 108). Die Halbierungsebene durch die Kante AB schließt mit der Seite ABD und der Grundrißebene gleiche Winkel ein, also auch mit jeder anderen Horizontalebene. Legt man demnach durch die Ecke D eine horizontale Hilfsebene, so wird dieselbe von jener Halbierungsebene in einer Hilfsspur c geschnitten ($c \parallel AB$), und es muß D von c und AB gleichen Abstand besitzen, d. h. es muß $DH = DL$ sein, denn $\triangle\ DHL$ ist gleich-

schenklig wegen der Gleichheit der Winkel bei H und L. Nun bestimmt sich DH als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $D'H$ und $D''E$; man hat also nur $D'L' = DL = DH$ auf die Verlängerung von HD' aufzutragen, um L' und damit c' zu finden. Analog verfährt man, um die Projektionen a' und b' der Hilfsspuren a und b bei den Halbierungsebenen durch die Kanten BC und CA zu gewinnen. Bezeichnen wir jetzt das Dreieck der drei Hilfsspuren mit $A_1B_1C_1$, so sind AA_1, BB_1, CC_1 die gegenseitigen Schnittlinien unserer Halbierungsebenen und ihr gemeinsamer

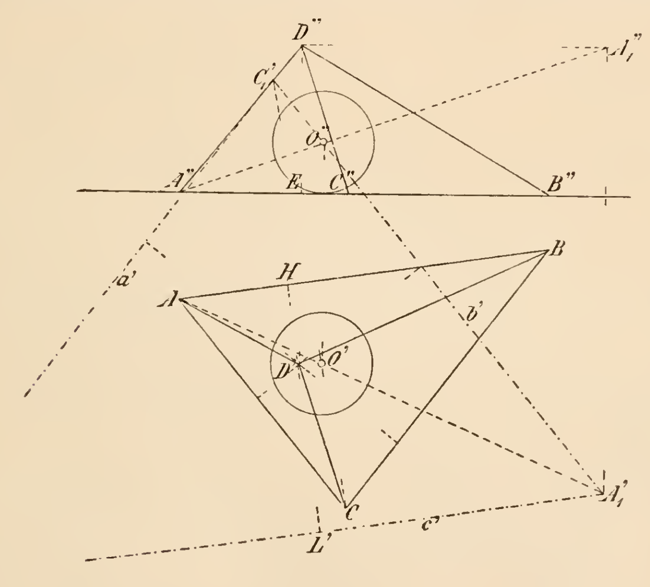


Fig. 108.

Punkt O ist der gesuchte Kugelmittelpunkt ($O' = AA_1' \times BB_1' \times CC_1'$ und O'' auf $A''A_1''$). Der Kugelradius ist gleich dem Abstande des Punktes O'' von der x-Achse.

Für die Halbierungsebene des Außenwinkels an der Kante AB gilt wiederum die Beziehung, daß der Abstand ihrer Hilfsspur von D gleich DH ist, nur ist dieser Abstand in entgegengesetzter Richtung wie vorher aufzutragen. Hieraus folgt sofort die Konstruktion der anderen berührenden Kugeln.

Die horizontale Hilfsebene kann auch in beliebigem Abstand von der Grundrißebene gewählt werden. Dann hat man zunächst das Hilfsspurdreieck der Flächen DAB, DBC, DCA zu zeichnen, was eine geringe Abänderung obiger Konstruktion nach sich zieht.

Ebene Schnitte und Netze von Vielflachen, insbesondere Prismen und Pyramiden.

139. Ist ein ebenflächiger Körper durch seine Projektionen gegeben und soll man einen ebenen Schnitt durch ihn legen, so geht man meist von der Bestimmung der Ecken des Schnittpolygons aus; in speziellen Fällen ist es möglich, sogleich die Seiten desselben zu zeichnen.

Um nun auf einer Polyëderkante JK ihren Schnittpunkt S mit der gegebenen Ebene E zu finden, benutzt man am besten zwei in E gelegene parallele Gerade, etwa zwei Hauptlinien $a \| b \| \Pi_1$. Man denke sich (Fig. 109) durch JK eine vertikale Hilfsebene, die a und b in P und Q resp. schneiden mag, dann ist: $J''K'' \times P''Q'' = S''$. Auf diese Weise findet man alle Ecken des Schnittpolygons. Von den Polyëderkanten sind natürlich nur die zu benutzen, die unverlängert die Ebene E wirklich treffen.

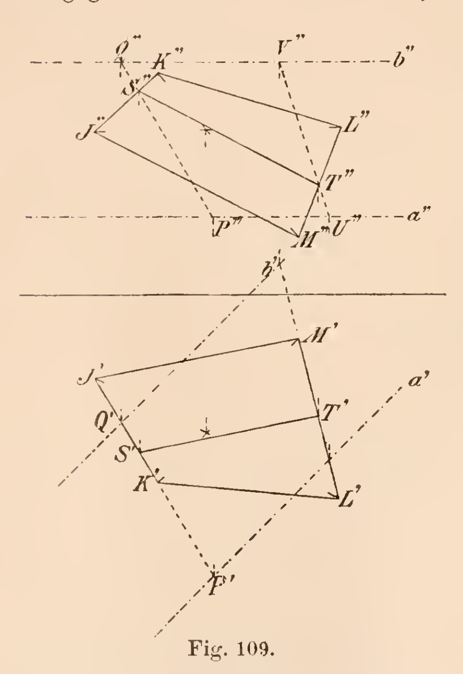


Fig. 109.

Um die wahre Gestalt der Seitenflächen und der Schnittfläche des Körpers zu bestimmen, muß man ihre Ebenen zu einer Tafel parallel drehen (85) oder in die Tafel umlegen (80). Hierbei genügt es, die Endlage einer Ecke des betreffenden Polygons durch die Drehung zu bestimmen; die übrigen ergeben sich aus der Affinität, die zwischen seiner Projektion und Umlegung besteht. — Legt man alle Seitenflächen eines Polyëders in einer Ebene nebeneinander, so daß jede mit der vorhergehenden eine Kante gemein hat, so erhält man ein Netz des Vielflachs.

Statt der Polyëderkanten kann man zuweilen direkt die Polyëderflächen mit der Ebene E schneiden und erhält so die Seiten des Schnittpolygons. Die weiteren Beispiele zeigen die Anwendung dieses Verfahrens auf Prismen und Pyramiden.

140. Eine prismatische Fläche wird von einer Geraden beschrieben, die an einem ebenen (offenen oder geschlossenen) Polygon so hingleitet, daß sie beständig die gleiche Richtung beibehält. Das Polygon heißt Leitlinie, die bewegliche Gerade wird im allgemeinen Erzeugende, im besonderen, wenn sie durch eine Ecke des Polygons geht, Kante genannt. Zwei parallele Ebenen schneiden die prismatische Fläche in kongruenten Polygonen, der von ihnen begrenzte Körper heißt Prisma. Jene Polygone heißen die Grundfläche oder Basis resp. die Endfläche, die übrigen Flächen (Parallelogramme) die Seitenflächen des Prismas. Stehen die Kanten senkrecht auf der Basis, so heißt das Prisma gerade, sonst heißt es schief. Der Abstand zwischen der Grund- und Endfläche heißt die Höhe.

Eine pyramidale Fläche entsteht, wenn eine Gerade an einem ebenen Polygon so hingleitet, daß sie dabei beständig durch einen festen Punkt geht. Das Polygon heißt wieder Leitlinie, die bewegliche Gerade wieder Kante oder Erzeugende, je nachdem sie durch eine Ecke des Polygons verläuft oder nicht; den festen Punkt nennt man Spitze oder Scheitel. Parallele Ebenen schneiden die Fläche in ähnlichen und ähnlich gelegenen Polygonen resp. Polygonstücken. Die pyramidale Fläche besteht aus zwei symmetrischen sich im Scheitel gegenüberstehenden Flächenteilen. Eine Ebene schneidet eine solche Fläche in einem Polygon, oder in mehreren Polygonstücken, je nachdem eine Parallelebene durch den Scheitel nur diesen selbst oder mehrere Erzeugende enthält.

Der von einer Ebene und einer pyramidalen Fläche begrenzte Körper heißt Pyramide. Erstere wird Grundfläche, die übrigen Flächen (Dreiecke) werden Seitenflächen genannt. Unter der Höhe der Pyramide versteht man das von der Spitze auf die Basisfläche gefällte Lot.

141. Ein reguläres Prisma, dessen Basis und Achse gegeben ist, zu zeichnen, sowie einen ebenen Schnitt desselben und das Netz des einen Teiles anzugeben (Fig. 110).

Bei einem regulären Prisma ist die Grundfläche ein reguläres Polygon und die Kanten stehen auf ihr senkrecht; die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grund- und Endfläche heißt die Achse, und ist offenbar zu den Kanten parallel. Sei JK die Achse und $A_0B_0C_0D_0E_0$ das um die Hauptlinie h der Grundebene zu Π_1 parallel gedrehte reguläre Polygon, so benutze man eine vertikale Hilfsebene durch JK und drehe sie parallel Π_1 um die Hauptlinie JL. Die mit der Hilfsebene gedrehte Achse des Prismas ist dann $J'K_\Delta$;

die Projektion von $A_0B_0C_0D_0E_0$ auf die Hilfsebene fällt mit $J'K'$, diejenige von $ABCDE$ mit $A_\triangle D_\triangle$ zusammen, wo $A_\triangle D_\triangle \perp J'K_\triangle$ und $J'A_\triangle = (A_0 \dashv h')$. Aus der Hilfsprojektion des Basispolygons ergeben sich aber sofort sein Grund- und Aufriß ($A_\triangle A' \parallel h'$ und $A_0A' \perp h'$ etc., $A_\triangle A' = (A'' \dashv J''L'')$ etc.). Hierauf lassen sich die Projektionen des Prismas leicht vervollständigen.

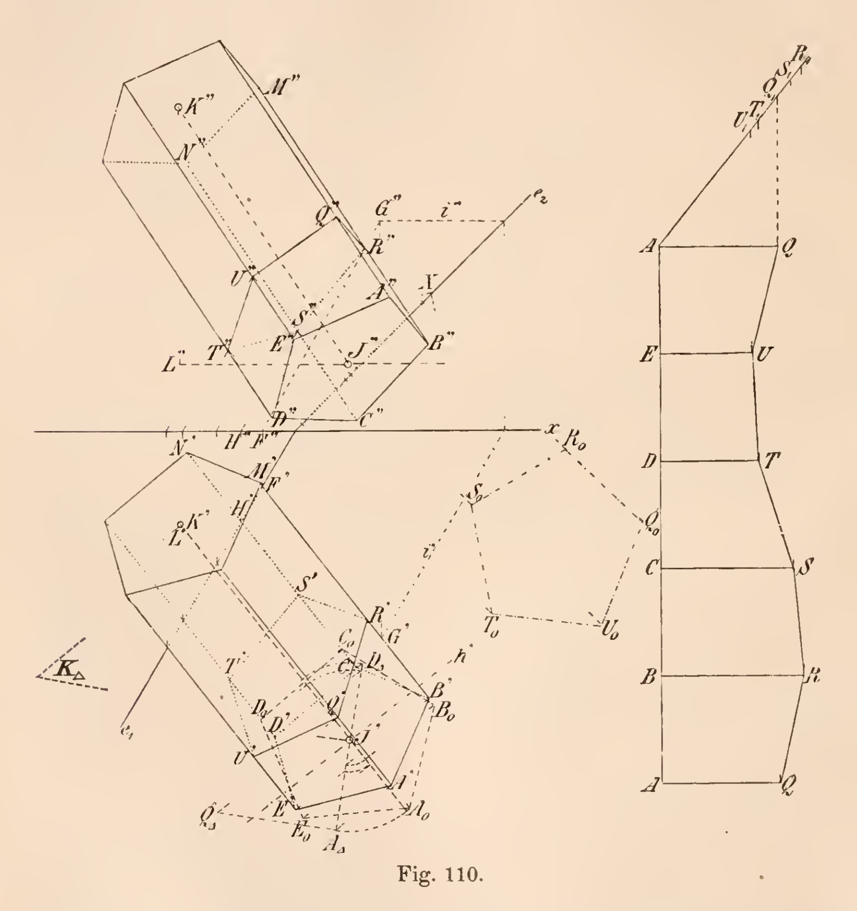


Fig. 110.

Ist die Schnittebene E durch ihre Spuren e_1, e_2 gegeben, so zeichne man zunächst in ihr eine Hauptlinie i. Die Vertikalebene in $B'M'$ schneidet E in der Geraden FG; R'' ist also der Aufriß der auf BM gelegenen Ecke des Schnittpolygons. Hiernach lassen sich die Projektionen dieses Polygons $QRSTU$ angeben; denn es ist $H''S'' \parallel F''G''$ und $H' = e_1 \times C'N'$ etc. Um seine wahre Größe $Q_0R_0S_0T_0U_0$ zu finden, legen wir es um die Spur e_2 in Π_2 um; dabei ist

$Q_0Q'' \perp e_2$ und Q_0X ist die Hypotenuse eines Dreiecks mit den Katheten $Q''X$ und $(Q' \dashv x)$. Zur Bestimmung der übrigen Punkte kann man auch die Affinität von $Q''R''S''T''U''$ und $Q_0R_0S_0T_0U_0$ benutzen.

Um das Netz des einen Stückes des Prismas mit der Grundfläche $ABCDE$ und der Endfläche $QRSTU$ zu zeichnen, braucht man nur zu bedenken, daß die Seitenflächen Trapeze sind, deren Seiten man kennt. Im Trapez $ABRQ$ ist $AB = A_0B_0$, $QR = Q_0R_0$, $AQ = A_\triangle Q_\triangle$ und $\angle ABR = \angle BAQ = R$; ferner ist: $AQ : BR : CS : DT : EU = A''Q'' : B''R'' : C''S'' : D''T'' : E''U''$. In der Figur ist $AQ_1 = 2\,A''Q''$ und $Q_1Q \parallel AE$ gewählt; ist dann ebenso $AR_1 = 2\,A''R''$, etc., so muß auch $R_1R \parallel AE$ sein, etc. Es mag noch erwähnt werden, daß auch die Fünfecke $ABCDE$ und $QRSTU$ affin sind, die Affinitätsachse ist die Schnittlinie ihrer beiden Ebenen, auch die Projektionen sind infolgedessen affin.

142. Von einem schiefen Prisma soll das Netz entwickelt werden (Fig. 111). Seine Grundfläche $ABCD$ mag in der Horizontalebene liegen und die Projektionen der Kante AK mögen gegeben sein, dann lassen sich die Projektionen des Prismas direkt zeichnen. Um das Netz zu bestimmen verfährt man am besten so, daß man einen Schnitt senkrecht zu den Kanten ausführt und dessen wahre Größe sucht. Dazu benutze man eine zu den Kanten parallele Vertikalebene als Seitenrißebene und zeichne den Seitenriß des Prismas. Die Ebene des Normalschnittes hat die Spuren $e_1 \perp A'K'$, $e_2 \perp A''K''$, $e_3 \perp A'''K'''$ und der Seitenriß des Schnittpolygons fällt mit e_3 zusammen, woraus sich auch seine anderen Projektionen ergeben. Um die wahre Größe von $LMNO$ zu finden, legt man dieses Viereck um e_1 in Π_1 nieder, was mit Hilfe des Seitenrisses in bekannter Weise geschieht. Die Vierecke $ABCD$, $L'M'N'O'$, und $L_0M_0N_0O_0$ sind affin, e_1 ist für alle drei die gemeinsame Affinitätsachse.

Schneidet man die prismatische Fläche längs einer Kante auf und breitet sie in eine Ebene aus, so werden alle Kanten parallel und die Seiten des Normalschnittes bilden Stücke einer dazu senkrechten Geraden. Hiernach kann man das Netz zeichnen, indem man die Teilstücke der Kanten aus dem Seitenriß direkt entnehmen kann. In der Figur ist nur das Netz des einen Stückes des Prismas entworfen.

Handelt es sich nur um das Netz, so kann man die Projektionen des Normalschnittes fortlassen, da alsdann die Konstruktion seiner wahren Gestalt $L_0M_0N_0O_0$ genügt. Wollte man einen schiefen

Schnitt zeichnen, so könnte man ganz wie vorher beim geraden Prisma verfahren.

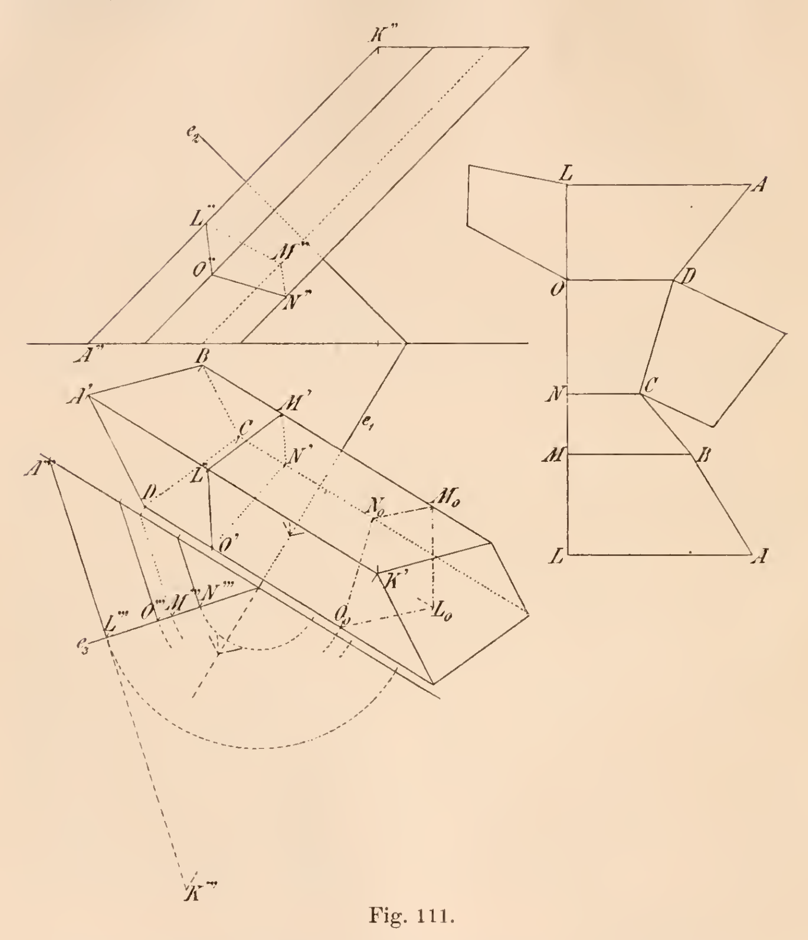


Fig. 111.

143. Eine beliebige Pyramide mit einer Ebene zu schneiden und ihr Netz zu entwickeln (Fig. 112). Wir wollen annehmen, daß die Basisebene *ABCDE* der Pyramide mit der Horizontalebene zusammenfällt; aus der Lage dieses Polygons und der der Spitze gehen die Projektionen der Pyramide hervor. Sind e_1 und e_2 die Spuren der Schnittebene E, so kann man zunächst $J = AS \times \mathsf{E}$ in der bekannten Weise finden. Das Schnittpolygon *JKLMN* bestimmt sich dann dadurch, daß es mit *ABCDE* in perspektiver Lage ist (vergl. 165), d. h. daß die Schnittpunkte homologer Seiten $AB \times JK$, $BC \times KL$, $CD \times LM$, ... auf e_1 liegen, wie das ja klar

ist. Die Konstruktion läßt sich auch in der Weise ausführen, daß man eine horizontale Hilfsebene durch die Spitze S benutzt. E besitzt dann die Hilfsspur $e_3 \parallel e_1$ und die Seitenfläche SAB die Hilfsspur $SQ \parallel AB$ und es ist $J'K'$ die Verbindungslinie des Punktes $e_1 \times AB$ mit $e_3' \times S'Q'$; analog konstruiert man $K'L'$ etc. Endlich könnte man bei der Konstruktion wieder eine Hilfsebene $\perp e_1$ wählen und würde dann wie bei den vorausgehenden Aufgaben verfahren.

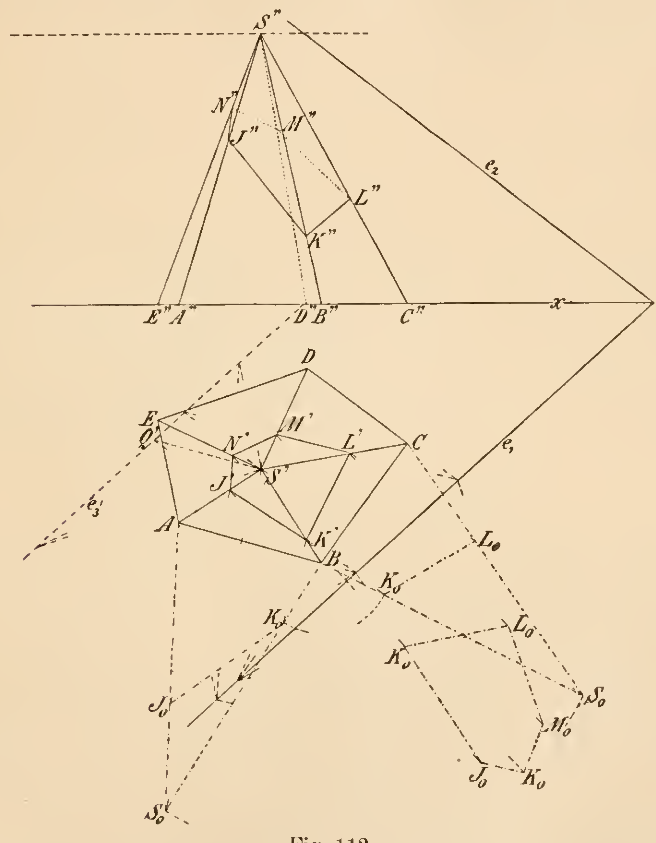


Fig. 112.

Um das Netz zu zeichnen, legt man die Schnittflächen um ihre Basislinien nieder, also SAB um AB, SBC um BC, etc.; so entsteht S_0AB und J_0K_0 und es ist $J'K' \times J_0K_0 = AB \times e_1$ etc. Das Polygon $JKLMN$ legt man um die Spur e_1 in Π_1 nieder.

144. Den Stumpf einer vierseitigen Pyramide zu zeichnen, wenn das Basisviereck, sowie der Neigungswinkel α

der Schnittfläche gegen die Basis gegeben sind, und die Schnittfläche ein gegebenes Parallelogramm ist.

Um eine vierseitige Pyramide mit dem Scheitel S und dem Grundviereck $ABCD$ in einem Parallelogramm $JKLM$ zu schneiden, muß man die Schnittebene parallel den Geraden $SU = SAB \times SCD$ und $SV = SBC \times SDA$ wählen (Fig. 113). Der Schnittpunkt von JK (in SAB) und LM (in SCD) muß nämlich auf SU liegen, und da $JK \parallel LM$, so folgt weiter $JK \parallel SU \parallel LM$. Die Seiten des Parallelogramms $JKLM$ sind paarweise den Geraden SU und SV parallel.

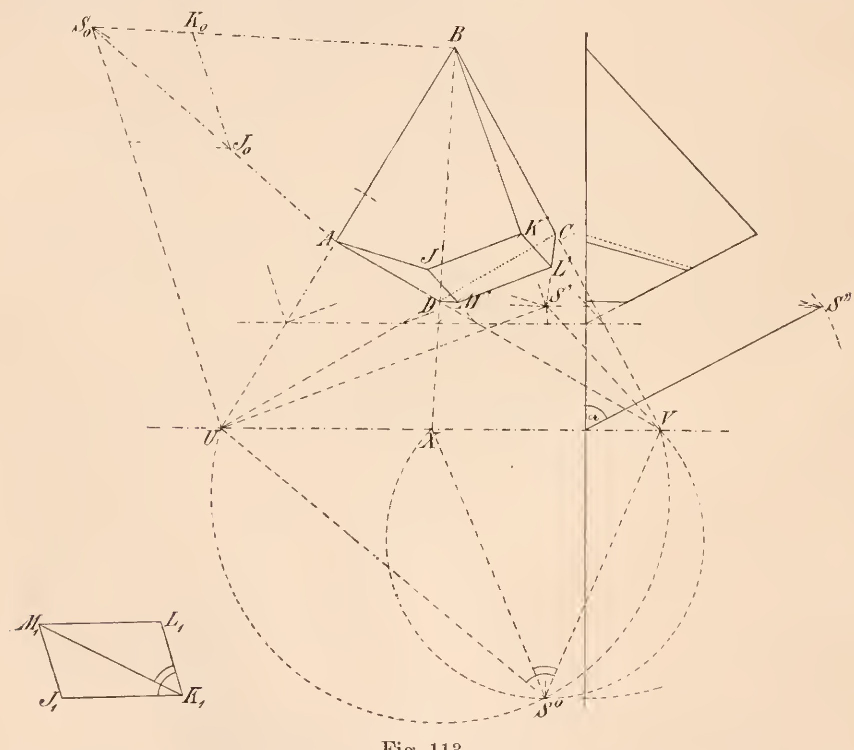


Fig. 113.

Die Diagonalen JL und KM des Parallelogramms müssen in den Ebenen SAC resp. SBD gelegen sein, also muß $JL \parallel SY$ und $KM \parallel SX$ sein, wo $SY = SAC \times SUV$ und $SX = SBD \times SUV$ ist. Hiernach läßt sich nun die Konstruktion leicht durchführen. Mit $ABCD$ ist auch U, V, X und Y bekannt. Denken wir uns die Ebene SUV um UV in Π_1 umgelegt, so bestimmt sich S^0 dadurch, daß $\angle\, US^0V = \angle\, J_1K_1L_1$ und $\angle\, VS^0X = \angle\, L_1K_1M_1$ ist; S^0 erscheint also als Schnittpunkt zweier Kreise, die über den Sehnen UV und VX resp. beschrieben

sind und die bezüglichen Winkel als Peripheriewinkel über diesen Sehnen fassen. Mit Hilfe einer Ebene $\Pi_3 \perp UV$ drehen wir jetzt S^0UV um UV, bis dieses Dreieck mit Π_1 den gegebenen Winkel α einschließt, dann ist S (S', S'') die Spitze einer Pyramide, von der der gesuchte Pyramidenstumpf ein Teil ist. In der That schneidet jede zu USV parallele Ebene aus dieser Pyramide ein Parallelogramm, welches zu dem gegebenen $J_1K_1L_1M_1$ ähnlich ist. Legt man nun noch die Seitenfläche SAB um AB in Π_1 um, so bestimmt sich J_0K_0 in ihr dadurch, daß $J_0K_0 = J_1K_1$ und $J_0K_0 \parallel S_0U$ ist; dadurch ergiebt sich dann sofort $J'K'$ und somit das Parallelogramm und die Spur der Schnittfläche in der Basisebene.

Die Aufgabe: eine abgestumpfte vierseitige Pyramide zu zeichnen, wenn die Vierecke in der Grund- und in der Schnittfläche, sowie der Neigungswinkel α dieser beiden Flächen bekannt sind, läßt sich ähnlich behandeln, doch ist hierbei auf die Darlegungen des folgenden Kapitels zu verweisen. Man bringt nämlich beide Vierecke auf der nämlichen Ebene in perspektive Lage und dreht dann die Ebene des einen Vierecks um die Achse der Perspektivität, bis sie mit der anderen Ebene den Winkel α einschließt; schließlich hat man nur noch die entsprechenden Ecken der beiden Vierecke zu verbinden.

Durchdringung zweier Vielflache.

145. Zwei Vielflache schneiden sich — falls sie überhaupt ineinander eindringen — in einem oder mehreren räumlichen Vielecken, deren Eckpunkte auf den Kanten der Vielflache liegen und in deren Seiten sich die Flächen beider durchschneiden. Die Seite eines Durchdringungspolygons verbindet entweder zwei Kanten des nämlichen Vielflachs oder eine Kante des einen Vielflachs mit einer des anderen. Im ersteren Falle müssen beide Kanten der nämlichen Seitenfläche angehören und die nämliche Fläche durchstoßen, im zweiten Falle muß jede der beiden Kanten eine Fläche durchstoßen, welche von der anderen begrenzt wird. Besteht die ganze Durchdringungsfigur aus einem einzigen Polygon, so sagt man, daß die Vielflache ineinander eindringen, oder daß das eine ein Stück aus dem anderen ausschneide; bildet sie dagegen mehrere Polygone, so sagt man, das eine Vielflach durchdringe das andere.

Eine Seite der Durchdringungsfigur ist sichtbar, sobald sie in zwei sichtbaren Flächen gelegen ist, wenn man jedes Vielflach für sich allein betrachtet, in allen anderen Fällen ist sie un-

sichtbar. Eine Seite ist demnach stets unsichtbar, wenn einer ihrer Endpunkte auf einer unsichtbaren Kante eines Vielflachs liegt; sie kann aber auch unsichtbar sein, wenn sie zwei sichtbare Kanten verbindet, die dann entweder dem gleichen Vielflach angehören müssen, oder von denen eine auf dem scheinbaren Umriß liegen muß.

Um die Durchdringungsfigur zu konstruieren, kann man die Seiten des einen Vielflachs mit denen des anderen zum Schnitt bringen, man erhält so die Seiten dieser Figur, deren Ecken sich auf den unverlängerten Kanten der Vielflache befinden müssen (Flächenverfahren). Man kann aber auch die unverlängerten Kanten jedes der beiden Vielflache mit den Seiten des anderen schneiden, wodurch sich die Ecken der Durchdringungsfigur ergeben. Es sind dann diese Ecken in solcher Folge zu verbinden, daß je zwei aufeinanderfolgende Ecken bei beiden Vielflachen in der nämlichen Seite liegen (Kantenverfahren). Das letztere wird gewöhnlich angewendet.

146. Die Durchdringung eines Würfels mit einem Tetraëder zu zeichnen (Fig. 114). Eine Diagonale des Würfels soll auf Π_1 senkrecht stehen. Um ihn in dieser Lage zu zeichnen, gehen wir von einer speziellen Lage aus, wobei die Würfelseite $AB_0C_0D_0$ in Π_1 liegt und drehen den Würfel um die Gerade a ($a \perp AC_0$), bis seine Diagonale AC_1 zu Π_1 senkrecht wird. Hierzu benutzen wir, wie bekannt, eine zu a senkrechte Hilfsebene als Seitenriß; daraus ergeben sich Grund- und Aufriß des Würfels. Das Tetraëder mag durch seine Projektionen gegeben sein. Wir wenden das Kantenverfahren an. Die erste projizierende Ebene durch GH schneidet die Würfelseite BB_1C_1C in der Geraden KL und es ist $G''H'' \times K''L'' = 1''$ ein Eckpunkt des Durchdringungspolygons. Die Kante GH durchdringt ferner die Seite AA_1B_1B im Punkte 10. Ganz in gleicher Weise sind auf den übrigen Kanten des Tetraëders, sowie auf denjenigen des Würfels die Durchstoßpunkte zu bestimmen. Natürlich werden nicht alle Kanten an der Durchdringung teilnehmen und um sich keine überflüssige Mühe zu machen, wird man am besten in der folgenden Weise vorgehen. Ist eine Ecke des Durchdringungspolygons, etwa $1 = GH \times BB_1C_1C$ gefunden, so ist seine Seite $1, 2 = GHF \times BB_1C_1C$; der Eckpunkt 2 muß also auf einer Kante der einen oder anderen Seitenfläche liegen. Wir können nun irgend eine Kante der einen Fläche mit der anderen zum Schnitt bringen; befindet sich dieser Schnittpunkt auf der Kante und der Fläche selbst, so ist er der Punkt 2, liegt er

dagegen auf der Verlängerung der Kante oder Fläche, so befindet er sich auf der Verlängerung von 1, 2. Gleichwohl ist hierdurch die Richtung der Seite 1, 2 und damit offenbar auch der Eck-

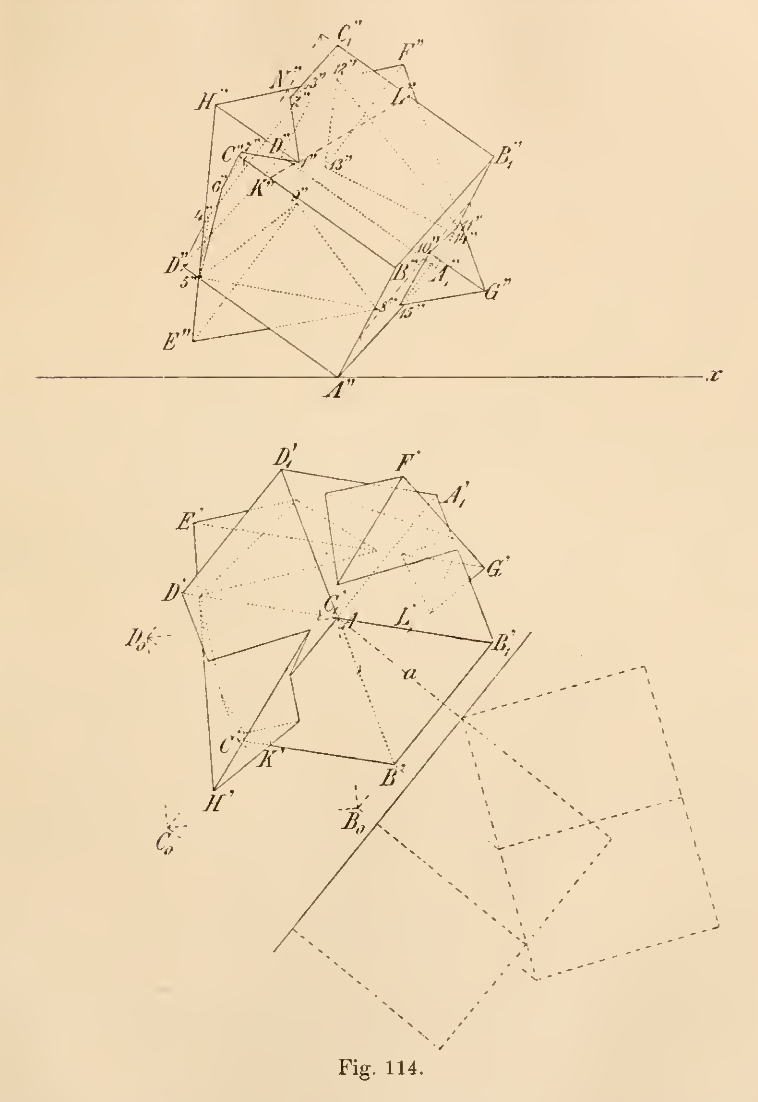


Fig. 114.

punkt 2 gefunden, der auf der Berandung der einen und im Innern der anderen Fläche gelegen sein muß. So würden wir, wenn wir in der Figur die Kante CC_1 benutzt hätten, direkt den Punkt 2 gewonnen haben, während wir bei Benutzung der Kante HF zu-

nächst ihren Schnittpunkt N und damit 1, N und so auch 2 erhalten würden.

Die Reihenfolge der Ecken des Durchdringungspolygons ergiebt sich sofort aus der Bemerkung, daß zwei aufeinanderfolgende Ecken bei beiden Vielflachen der nämlichen Seitenfläche, resp. deren Berandung, angehören müssen. So finden sich die Folgen der Ecken:

$1 = GH \times BB_1C_1C$	$10 = GH \times ABB_1A_1$	$5 = HE \times DA$
$2 = GHF \times C_1C$	$11 = GHF \times B_1A_1$	$8 = EG \times DAA_1D_1$
$3 = HF \times CC_1D_1D$	$12 = HF \times A_1B_1C_1D_1$	$9 = EF \times DAA_1D_1$
$4 = HFE \times CD$	$13 = FE \times A_1B_1C_1D_1$	$5 = HE \times DA$
$5 = HE \times DA$	$14 = FEG \times A_1B_1$	
$6 = HEG \times CD$	$15 = EG \times A_1B_1BA$	
$7 = HEG \times CC_1$	$10 = GH \times A_1B_1BA$	
$1 = HG \times BB_1C_1C$		

Im Punkte 5 treffen sich zufällig zwei Kanten und es laufen von ihm vier Durchdringungslinien aus. Was die Sichtbarkeit der einzelnen Linien anlangt, so genügt das, was in voriger Nummer im allgemeinen darüber gesagt worden ist. Es folgt daraus, daß die sichtbaren Teile der Durchdringungsfigur immer von den Umrissen der beiden Vielflache begrenzt werden. Von einer Ecke dieser Figur, die auf dem sichtbaren Teil des Umrisses liegt, geht stets eine sichtbare und eine unsichtbare Seite aus.

147. Die Durchdringung eines Prismas und einer Pyramide, die auf der Horizontalebene aufstehen (Fig. 115).

Hier läßt sich am leichtesten das Flächenverfahren durchführen, indem man außer Π_1 noch eine horizontale Hilfsebene Π_3 durch die Spitze der Pyramide verwendet. Jede Seitenfläche der Pyramide besitzt in Π_3 eine zu ihrer ersten Spur parallele Hilfsspur durch S, während die paarweise parallelen Spuren der Seitenflächen des Prismas zwei kongruente Vierecke bilden. Mit Hilfe dieser Spurlinien findet man die ersten und die Hilfsspurpunkte der Seiten der Durchdringungsfigur. In der Figur ist die obere Endfläche des Prismas bereits so gewählt, daß sie durch S hindurchgeht; liegt dieser Fall nicht vor, so muß erst das zu $EFGH$ kongruente Schnittpolygon gezeichnet werden. Die Seitenflächen SBC und $EFKJ$ schneiden sich in der Geraden NN_1, wo $N = BC \times EF$, $N_1 = JK \times SN_1$ und $SN_1 \parallel BC$ ist; diese Gerade nimmt nur insoweit an der Durchdringungsfigur teil, als sie zugleich im Innern der beiden Vielecke SBC und $EFKJ$ liegt, d. h. in der Erstreckung von 1 nach 2. In 2 setzt sich dann die Seite 2, 3 an, die ebenfalls der Fläche $EFKJ$

angehören muß und von der (der erstgenannten Pyramidenseite benachbarten) Seite *CDS* ausgeschnitten wird. In gleicher Weise läßt sich die ganze Durchdringung im Grundriß zeichnen. Den

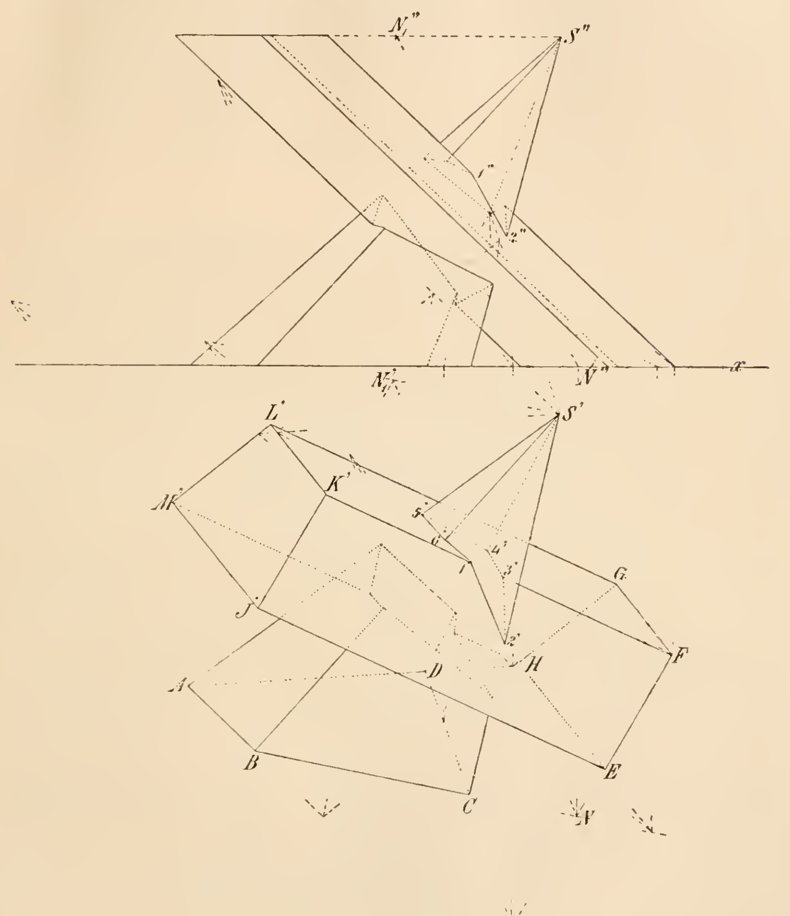


Fig. 115.

Aufriß erhält man entweder durch direktes Hinaufloten der Punkte 1′, 2′, 3′, . . . oder durch Hinaufloten der Spurpunkte N, N_1', . .

148. Das hier geschilderte Verfahren läßt sich mit geringer Abänderung auch bei der Durchdringung von Prisma mit Prisma, Prisma mit Pyramide und Pyramide mit Pyramide bei allgemeiner Lage anwenden. Im ersten Fall wähle man zwei parallele Hilfsebenen senkrecht zum Aufriß (oder Grundriß), die sonst beliebig sein können; sie schneiden die Prismen in kongruenten Vielecken,

deren parallele Seiten als Hilfsspuren der Prismenflächen betrachtet werden können. Zwei Hilfsspuren in der nämlichen Hilfsebene und die entsprechenden in der anderen liefern die beiden Hilfsspurpunkte einer Seite des Durchdringungspolygons, das im Grundriß unmittelbar gezeichnet werden kann. Tritt an Stelle eines gegebenen Prismas eine Pyramide, so schneiden die Hilfsebenen nicht kongruente, sondern ähnliche Vielflache aus. Gewöhnlich wird man in diesem Falle eine Hilfsebene durch die Spitze der Pyramide legen. Analog verfährt man bei zwei Pyramiden.

149. Die Durchdringung zweier Pyramiden in allgemeiner Lage (Fig. 116). Das Kantenverfahren läßt sich hier in besonderer Weise abändern, wie es sich später noch in anderen Fällen vorteilhaft erweisen wird. Verbindet man die Spitzen beider Pyramiden durch eine Gerade a und legt durch dieselbe eine beliebige Ebene, so schneidet sie jede der beiden Mantelflächen in zwei oder mehr erzeugenden Geraden, deren gegenseitige Schnittpunkte auf der Durchdringungsfigur gelegen sind. Wählt man die Ebene durch a speziell so, daß sie eine Pyramidenkante enthält, so ergeben sich auf dieser zwei oder mehr Ecken der Durchdringungsfigur. Sind nun A und B die Basisebenen der beiden Pyramiden, ist s ihre Schnittlinie und sind P und Q die Spurpunkte von a in den Ebenen A und B, so schneidet eine beliebige Ebene E durch a aus den Ebenen A und B Gerade aus, die durch P resp. Q verlaufen und sich auf s treffen; umgekehrt bestimmen zwei derartige Gerade eine Ebene durch a. Wir suchen demgemäß zunächst auf der Verbindungslinie a der Spitzen S und T die Punkte $P = a \times \mathsf{A}$ und $Q = a \times \mathsf{B}$ und zwar ist $P'' = a'' \times K''L''$ und $Q'' = a'' \times H''J''$. Sodann bestimmen wir s, indem wir irgend zwei Strahlen in A mit der Ebene B des Vierecks $ABCD$ zum Schnitt bringen; so liefert die Gerade PE in A den Punkt O von s ($M'' = P''E'' \times B''C''$, $N'' = P''E'' \times C''D''$, M' auf $B'C'$, N' auf $C'D'$, $O' = P'E' \times M'N'$). Nach Auffindung von s verbinden wir P mit einem der Punkte E, F, G, etwa mit E, suchen den Punkt $O = PE \times s$ auf und verbinden ihn mit Q; diese Linie schneidet das Viereck $ABCD$ in den Punkten U, V; die Kante TE durchdringt demnach die andere Pyramide in den Punkten $1 = TE \times SV$ und $6 = TE \times SU$. Ganz analog verfahren wir mit sämtlichen Kanten aus S sowohl wie aus T und erhalten so alle Ecken der Durchdringungsfigur; die Reihenfolge derselben ist nach dem früher Gesagten leicht anzugeben.

150. Das soeben geschilderte Verfahren läßt sich ganz in der gleichen Weise anwenden bei Durchdringung von Pyramide und

Prisma. Zunächst legt man eine Gerade a durch die Spitze der Pyramide parallel zu den Kanten des Prismas, sucht ihre Spurpunkte P und Q in den Basisebenen A und B und die Gerade $s = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ auf. Dann ist genau wie vorher zu verfahren, indem jede Ebene durch a beide Flächen in Erzeugenden, nämlich die Pyramide in Geraden durch den Scheitel und das Prisma in Parallelen zu den Kanten schneidet.

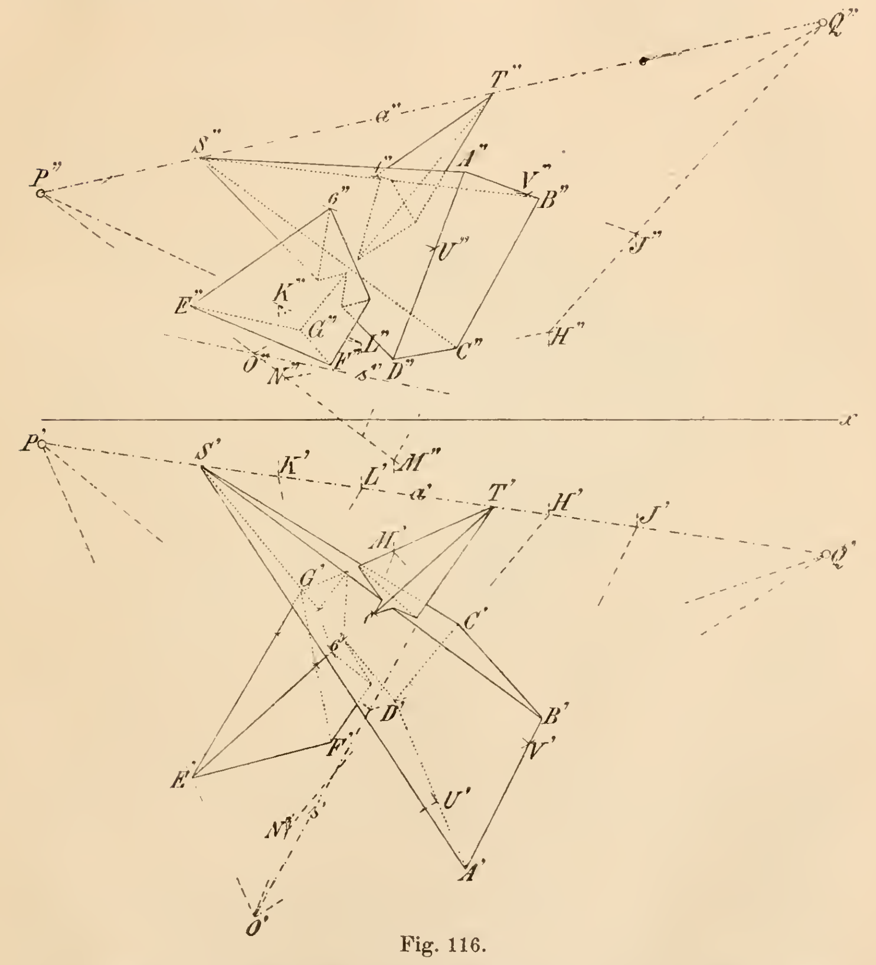


Fig. 116.

Handelt es sich um die Durchdringung zweier Prismen, so bestimme man die Schnittlinie s ihrer Basisebenen A und B und in diesen die Spurlinien einer zu den Kanten beider Prismen parallelen Ebene E, etwa $u = \mathsf{A} \times \mathsf{E}$, $v = \mathsf{B} \times \mathsf{E}$. Jede zu E parallele Ebene

schneidet aus A und B Spuren aus, die zu u resp. v parallel sind und sich auf s treffen, sie schneidet die Prismen in Geraden, die den Kanten parallel laufen. Legt man die zu E parallele Ebene durch eine Kante, d. h. legt man ihre eine Spurlinie durch die bezügliche Ecke des Basispolygons, so gewinnt man Eckpunkte der Durchdringungsfigur, die sich hiernach leicht völlig zeichnen läßt.

Schlagschatten und Eigenschatten bei Vielflachen.

151. Unter der Annahme paralleler Lichtstrahlen bildet der Schlagschatten eines Körpers auf irgend eine Ebene, z. B. auf die Grund- oder Aufrißebene, nichts anderes als eine schiefe Parallelprojektion. Ganz ebenso nun wie die Oberfläche eines Vielflachs in Bezug auf eine bestimmte Projektionsrichtung in einen sichtbaren und einen unsichtbaren Teil zerfällt, die längs des Umrisses aneinander grenzen, zerfällt die Oberfläche desselben in einen beleuchteten und einen im Eigenschatten liegenden Teil, die längs eines Polygons, des Lichtgrenzpolygons oder kurz der Lichtgrenze aneinanderstoßen. Alle Kanten, in denen der Lichtstrahl den Körper bloß streift, ohne in ihn einzudringen, gehören der Lichtgrenze an; alle Punkte, in denen der verlängerte Lichtstrahl in den Körper eindringt, liegen auf seinem beleuchteten Teile, die Punkte dagegen, in denen der verlängerte Lichtstrahl aus dem Körper heraustritt, befinden sich im Eigenschatten. Wird ein Lichtstrahl, bevor er auf den Körper trifft, durch dazwischen liegende Gegenstände aufgehalten, so liegt die betreffende Stelle des Körpers im Schlagschatten. Von den Durchstoßpunkten eines Lichtstrahles mit einem oder mehreren Körpern ist der erste im Lichte, der zweite, vierte, ... im Eigenschatten, der dritte, fünfte, ... im Schlagschatten. Die Schlagschattengrenze auf einer Projektionsebene wird gebildet von dem Schatten des Lichtgrenzpolygons. Der Schlagschatten auf einen Körper kann teilweise von dem Lichtgrenzpolygon begrenzt werden.

152. Den Schlagschatten eines Zwölfflachs auf die Projektionsebenen sowie seinen Eigenschatten zu bestimmen (Fig. 117). Wir nehmen an, daß seine Projektionen nach der früheren Darlegung gefunden und die des Lichtstrahles l' und l'' gegeben sind. Die Schatten eines Eckpunktes auf die Grund- und Aufrißebene sind die Spurpunkte des durch ihn gelegten Lichtstrahles, so z. B. bilden E_* und E^* Grund- und Aufrißschatten von E. Läßt man alle Kanten Schatten werfen, so wird die Grenze

des Schlagschattens von denjenigen Linien gebildet, welche alle übrigen einschließen. Es ist indes nicht nötig, den Schatten aller Kanten zu bestimmen. Zunächst findet man mehrere Eckpunkte, die dem Lichtgrenzpolygon angehören, indem man auf dem scheinbaren Umriß der ersten Projektion diejenigen Punkte aufsucht, in denen eine Parallele zu l' diesen Umriß streift, ohne ihn zu schneiden. In der Figur sind dies die Punkte B' und G'; ihre Schatten B_* und G^*

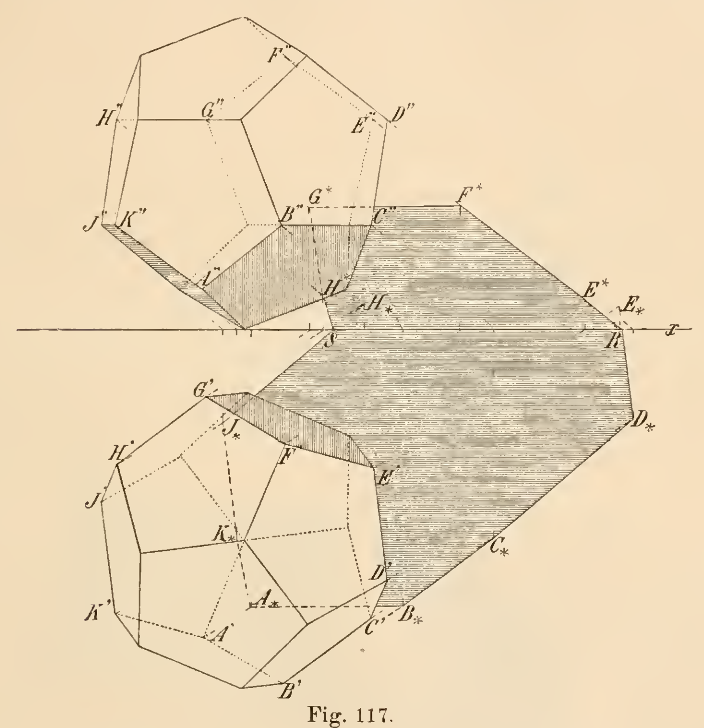


Fig. 117.

müssen notwendigerweise auf dem Randpolygon des Schlagschattens gelegen sein. Denn der Lichtstrahl aus B kann das Vielflach nicht schneiden, da ja sonst seine Projektionen die Projektionen des Vielflachs schneiden müßten, was im Grundriß nicht eintritt. Ebenso bestimmen sich mittels des Aufrisses die Punkte D_* und J_* als Eckpunkte des Schlagschattenpolygons. Von den Kanten aus B gehören zwei dem Lichtgrenzpolygon an, es sind diejenigen, deren Schlagschatten den Schatten der dritten in ihren Winkel einschließen. Hiernach können die beiden Seiten des Grenzpolygons aus B bestimmt werden, und ganz analog alle übrigen Seiten desselben. Auch wenn von einer Ecke des Vielflachs mehr als drei Kanten ausgehen, lassen

sich in der angegebenen Weise die Seiten des Grenzpolygons finden. Der Schlagschatten wird an der x-Achse gebrochen in den Punkten R und S, indem die Kanten DE und HJ die gebrochenen Schattenlinien D_*RE^* und H^*SJ_* liefern ($D_*E_* \times x = R$, $H_*J_* \times x = S$).

153. Den Schlagschatten einer dreiseitigen abgestumpften Pyramide auf ein Achtflach zu entwickeln (Fig. 118). Sind Pyramide und Achtflach gezeichnet, so bestimme

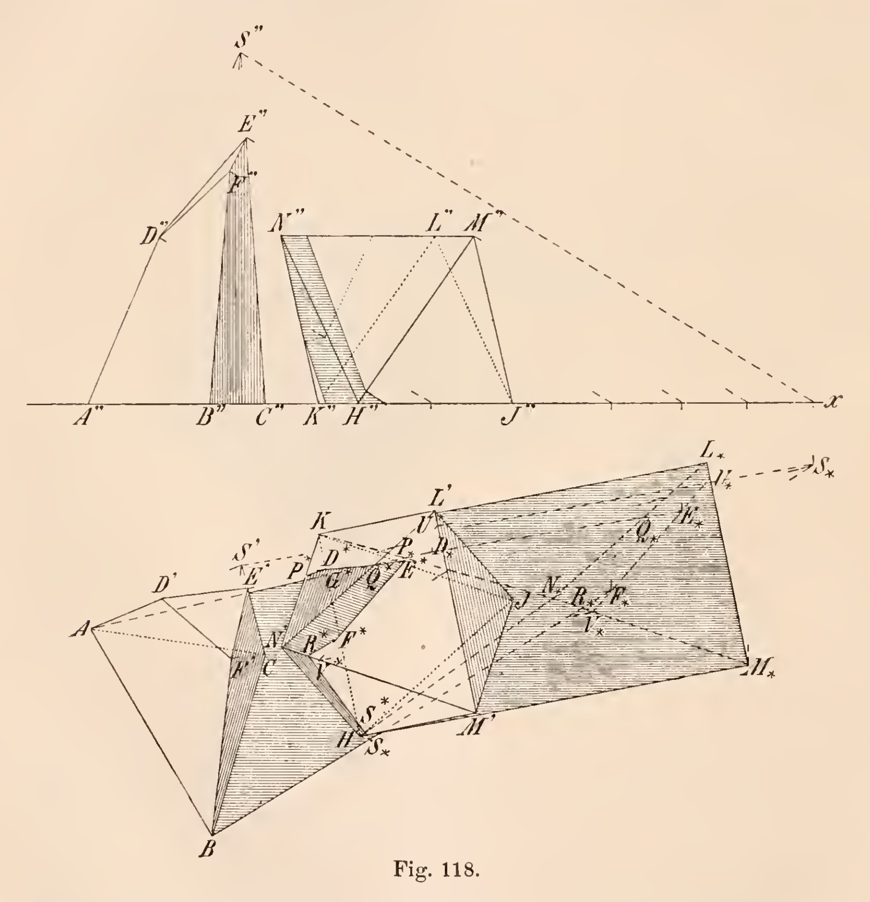


Fig. 118.

man zunächst den Schlagschatten beider auf die Horizontalebene, ganz abgesehen davon, ob er wirklich zu stande kommen kann oder nicht. Außerdem zeichne man noch den Schlagschatten derjenigen Flächen des Achtflachs, die Schlagschatten von dem Pyramidenstumpf empfangen. In der Figur sind dieses die Flächen KHN, KLN, LMN und HMN, die in N zusammenstoßen. Da der Schatten

BF_* von BF den Schatten HN_*M_* in S_* und R_* durchschneidet, so muß der Schatten von BF auf die Seitenfläche HNM fallen und wird dort S^*R^*, wo S^*S_* und R^*R_* parallel zu der ersten Projektion des Lichtstrahles sind. Ebenso findet man den Schatten von FE auf die Fläche LMN; hier muß man F_*E_* verlängern, bis es zwei Seiten des Dreiecks $L_*M_*N_*$ in U_* und V_* schneidet, dann ist U^*V^* der Schatten dieser Geraden auf die Fläche LMN und E^*F^* derjenige von EF auf diese Fläche ($E^*E_* \parallel l' \parallel F^*F_*$). Die gleiche Konstruktion läßt sich überall durchführen. Es kommt die Konstruktion stets auf die Aufgabe hinaus, den Schatten einer Geraden a auf eine Gerade b zu finden, indem man zunächst die Schatten a_*, b_* beider Geraden auf den Grundriß bestimmt und durch ihren Schnittpunkt S_* eine Parallele zu l legt, die die eine Gerade im Schatten werfenden, die andere im Schatten empfangenden Punkte schneidet. In der Zeichnung zieht man natürlich durch S_* eine Parallele zu l', die die Horizontalprojektion der genannten Punkte aus a' und b' ausschneidet. Das Gesagte wird zur Konstruktion völlig genügen; es mag nur noch bemerkt werden, daß die Punkte $P^*D^*Q^*E^*F^*R^*S^*$ Horizontalprojektionen sind, ihre Bezeichnungen also einen Strich erhalten müßten, was jedoch der Einfachheit halber unterblieben ist.

Beispiele für angewandte Schattenkonstruktion.

Die Schattenbestimmung im Verfahren der orthogonalen Parallelprojektion mag noch durch ihre Anwendung auf einige einfache, durchweg ebenflächig begrenzte, architektonische Objekte erläutert werden. Wir stellen diese jedesmal im Grundriß, Aufriß und Seitenriß (resp. Profilschnitt) dar und geben den Tafeln Π_1, Π_2, Π_3 die meist gebräuchliche Lage zum Gegenstande.

154. In Fig. 119 ist eine Freitreppe dargestellt, die zwischen steinernen Wangen mit fünf Stufen zu einem mit Brüstung versehenen Podest hinaufführt.

Die Richtung l der parallel einfallenden Lichtstrahlen ist im Grund- und Aufriß durch l' und l'' gegeben ($\angle\, l'x = 45^0$). Es handele sich um die Zeichnung der Schatten des Objektes auf dem Boden und auf seinen eigenen Flächen. Die Ausführung gestaltet sich sehr einfach, weil die einen sichtbaren Schlagschatten empfangenden Flächen entweder zu Π_1 oder zu Π_2 parallel sind. In der einen Hilfsfigur (links unten) ist eine zu den schrägen Oberkanten der Treppenwangen parallele Strecke $w = AB$ so gezeichnet, daß B ihr

erster, A ihr zweiter Spurpunkt ist und folglich A' mit B'' auf der x-Achse zusammenfällt. Hieraus findet man sofort A_* und B^* und damit den Grundrißschatten $w_* = A_*B$, sowie den Aufrißschatten $w^* = AB^*$ der Linie w.

Von den Schatten auf horizontalen Flächen sind die der vertikalen Kanten parallel zu l', die der schrägen parallel zu w_*, die der horizontalen parallel zu diesen selbst. Auf den sichtbaren

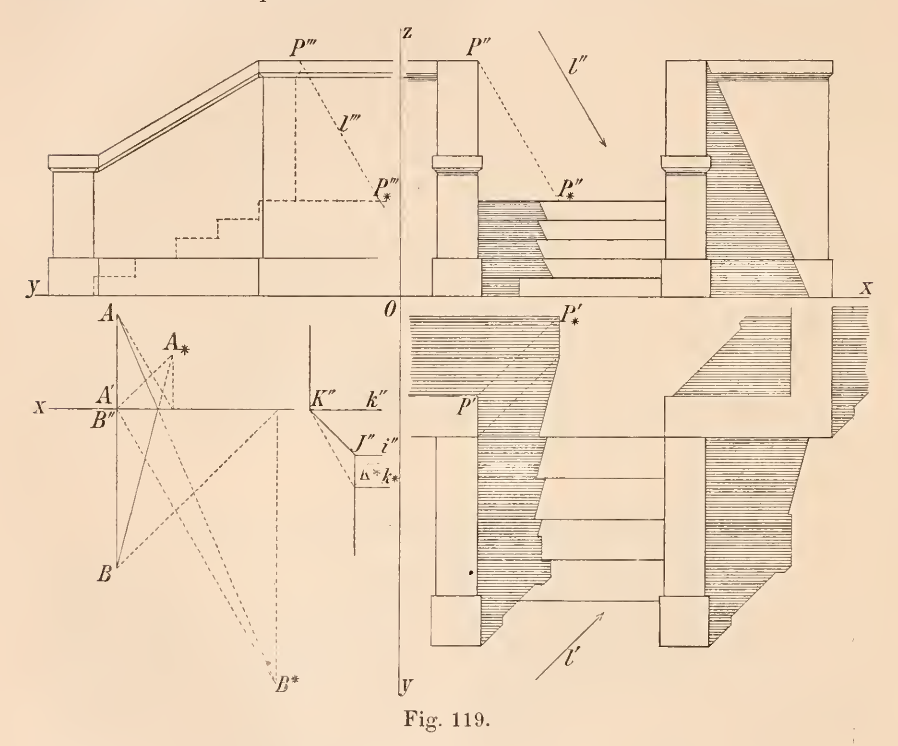


Fig. 119.

vertikalen Flächen sind die Schatten von solchen Kanten, die entweder normal zu Π_2, oder parallel zu w, oder parallel zu Π_2 laufen, resp. mit l'', oder w^*, oder mit den Kanten selbst gleichgerichtet.

Man beginnt nun bei einem geeigneten Eckpunkte, z. B. dem Punkte P, und bestimmt in Grund- und Aufriß seinen Schlagschatten auf die wagrechte Fläche des Podestes (P_*', P_*''). Hiervon ausgehend kann man unter abwechselnder Benutzung der Grund- und Aufrißelemente die Grenzen der Schlagschatten leicht bestimmen. Zugleich ergeben sich mannigfache Kontrollen für die Richtigkeit der Zeichnung. So kann man z. B. auch von dem Bodenschatten einer der vordersten vertikalen Kanten ausgehen, u. s. f.

Die Deckplatten der vorgelagerten Ecksteine und der Brüstung sind unten abgeschrägt; die betreffenden Flächen sind sämtlich unter 45^0 gegen Π_1 geneigt. Ein Teil des so entstehenden Simses ist in der zweiten Hilfsfigur vergrößert dargestellt (Aufriß). Der Eckpunkt K der horizontalen Kante k wirft (weil $\angle\, l'x = 45^0$ ist) seinen Schatten K^* auf die von J abwärts gehende vertikale Kante ($K''K^* \parallel l''$). Die schräge Fläche zwischen k und i liegt im Eigenschatten, die vertikale Fläche zwischen i und k^* im Schlagschatten.

155. In Fig. 120 ist ein Fenster gezeichnet. Die oben schwach geneigte Sohlbank ist mit wenig vortretenden Konsolen

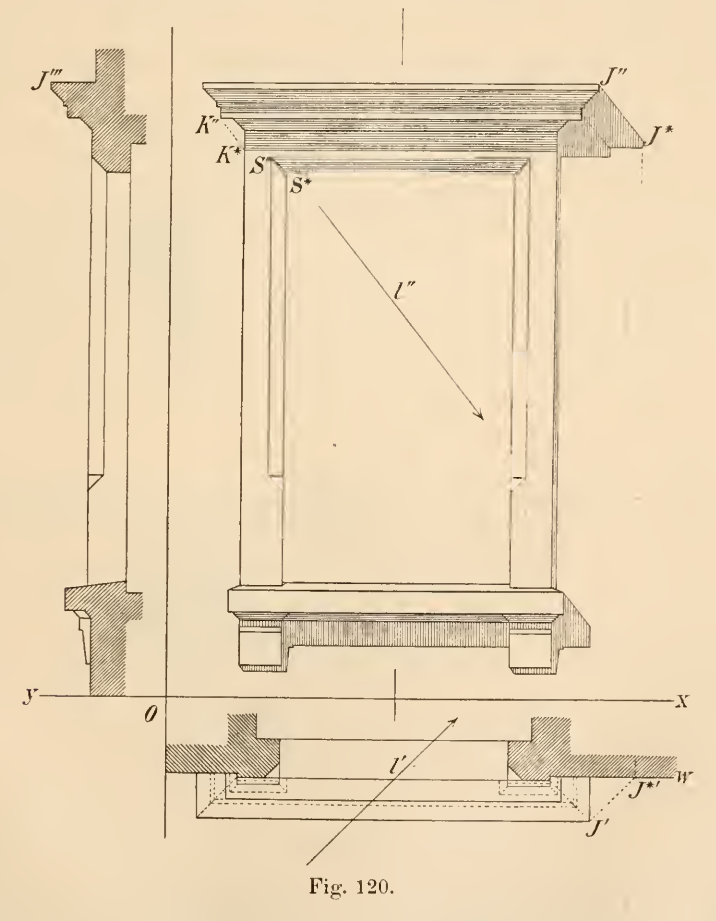


Fig. 120.

versehen. Die Leibungen zeigen ebenso wie der Fenstersturz nach innen abgeschrägte Flächen, die sogen. Schmiegen. Der

Sturz ist durch ein einfaches Gesims verdacht. Das Fenstergewände tritt ein wenig aus der Wandfläche hervor.

Die Lichtrichtung l ist durch l' und l'' gegeben ($\angle\, l'x = 45^0$ $\angle\, l''x = 60^0$). Die schrägen Flächen des Gesimses liegen im Eigenschatten, auf den vertikalen Flächen liegen horizontale Streifen im Schlagschatten. Man geht zu ihrer Bestimmung etwa von einem Punkte K aus und sucht wie im vorigen Beispiele K^* auf der vertikalen Kante der Leibung ($K''K^* \parallel l''$). Um den Schlagschatten des Gesimses, der Sohlbank und der Konsole auf der Wandfläche zu finden, die im Grundriß durch die Linie w vertreten ist, bestimmt man von einzelnen Eckpunkten die Schatten, z. B. von J, indem man $J''J^* \parallel l''$, $J'J^{*'} \parallel l'$ zieht ($J^{*'}$ auf w, $J^{*'}J^* \perp x$) und beachtet, daß die Schatten der vertikalen Kanten wiederum vertikal,

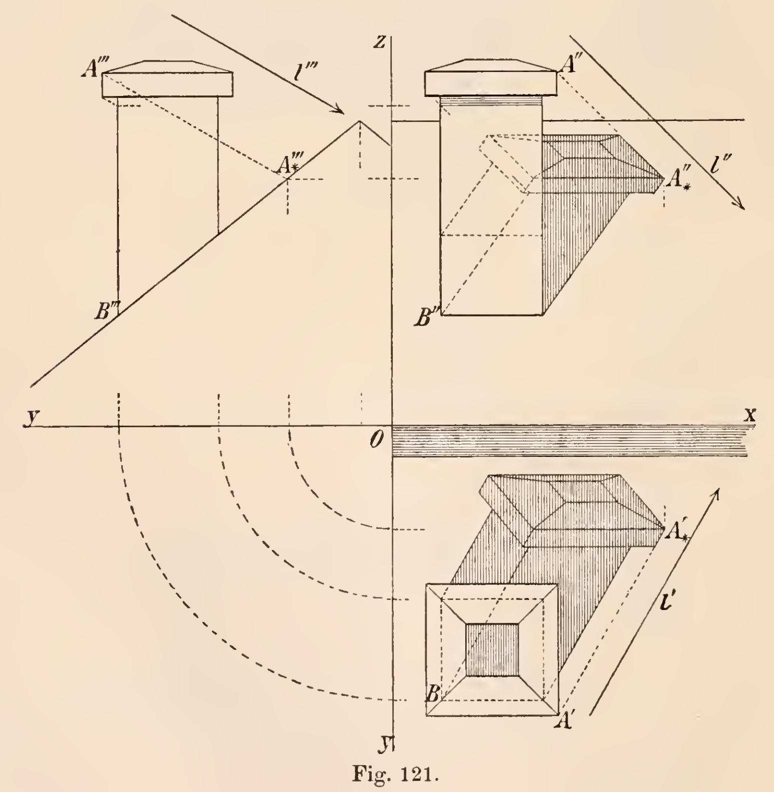


Fig. 121.

die der horizontalen Kanten aber entweder parallel zu x oder zu l'' sind. Die Schmiege am Sturz liegt im Eigenschatten, auf den beiden Schmiegenflächen der Leibungen entstehen oben zwei kleine drei-

eckige Schlagschatten. Nach diesen Andeutungen ist es leicht, die Schattenkonstruktion in allen Einzelheiten durchzuführen.

156. Als letztes Beispiel mag die Bestimmung des Schattens dienen, den ein Schornstein auf eine geneigte Dachfläche wirft (Fig. 121).

Die Richtung der Lichtstrahlen l ist hier so gewählt, daß $\angle\, l'x = 60^0$, $\angle\, l''x = 45^0$ und folglich $\angle\, l'''x = 30^0$ ist. Man benutzt zweckmäßig den Seitenriß (was auch schon bei den vorhergehenden Beispielen geschehen konnte). Den Schatten A_* eines Eckpunktes A am Essenkopf findet man dann, indem man durch A', A'', A''' Gerade resp. parallel zu l', l'', l''' zieht, und zwar letztere bis zu A_*''' auf der Seitenspur der Dachfläche. Dann ist $A_*'''A_*'' \parallel x$ und $A_*''A_*' \perp x$. Liegt der betrachtete Eckpunkt auf einer vertikalen Kante, deren Durchstoßpunkt mit der Dachfläche gezeichnet ist, so findet man durch dieses Verfahren zugleich die Richtung, welche die Schatten der Vertikalen auf die Dachfläche im Aufriß zeigen; im Grundriß sind sie parallel zu l'. Man beachte noch, daß die Schatten horizontaler Kanten im Aufriß teils zu x, teils zu l'' parallel liegen; im Grundriß sind sie teils parallel zu x, teils haben sie eine schiefe Richtung, die sich aus dem Vorigen ergiebt. — Die hintere Dachfläche liegt vollständig im Eigenschatten. Auch wirft die Deckplatte des Schornsteins auf seine Seitenflächen einen Streifen von Schlagschatten.

VIERTES KAPITEL.

Perspektivität ebener Figuren. Harmonische Gebilde.

Centralprojektion einer Ebene auf eine andere Ebene.

157. Es seien im Raume zwei Ebenen E und Π und außerhalb beider ein Punkt O willkürlich festgelegt. Zieht man aus O durch alle Punkte einer in E angenommenen Figur Strahlen, so schneiden diese die Ebene Π in einer zweiten Figur, welche der gegebenen eindeutig Punkt für Punkt entspricht. Dieses Abbildungsverfahren heißt Centralprojektion oder Perspektive, der Punkt

O das Projektionscentrum oder Centrum der Perspektive, die Schnittlinie e_1 der Originalebene E mit der Bildebene Π die Projektionsachse oder Achse der Perspektive.[5]) Die einander entsprechenden Figuren werden kurz als perspektiv bezeichnet, man sagt, daß sie sich in perspektiver (centraler) Lage befinden. Offenbar entspricht jedem Punkt P (Fig. 122) der Originalebene ein Punkt P_1 der Bildebene, jeder Geraden g eine Gerade g_1 und umgekehrt. Ferner entspricht jeder Punkt der Projektionsachse e_1 sich selbst und je zwei entsprechende Gerade schneiden sich auf der Achse ($g \times g_1$ auf e_1), oder sind ihr im besonderen beide parallel.

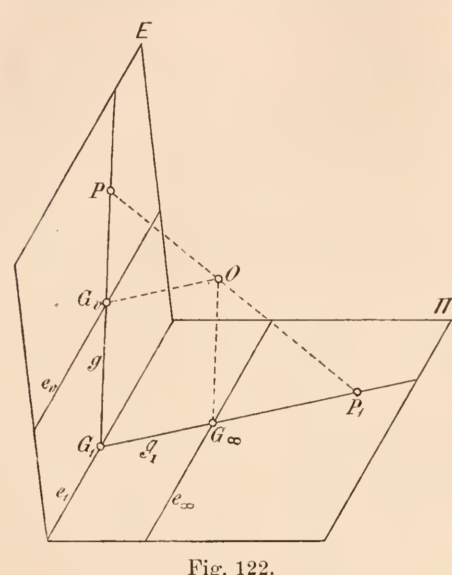


Fig. 122.

158. Die Centralprojektion einer Ebene auf eine zweite umfaßt als spezielle Fälle die Affinität und Ähnlichkeit ebener Figuren. Die perspektive Lage geht über in die ähnliche, wenn die Bildebene zur Originalebene parallel wird, was zur Folge hat, daß die Projektionsachse ins Unendliche rückt; sie geht über in die affine Lage, wenn die projizierenden Strahlen parallel werden, also das Projektionscentrum ins Unendliche fällt. Macht man beide Annahmen gleichzeitig, so ergeben sich kongruente Figuren; solche stellen sich auch bei affiner Lage ein, wenn die projizierenden Strahlen zu einer der beiden Ebenen normal sind, welche die Winkel zwischen Original- und Bildebene halbieren. Affine, ähnliche und kongruente Figuren sind somit als spezielle Fälle perspektiver Figuren anzusehen, wenn sie sich in affiner oder ähnlicher Lage befinden.

159. Die durch O parallel zu E und Π gelegten Ebenen mögen Π und E in den Geraden e_∞ und e_v (beide parallel zur Achse e_1) schneiden (Fig. 122). Bewegt sich in E ein Punkt P auf der Geraden g nach der einen oder anderen Seite ins Unendliche, so dreht sich der projizierende Strahl OP in der Ebene Og um O im entsprechenden Sinne und nähert sich beide Male der nämlichen Grenz-

lage OG_∞, die durch O parallel zu g gezogen ist. Der Spurpunkt G_∞ dieser Geraden in Π liegt auf e_∞; er kann als das Bild des auf g ins Unendliche fliehenden Punktes aufgefaßt werden und heißt darum der zu g gehörige Fluchtpunkt. Offenbar gehört er ebenso als Fluchtpunkt zu allen Geraden, die mit g parallel laufen; denn flieht ein Punkt auf einer solchen Parallelen ins Unendliche, so strebt der zugehörige projizierende Strahl stets der gleichen Grenzlage OG_∞ zu. Der Gesamtheit aller unendlich fernen Punkte der Ebene E entspricht in Π die eine bestimmte Gerade e_∞, die Fluchtlinie der Ebene E. — Umgekehrt verschwindet das Bild des Schnittpunktes G_v der Geraden g mit e_v, d. h. es liegt auf g_1 unendlich fern: G_v heißt darum der Verschwindungspunkt von g. Die Gerade e_v selbst, deren Bild ins Unendliche fällt, heißt die Verschwindungslinie der Ebene E. — Allen zu g parallelen Geraden der Ebene E entsprechen in Π alle Gerade durch den Punkt G_∞ der Fluchtlinie e_∞, und allen Geraden der Ebene E durch den Punkt G_v der Verschwindungslinie e_v entsprechen in Π die Parallelen zu g_1.

160. Das angegebene Verhalten der unendlich fernen Punkte einer Geraden oder einer Ebene gegenüber der Centralprojektion, nämlich der Umstand, daß sie nur in einem einzigen Punkt oder einer einzigen Geraden abgebildet werden, begründet die Ausdrucksweise, nach welcher einer Geraden nur ein unendlich ferner Punkt (Richtung) zugeschrieben wird, den sie mit allen parallelen Geraden gemein hat, und einer Ebene nur eine unendlich ferne Gerade (Stellung), die ihr mit allen Parallelebenen gemeinsam ist. Erst auf Grund dieser Erklärung dürfen wir das umkehrbar eindeutige Entsprechen zwischen den Punkten und Geraden der Originalebene und den Punkten und Geraden der Bildebene als ein ausnahmslos geltendes Grundgesetz der Centralprojektion betrachten. — Im Verfolg dieser perspektiven Betrachtungsweise hat man eine Gerade als geschlossene Linie aufzufassen, weil ein Punkt, der sie beschreibt, sich demselben unendlich fernen Punkte nähert, gleichviel in welchem Sinne er sich bewegt.

161. Für die Centralprojektion von E auf Π kann, wenn die Lage dieser Ebenen zu einander fixiert ist, die Angabe des Projektionscentrums O offenbar durch die zweier entsprechender Punktepaare A, B und A_1, B_1 ersetzt werden, deren Verbindungslinien AB und A_1B_1 sich auf der Achse $e_1 = \mathrm{E} \times \Pi$

schneiden. Es liegen dann AA_1 und BB_1 in einer Ebene und bestimmen O als ihren Schnittpunkt.

162. Gehen die Ebenen dreier Figuren $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ durch eine und dieselbe Achse e_1 und sind zwei derselben $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ zur dritten $\mathfrak{F}_2$ perspektiv, so sind sie es auch untereinander. Die drei Centren liegen in gerader Linie. — Die Perspektivitätscentren, O_2 für $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}$ sowie O_1 für $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_1$,

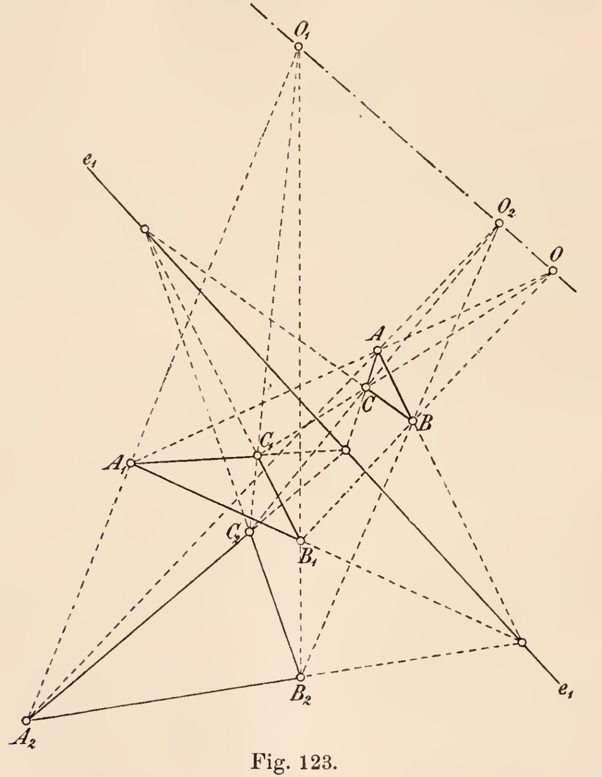


Fig. 123.

denke man sich mittels eines Punktepaares A_2, B_2 und der ihm entsprechenden Paare A, B und A_1, B_1 bestimmt (Fig. 123). Dann ist zu zeigen: erstens daß die Geraden AA_1 und BB_1 einen Schnittpunkt O bestimmen, zweitens daß auch die Gerade CC_1 durch O geht, wenn dem beliebigen Punkte C_2 von $\mathfrak{F}_2$ die Punkte C_1 von $\mathfrak{F}_1$ und C von $\mathfrak{F}$ entsprechen. Nun gehen durch den Schnittpunkt von A_2B_2 und e_1 auch die Geraden AB und A_1B_1 und somit liegen auch AA_1 und BB_1 in einer Ebene und schneiden sich in einem Punkte O. Ganz ebenso gehen AC und A_1C_1 durch den Schnitt-

punkt von A_2C_2 und e_1, es müssen sich also auch AA_1 und CC_1 schneiden, und in gleicher Weise schließt man, daß BB_1 und CC_1 einen Schnittpunkt haben. Da die drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 sich paarweise schneiden, so müssen sie entweder in der nämlichen Ebene liegen, oder sich in einem Punkte schneiden. Das erstere ist ausgeschlossen, sonst müßten die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, also auch $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ in einer Ebene liegen, folglich geht CC_1 durch $O = AA_1 \times BB_1$. Das Centrum O liegt auf AA_1, ebenso O_1 auf A_1A_2 und O_2 auf A_2A, folglich liegen alle drei Centren auf der Ebene AA_1A_2, desgleichen auf der zweiten Ebene BB_1B_2, also in der Schnittlinie beider, durch welche auch die dritte Ebene CC_1C_2 gehen muß.

163. Als einen wichtigen Spezialfall des soeben bewiesenen Satzes heben wir folgenden hervor: Zwei perspektiv gelegene ebene Figuren bleiben in perspektiver Lage, wenn man die eine derselben um die Achse der Perspektive beliebig dreht. Die zu drehende Figur liegt nämlich zu der gedrehten affin (vergl. 10), d. h. perspektiv mit unendlich fernem Centrum. Durch letzteres geht auch die Verbindungslinie des alten und neuen Perspektivitätscentrums, diese ist also parallel zur Sehne des Kreisbogens, den irgend ein Punkt der beweglichen Figur beschrieben hat. Wir wollen die Sache noch etwas genauer verfolgen und etwa die Originalebene E einer Drehung unterwerfen. Um die Lageveränderung des Perspektivitätscentrums besser zu überblicken, legen wir die Zeichenebene normal zur Achse e_1 durch das Centrum O. Die beiden perspektiven Ebenen E und Π, die Achse e_1, Verschwindungslinie e_v, Fluchtlinie e_∞ u. s. f. stellen wir dann durch ihre senkrechten Projektionen auf die Zeichenebene dar und setzen an diese die gleichen Buchstaben, welche die Elemente selbst bezeichnen (Fig. 124).

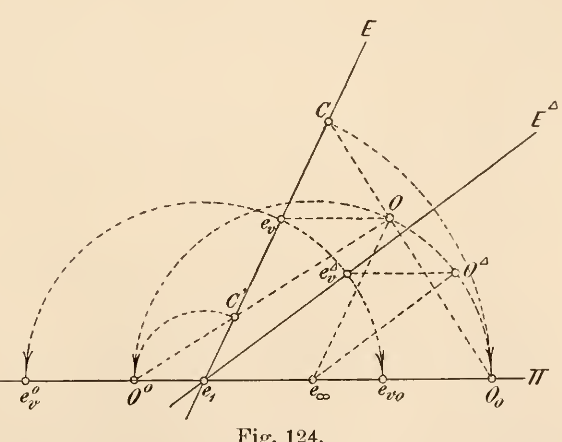


Fig. 124.

Die Originalebene E werde in ihrer neuen, durch Drehung um

e_1 erhaltenen Lage mit $\mathsf{E}^\triangle$, ihre Verschwindungslinie mit $e_v^\triangle$ bezeichnet. Das neue Centrum $O^\triangle$ liegt dann in der Schnittlinie der beiden Ebenen, welche durch e_∞ und $e_v^\triangle$ respektive zu $\mathsf{E}^\triangle$ und Π parallel gelegt werden können, und überdies wiederum in der Zeichenebene. Hieraus folgt, daß das Centrum eine Drehung um die Fluchtlinie e_∞ erleidet von gleichem Sinne und gleichem Drehwinkel wie E selbst um die Achse e_1.

164. Wird die Originalebene durch die Drehung mit der Bildebene zur Deckung gebracht, so gelangt auch das Perspektivitätscentrum O in die letztere und zwar, je nach dem Sinne der Drehung, entweder nach O_0 oder nach O^0 (Fig. 124). Dabei erhält die Verschwindungslinie e_v entweder die Lage e_{v0} oder e_v^0. Im ersteren Falle schließen in der Bildebene Centrum und Achse der Perspektive die Flucht- und Verschwindungslinie zwischen sich ein; im letzteren werden sie von diesen eingeschlossen. Jedesmal aber bleibt der senkrechte Abstand des Centrums von der Fluchtlinie dem der Verschwindungslinie von der Achse gleich. Derjenige Punkt C in der Originalebene E, welcher nachmals mit dem Centrum O_0 zur Deckung kommt, liegt auf dem Strahle OO_0; im neuen Centrum fallen daher zwei entsprechende Punkte der Ebenen E und Π zusammen, was — von den Punkten der Achse abgesehen — für kein weiteres Paar entsprechender Punkte eintritt. Analoges gilt bei umgekehrtem Drehsinn für C' und O^0.

165. Hier ist noch der Ort darauf hinzuweisen, daß bei einer Pyramide jedes ebene Schnittpolygon zum Basispolygon perspektiv liegt; die Spitze der Pyramide ist das Centrum, ihre Kanten sind die projizierenden Strahlen und die Schnittlinie von Basis- und Schnittebene ist die Achse dieser perspektiven Beziehung. Aus dem vorher Gesagten geht auch hervor, daß die Projektion des Schnittpolygons auf die Basisebene mit dem Basispolygon perspektiv liegt, und zwar bildet die Projektion der Spitze das zugehörige Centrum. Auch bei der Umlegung des Schnittpolygons um die Spur seiner Ebene in die Basisebene bleibt die perspektive Beziehung zwischen diesem und dem Basispolygon bestehen. Ihr Centrum erhält man, wenn man durch die Spitze der Pyramide zur Schnittebene eine Parallelebene zieht und diese um ihre Spur in die Basisebene umlegt, dabei gelangt die Spitze in die Lage des neuen Centrums. Alle diese Dinge sind nach dem Vorausgehenden unmittelbar klar.

Perspektive in der Ebene.

166. Nach 164 sind wir mittelbar zu dem Begriffe perspektiver Figuren derselben Ebene, also zur Perspektive (Centralprojektion) in der Ebene gelangt, die noch genauerer Erörterung bedarf.

Es sollen jetzt in einer Ebene zweierlei Figuren betrachtet werden, die wir als Original und Bild unterscheiden, und die einander Punkt für Punkt nach folgenden Gesetzen entsprechen:

α) Die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen festen Punkt O, das Centrum.

β) Drei Punkten in gerader Linie entsprechen drei Punkte in gerader Linie.

γ) Jeder Punkt einer festen Geraden e_1, der Achse, entspricht sich selbst.

Hieraus folgt sofort:

δ) Entsprechende Strahlen schneiden sich auf der Achse e_1; jeder Strahl durch das Centrum O entspricht sich selbst und mithin gilt das Gleiche vom Centrum selbst.

Eine solche Verwandtschaft zwischen zweierlei Figuren wird als Centralkollineation oder Perspektive in der Ebene bezeichnet. Indem wir zeigen, daß zwei centrisch-kollineare oder perspektive Figuren einer Ebene durch Drehung der einen um die Achse der Perspektive in eine räumliche Lage übergeführt werden können, bei welcher die eine als Centralprojektion der andern erscheint, wird erwiesen, daß die vorstehenden Gesetze zwischen zwei Figuren einer Ebene die nämliche geometrische Beziehung feststellen, wie sie in 164 zwischen Original- und Bildebene bestehen, die zur Deckung gebracht sind.

167. Nun seien $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ perspektive Figuren einer Ebene und O das zugehörige Centrum. Ferner möge $\mathfrak{F}_0$ aus $\mathfrak{F}$ durch Drehung um die Achse e_1 der Perspektive hervorgegangen sein. A_1, B_1, C_1, D_1 seien beliebige Punkte der Figur $\mathfrak{F}_1$, A, B, C, D die entsprechenden Punkte von $\mathfrak{F}$, und A_0, B_0, C_0, D_0 die bezüglichen Punkte der gedrehten Figur $\mathfrak{F}_0$. Da sich A_1B_1 und AB auf e_1 schneiden und mithin auch A_1B_1 und A_0B_0, so liegen diese Punkte in einer Ebene; in gleicher Weise liegen B_1C_1 und B_0C_0 in einer zweiten und C_1A_1 und C_0A_0 in einer dritten Ebene. Diese drei Ebenen schneiden sich in einem Punkte O_0, in dem sich auch die drei Strahlen A_1A_0, B_1B_0 und C_1C_0 treffen. Ist jetzt D_1 ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{F}_1$, so ziehen wir D_1A_1 und D_1B_1; sodann ver-

binden wir $D_1 A_1 \times e_1$ mit A und $D_1 B_1 \times e_1$ mit B; beide Gerade schneiden sich im Punkte D von $\mathfrak{F}$, woraus man durch Drehung D_0 erhält. Wiederum liegen die vier Punkte $A_1 B_1 A_0 B_0$, resp. $B_1 D_1 B_0 D_0$, resp. $A_1 D_1 A_0 D_0$ je in einer Ebene und die drei Strahlen $A_1 A_0$, $B_1 B_0$ und $D_1 D_0$ laufen durch einen Punkt. Da aber $A_1 A_0 \times B_1 B_0 = O_0$ ist, geht auch $D_1 D_0$ durch diesen Punkt hindurch, d. h. der beliebige Punkt D_1 von $\mathfrak{F}_1$ liegt mit dem entsprechenden Punkte D_0 von $\mathfrak{F}_0$ auf einem Strahle durch O_0. Beide Figuren $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_0$ sind somit perspektiv aus dem Punkte O_0.

168. Wir hatten in 164 gesehen, wie man aus zwei perspektiv gelegenen Figuren, die sich in verschiedenen Ebenen befinden, durch Drehung zwei centrisch-kollineare oder perspektive Figuren einer Ebene erhalten kann. Dieser Übergang gestattet auch die Eigenschaften centrisch-kollinearer oder perspektiver Figuren einer Ebene abzuleiten. Es müssen sich diese Eigenschaften jedoch auch aus der Definition der Centralkollineation ergeben, und dieser Gedanke soll noch mit wenigen Worten etwas näher ausgeführt werden (Fig. 125).

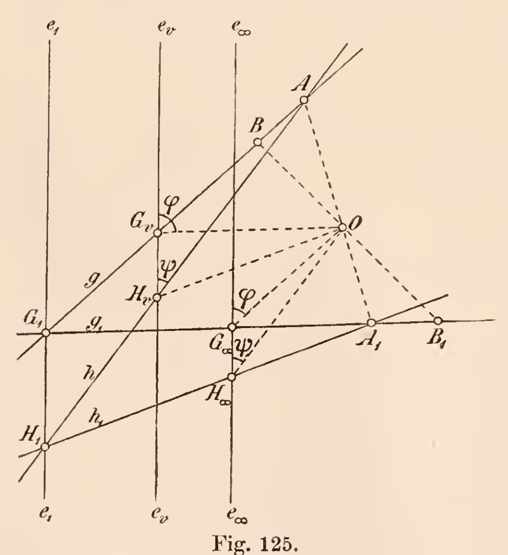


Fig. 125.

Zunächst ist klar, daß das Centrum O, die Achse e_1 und ein Paar entsprechender Punkte A und A_1, die auf einem Strahle durch O liegen, die perspektive Beziehung in der Ebene völlig bestimmen. Zu einem beliebigen Punkte B erhält man ja das zugehörige Bild B_1, indem man $AB = g$ mit e_1 in G_1 schneidet und die Gerade $G_1 A_1 = g_1$ zieht, auf welcher der Strahl OB dann den Bildpunkt B_1 ausschneidet. Zieht man durch O einen Strahl parallel zu g, so schneidet er die Bildgerade g_1 im Fluchtpunkt G_∞, dem Bilde des unendlich fernen Punktes von g. Zieht man durch O einen Strahl parallel zu g_1, so schneidet er auf g den Verschwindungspunkt G_v aus, dem ein unendlich fernes Bild zugehört. Mit anderen Worten: Das Bild einer Geraden g geht durch ihren Achsenschnittpunkt G_1 und ist zur Verbindungslinie $G_v O$ ihres Ver-

schwindungspunktes mit dem Centrum parallel. Ebenso geht das Original zu einer Geraden g_1 durch ihren Achsenschnittpunkt G_1 und ist zur Verbindungslinie $G_\infty O$ ihres Fluchtpunktes mit dem Centrum parallel.

169. Ferner ergiebt sich, daß die Fluchtpunkte auf allen Bildgeraden durch eine Gerade e_∞ ausgeschnitten werden, die zur Achse e_1 parallel ist. Ebenso schneidet eine zur Achse parallele Gerade e_v auf allen Originalgeraden die Verschwindungspunkte aus. Die Gerade e_∞ heißt wieder Fluchtlinie und ist das Bild der unendlich fernen Geraden des Originalsystems, während der unendlich fernen Geraden im Bildsystem die Gerade e_v als Verschwindungslinie entspricht. Zum Beweise wähle man noch ein Paar entsprechender Geraden h und h_1 (Fig. 125), die sich in einem Punkte H_1 der Achse e_1 schneiden, und suche wie vorher den Verschwindungspunkt H_v und den Fluchtpunkt $H_\infty (OH_\infty \parallel h, \; OH_v \parallel h_1)$. Dann sind die Dreiecke AG_1A_1 und AG_vO ähnlich; also: $G_1A : G_vA = A_1A : OA$; ebenso kommt: $H_1A : H_vA = A_1A : OA$; demnach müssen $G_1H_1 = e_1$ und $G_vH_v = e_v$ parallel sein, da sie auf g und h proportionale Stücke abschneiden. In gleicher Weise erschließt man den Parallelismus von e_∞ und e_1.

Die Verschwindungslinie e_v und die Fluchtlinie e_∞ werden auch als die Gegenachsen von Original und Bild bezeichnet; ebenso spricht man von den Gegenpunkten G_v und G_∞ einer Geraden und ihres Bildes.

170. Es mag noch erwähnt werden, daß die Perspektive in der Ebene auch durch Angabe des Centrums, der Achse und einer Gegenachse bestimmt ist. Denn indem man an Stelle zweier entsprechender Punkte eine Gegenachse einführt, wird ihrem Schnittpunkt mit irgend einer Geraden der Punkt zugeordnet, welcher auf der Verbindungslinie des ersteren mit dem Centrum unendlich fern liegt.

171. Wichtig für das Folgende sind die beiden unmittelbar aus der Fig. 125 zu entnehmenden Beziehungen: Das Bild einer Geraden schneidet die Fluchtlinie unter dem gleichen Winkel φ, wie der Strahl aus dem Centrum nach dem Verschwindungspunkt die Verschwindungslinie, und andererseits: Eine Gerade schneidet die Verschwindungslinie unter dem gleichen Winkel ψ, wie der Strahl aus dem Centrum nach dem Fluchtpunkt die Fluchtlinie.

Perspektive Grundgebilde.

Wir erklären zunächst einige öfter wiederkehrende Benennungen.

172. Faßt man eine Gerade als ein aus Punkten bestehendes Gebilde auf, so legt man ihm dem Namen Punktreihe bei und nennt die Gerade den Träger der Punktreihe. Von Geraden, die in einer Ebene liegen und durch einen Punkt derselben gehen, sagt man, daß sie einen Strahlbüschel bilden; der gemeinsame Punkt heißt der Scheitel und die Ebene der Träger desselben. Ähnlich sagt man von Ebenen, die eine gemeinsame Gerade enthalten, daß sie einen Ebenenbüschel bilden und nennt diese Gerade seine Achse. — Die Punktreihe, der Strahlbüschel und der Ebenenbüschel sind die einfachsten Grundgebilde, die man aus Punkten, Geraden oder Ebenen als Elementen zusammensetzen kann. In ihnen ist das einzelne Element jedesmal durch eine einzige Bedingung bestimmbar (vergl. 210), weshalb sie auch als einförmige Grundgebilde bezeichnet werden.

173. Eine Punktreihe wird aus einem außerhalb gelegenen Punkte durch einen Strahlbüschel projiziert, ebenso ein Strahlbüschel durch einen Ebenenbüschel. Umgekehrt wird jeder Ebenenbüschel von einer nicht in ihm enthaltenen Ebene in einem Strahlbüschel und von einer Geraden in einer Punktreihe geschnitten. Zwei Punktreihen bezeichnen wir als perspektiv, wenn sie Schnitte des nämlichen Strahlbüschels sind. Ebenso heißen zwei Strahlbüschel perspektiv, wenn sie Schnitte desselben Ebenenbüschels sind, oder wenn sie eine und dieselbe Punktreihe aus zwei verschiedenen Centren projizieren. Endlich werden zwei Ebenenbüschel perspektiv genannt, wenn sie einen und denselben Strahlbüschel aus verschiedenen Centren projizieren. Auch von einer Punktreihe und einem Strahlbüschel, oder von einer Punktreihe und einem Ebenenbüschel, oder einem Strahl- und einem Ebenenbüschel sagt man, daß sie perspektiv seien, wenn die Elemente des einen Gebildes auf den entsprechenden Elementen des andern liegen.

Es gilt jetzt eine Reihe von Sätzen abzuleiten, die sich auf die erwähnten einfachen Grundgebilde beziehen und für die Projektionslehre von grundlegender Bedeutung sind. Wir dürfen uns dabei größtenteils auf die Betrachtung von Punktreihen beschränken, da die Übertragung der betreffenden Sätze auf Strahl- und Ebenenbüschel keiner Schwierigkeit unterliegt.

174. Wir gehen aus von zwei durch Centralprojektion Punkt

für Punkt aufeinander bezogenen Geraden g und g_1 (Fig. 126). Auf ihnen ist der Schnittpunkt beider G_1 als der sich selbst entsprechende Punkt ausgezeichnet, ferner auf g_1 der Fluchtpunkt G_∞, das Bild des unendlich fernen Punktes von g, sowie auf g der Verschwindungspunkt G_v, welcher dem unendlich fernen Punkt von g_1 entspricht. Dreht man eine der beiden Geraden, etwa g_1, beliebig um den Punkt G_1, so bleiben die Punktreihen nach dem Früheren perspektiv.

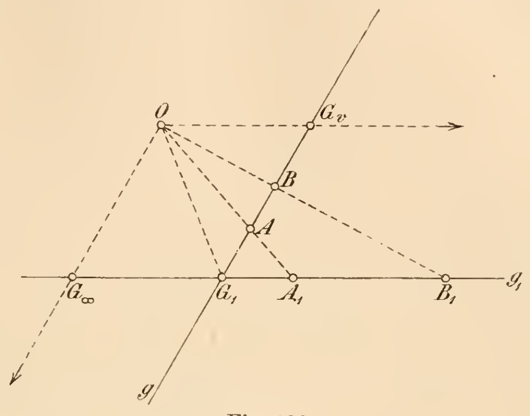


Fig. 126.

Das Centrum O darf daher beliebig auf einer um G_v mit dem Radius $= G_1 G_\infty$ beschriebenen Kugel angenommen werden, worauf sich die Lage von g_1 ergiebt.

Sollen zwei Punktreihen g und g_1 sich in perspektive Lage bringen lassen, so fragt es sich, zu wieviel Punkten der einen die entsprechenden Punkte der anderen willkürlich gewählt werden können. Hierüber geben die nächsten Sätze weiteren Aufschluss.

175. Eine Gerade g_1 kann zu einer anderen g stets in solche Lage gebracht werden, daß drei gegebene Punkte A, B, C der letzteren mit drei beliebig gegebenen Punkten A_1, B_1, C_1 der ersteren perspektiv sind. Vereinigt man z. B. zwei entsprechende Punkte C und C_1 durch geeignete Verschiebung der Geraden in einem Punkte G_1, so bestimmen die Verbindungslinien AA_1 und BB_1 der übrigen das Projektionscentrum O als ihren Schnittpunkt. Dies Beispiel giebt indes nicht die allgemeinste Art der Herstellung der im Satz geforderten Lage. Vielmehr kann man noch die Lage des Centrums O gegen eine der Geraden, etwa g, willkürlich fixieren. Dann kann man der Geraden g_1 stets eine solche Lage geben, daß ihre Punkte A_1, B_1, C_1 sich auf den entsprechenden Strahlen OA, OB, OC befinden. Es gilt nämlich der Satz: Eine Punktreihe und ein Strahlbüschel lassen sich stets in solche Lage bringen, daß drei gegebene Strahlen a, b, c des Büschels durch drei beliebig gegebene Punkte A, B, C der Reihe gehen. Um diese Lage herzustellen, lege man

zunächst die Reihe A, B, C derart auf den Strahl a, daß C mit dem Scheitel des Büschels zusammenfällt, bestimme dann B_1 auf b, indem man $BB_1 \| c$ macht, und ziehe die Gerade AB_1, welche c in C_1 schneidet (Fig. 127). Nun ist $C_1A : B_1A = CA : BA$; legt man also zu AB_1C_1 eine Parallele, welche die Strahlen a, b, c in A', B', C' respektive schneidet, so hat man: $CA : BA = C'A' : B'A'$. Sorgt man noch dafür, daß $C'A' = CA$ wird, indem man $AK = AC$ macht und $KC' \| a$ zieht, so wird auch $B'A' = BA$; die Reihe läßt sich somit so verschieben, daß ihre Punkte A, B, C mit den Punkten A', B', C' zur Deckung kommen.

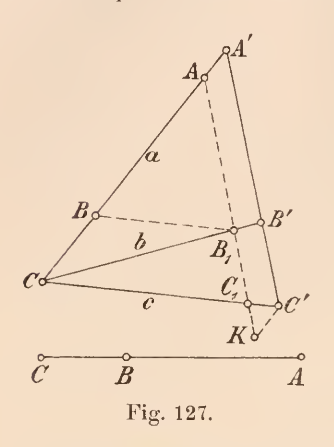


Fig. 127.

176. Wie wir sahen, brauchen drei Punkte einer Geraden keinerlei Bedingung zu erfüllen, damit man sie mit drei gegebenen Punkten einer anderen Geraden in perspektive Lage bringen kann. Dagegen müssen vier Punkte auf g_1 eine gewisse besondere Lage haben, damit sie zu vier gegebenen Punkten von g perspektiv gelegt werden können. Dies erhellt aus folgendem Satze: L i e g e n d i e v i e r P u n k t e A, B, C, D d e r G e r a d e n g p e r s p e k t i v z u d e n v i e r P u n k t e n A_1, B_1, C_1, D_1 d e r G e r a d e n g_1 v o m C e n t r u m O_1 a u s, s o k a n n m a n s i e a u c h v o n j e d e m a n d e r e n C e n t r u m O_2 a u s i n p e r s p e k t i v e L a g e b r i n g e n, w o b e i d i e L a g e v o n O_2 g e g e n g w i l l k ü r l i c h f i x i e r t w e r d e n d a r f.

177. Die Punktreihen A, B, C, D und A_1, B_1, C_1, D_1 auf g und g_1 seien ursprünglich durch Centralprojektion aus dem Centrum O_1 aufeinander bezogen (Fig. 128). Es werde nun im Raume beliebig ein neues Centrum O_2 gegeben und die in der Ebene $\mathsf{E}_1 = O_1 g$ liegende Figur auf die Ebene $\mathsf{E}_2 = O_2 g$ in der Richtung O_1O_2 projiziert. Dann ist die Gerade g_2 die Projektion von g_1 und ihre Schnittpunkte A_2, B_2, C_2, D_2 mit den Strahlen aus O_2 sind die Projektionen der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1. Zugleich gilt die Relation: $A_1B_1 : B_1C_1 : C_1D_1 = A_2B_2 : B_2C_2 : C_2D_2 = A'B' : B'C' : C'D'$, wenn g' parallel zu g_2 gezogen wird und die Strahlen aus O_2 in den Punkten A', B', C', D' schneidet. Richtet man es zugleich so ein, daß $A'B' = A_1B_1$ wird, so wird auch $B'C' = B_1C_1$ und $C'D' = C_1D_1$. Man kann also die Punktreihe A_1, B_1, C_1, D_1 mit der Reihe A', B', C', D' zur Deckung bringen und dann liegt sie aus dem Centrum O_2 perspektiv zur Reihe A, B, C, D.

178. Diese neue perspektive Lage wird aber nach 175 schon durch die Wahl der drei Punkte A_1, B_1, C_1 bestimmt; demnach ist

D_1 nicht mehr willkürlich, hängt vielmehr von der Lage des Punktes D ab. Um D_1 zu konstruieren, bringt man die Reihe A_1, B_1, C_1 auf irgend eine Weise in perspektive Lage mit der Reihe A, B, C, dann liegt D_1 mit D auf einem Strahl durch das Centrum.

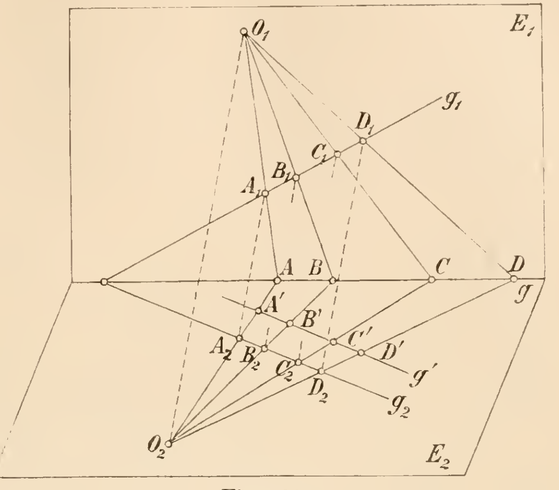


Fig. 128.

Am einfachsten kann das durch eine Verschiebung geschehen, die A_1 mit A zur Deckung bringt; dann ist $O = BB_1 \times CC_1$ das zugehörige Centrum. Zwei Punktreihen liegen perspektiv, wenn sie zwei Punkte entsprechend gemein haben.

Ferner folgt der Satz: Zwei Gerade g und g_1 lassen sich nicht derart in perspektive Lage bringen, daß vier gegebenen Punkten der ersten Reihe vier beliebig gegebene Punkte der zweiten entsprechen.

179. Aus dem Vorhergehenden wollen wir noch folgende spezielle Folgerung ziehen. Liegen die Punkte A, B, C einer Geraden g perspektiv mit den Punkten A_1, B_1, C_1 einer Geraden g_1 aus einem Punkte O, und bestimmt man auf jeder Geraden den Gegenpunkt, also G_v auf g und G_∞ auf g_1 ($OG_v \parallel g_1$ und $OG_\infty \parallel g$), so bleiben G_v und G_∞ die Gegenpunkte bei jeder Lage von g und g_1, für welche A, B, C mit A_1, B_1, C_1 perspektiv sind.

180. Es ergeben sich auch die weiteren Sätze:

Sind zwei Punktreihen zu einer dritten perspektiv, so können sie zu einander in Perspektive gesetzt werden, indem man sie aus einem und demselben Centrum zur dritten Punktreihe perspektiv legt. Wenn zwei Punktreihen einerseits perspektiv gelegt und andererseits drei Punkte der einen mit den entsprechenden der andern zur Deckung gebracht werden können, so sind sie kongruent. Denn in dieser letzteren Lage sind sie von jedem Punkte aus perspektiv, so daß je zwei entsprechende Punkte beider Reihen sich decken müssen.

181. Den Sätzen über die perspektive Lage von Punktreihen in 175—180 stehen analoge Sätze gegenüber, die sich auf Strahlbüschel beziehen.

Zwei Strahlbüschel S und S_1 können stets in solche Lage gebracht werden, daß drei gegebene Strahlen a, b, c des einen mit drei beliebig gewählten Strahlen a_1, b_1, c_1 des andern perspektiv liegen, d. h. sich auf einer Geraden — der Perspektivitätsachse — schneiden. Die Lage der Perspektivitätsachse gegen einen der Büschel kann dabei willkürlich angenommen werden. Schneidet nämlich diese Achse die Strahlen a, b, c resp. in A, B, C, so kann man den Büschel S_1 so verschieben, daß seine Strahlen a_1, b_1, c_1 resp. durch A, B, C hindurchgehen. Zu diesem Zweck schneide man den ursprünglichen Büschel S_1 in einer Reihe A', B', C', die zu A, B, C kongruent ist (vergl. 175) und gebe ihm darauf eine solche Lage, daß A', B', C' mit A, B, C resp. zur Deckung gelangen.

Die einfachste Lösung — freilich nicht die allgemeine — ergiebt sich, wenn man zwei entsprechende Strahlen a und a_1 zusammen fallen läßt; die Schnittpunkte $b \times b_1$ und $c \times c_1$ der andern Strahlenpaare ergeben dann die Perspektivitätsachse als ihre Verbindungslinie. Zwei Strahlbüschel liegen perspektiv, wenn sie zwei Strahlen entsprechend gemein haben.

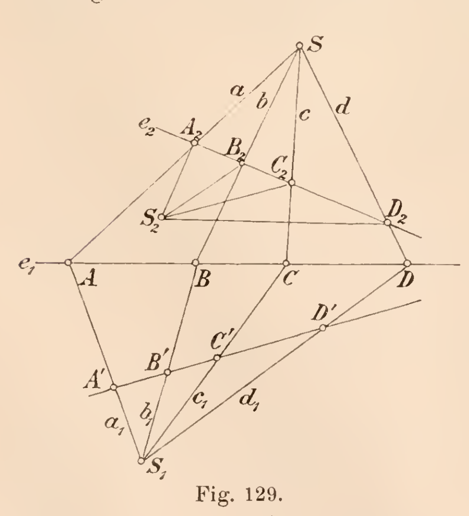


Fig. 129.

182. Liegen die vier Strahlen a, b, c, d des Büschels S perspektiv zu den vier Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 des Büschels S_1 in Bezug auf die Achse e_1, so kann man sie auch in Bezug auf jede andere Achse e_2 in perspektive Lage bringen, wobei die Lage von e_2 gegen S willkürlich fixiert werden darf. Seien A, B, C, D die Punkte der Achse e_1, durch welche die bezüglichen Strahlen a, b, c, d des ersten Büschels und auch die entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 des zweiten hindurchgehen (Fig. 129). Ferner möge e_2 die Strahlen des ersten Büschels in den Punkten A_2, B_2, C_2, D_2 resp. schneiden. Dann

giebt es nach 177 eine Gerade e', welche die Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 in einer Reihe A', B', C' D' schneidet, die zur Reihe A_2, B_2, C_2, D_2 kongruent ist (vergl. auch 185). Nun verschiebe man den Büschel S_1 nach S_2 so, daß die auf seinen Strahlen liegenden Punkte A', B', C', D' mit der Reihe A_2, B_2, C_2, D_2 zur Deckung gelangen.

183. In zwei perspektiven Strahlbüscheln S und S_1 giebt es zwei einander entsprechende Paare rechtwinkliger Strahlen. Sie werden (vergl. 12) gefunden, indem man durch die Scheitel S und S_1 einen Kreis mit dem Mittelpunkt auf der Perspektivitätsachse legt. Schneidet dieser die Achse in X und Y, so sind $SX = x$, $SY = y$ und $S_1X = x_1$, $S_1Y = y_1$ die gesuchten Rechtwinkelpaare (Fig. 130).

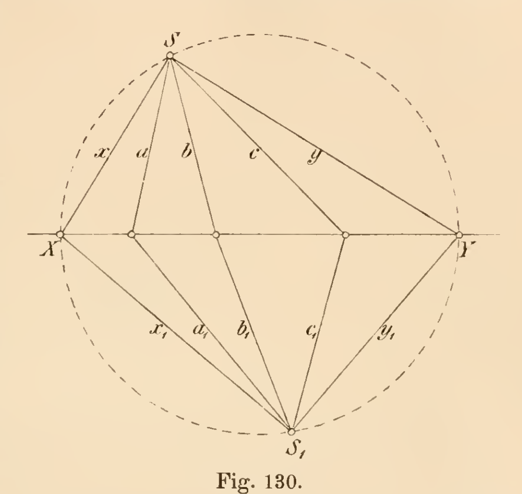


Fig. 130.

Aus dem vorigen Satz folgt weiter: Hat man in zwei perspektiven Strahlbüscheln die entsprechenden Rechtwinkelpaare bestimmt und bringt die Büschel in irgend eine andere perspektive Lage, so entsprechen sich die Schenkel der Rechtwinkelpaare auch in der neuen Lage.

184. Wir haben ferner den Satz: Sind zwei Strahlbüschel zu einem dritten perspektiv, so können sie zu einander in Perspektive gesetzt werden, indem man sie in Bezug auf eine und dieselbe Achse zum dritten Strahlbüschel perspektiv legt. Und weiter: Wenn zwei Strahlbüschel einerseits perspektiv gelegt und andererseits drei Strahlen des einen mit den entsprechenden des andern zur Deckung gebracht werden können, so sind sie kongruent.

185. An diese allgemeinen Sätze wollen wir noch einige besondere Bemerkungen anknüpfen, die weiterhin ihre Verwendung finden sollen. Schon in 177 haben wir gesehen, wie man perspektive Strahlbüschel in kongruenten Punktreihen schneiden kann. So sind in Fig. 128 die Punktreihen $A_1B_1C_1D_1$ auf g_1 und $A'B'C'D'$ auf g' kongruent. Aus dieser Figur erkennt man auch, daß zwei Strahlen durch O_1 und O_2, die zu g_1 und g_2 resp. parallel laufen,

sich auf g schneiden und somit entsprechende Strahlen der Büschel O_1 und O_2 sind. Die Konstruktion kongruenter Schnitte aus perspektiven Büscheln folgt hieraus und ist in Figur 131 dargestellt. Der Büschel S wird von g in der Reihe $ABCD$ geschnitten. Nun ziehe man im Büschel S den Strahl h parallel g und hierauf den entsprechenden Strahl h_1 im Büschel S_1. Die zu h_1 parallele Gerade g' schneidet dann den zweiten Büschel in der Punktreihe $A'B'C'D'$, die zu der ersteren kongruent ist. Die Richtigkeit des Gesagten erhellt auch schon daraus, daß in kongruenten Punktreihen die unendlich fernen Punkte einander wechselseitig entsprechen. Es muß also in den Strahlbüscheln S und S_1 entsprechende Strahlen h und h_1 geben, die zu den Trägern g und g' der kongruenten Schnitte parallel sind.

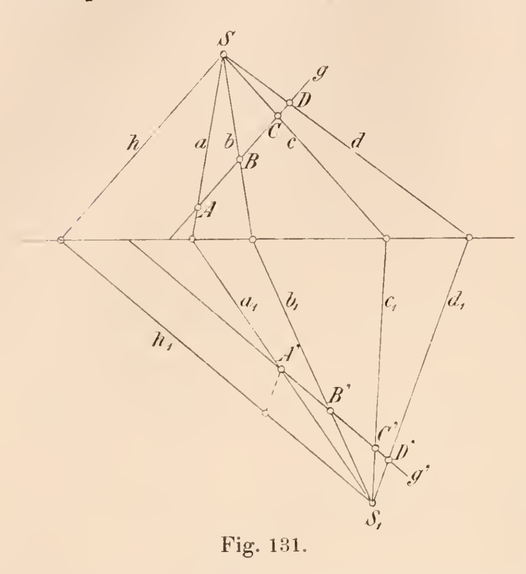


Fig. 131.

186. Von zwei perspektiven Strahlbüscheln kann jedes als orthogonale Projektion des andern dargestellt werden. Da man insbesondere drei beliebige Strahlen abc eines Büschels mit drei beliebigen Strahlen $a_1 b_1 c_1$ eines zweiten in perspektive Lage bringen kann, ist zu zeigen, daß sowohl die ersteren als orthogonale Projektion der letzteren, als auch die letzteren als orthogonale Projektion der ersteren erhalten werden können. Um dies einzusehen, konstruieren wir zunächst in den Büscheln S und S_1 die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel xy und $x_1 y_1$ (Fig. 132), die sich in X und Y auf der

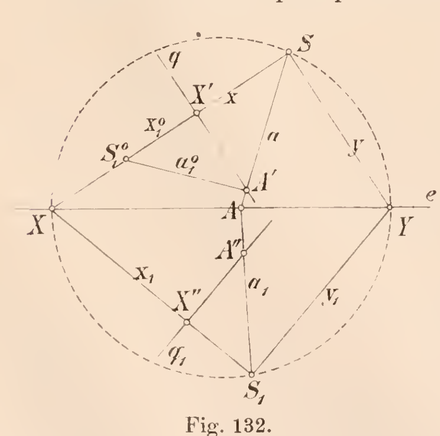


Fig. 132.

Perspektivitätsachse e schneiden. Nun ziehen wir zu y eine Parallele q, welche die Strahlen x und a in X' und A' schneidet, und zu y_1 eine Parallele q_1, welche x_1 und a_1 in X'' und A'' trifft, doch so, daß $X''A'' = X'A'$ wird. Dann liefern die Büschel S und S_1 auf q und q_1 resp. kongruente Punktreihen und wir können den Büschel S_1 samt der Reihe q_1 derart verschieben, daß $X''A''$ mit $X'A'$ zusammenfällt. Ist $\angle x_1 a_1 > \angle xa$, so ist $X'S > X''S_1$, folglich läßt sich die Ebene des Büschels S der Art um q drehen, daß die orthogonale Projektion von S mit $S_1{}^0$, der neuen Lage von S_1, zusammenfällt. Damit wird zugleich der Büschel mit dem Scheitel $S_1{}^0$ die orthogonale Projektion des Büschels mit dem Scheitel S.

Schneiden wir dagegen die Büschel S und S_1 durch Parallele zu x und x_1 in kongruenten Reihen und bedenken, daß $\angle y_1 a_1 < \angle ya$ ist, so erkennen wir, daß nach geeigneter Verschiebung und Drehung der Büschel S_1 als orthogonale Projektion von S erscheint.

187. Die seitherigen Betrachtungen können schließlich auch ausgedehnt werden auf die perspektive Lage von Ebenenbüscheln. Wir erwähnen die bezüglichen Ergebnisse hier der Vollständigkeit halber, obwohl wir uns für konstruktive Zwecke nur derjenigen Sätze zu bedienen brauchen, die sich auf Punktreihen und Strahlbüschel beziehen.

Zwei Ebenenbüschel mit den Achsen s und s_1 können stets in solche Lage gebracht werden, daß drei gegebene Ebenen A, B, Γ des einen mit drei beliebig gewählten Ebenen des anderen perspektiv liegen, d. h. so, daß ihre Schnittlinien einen Strahlbüschel bilden, dessen Träger als Perspektivitätsebene bezeichnet werden mag. Die Lage der Perspektivitätsebene gegen einen der beiden Büschel kann willkürlich angenommen werden. Schneidet nämlich diese Ebene die Ebenen A, B, Γ in dem Strahlbüschel abc, so hat man, um die perspektive Lage der Ebenenbüschel s und s_1 herzustellen, die Ebenen A_1, B_1, Γ_1 in einem kongruenten Strahlbüschel zu schneiden und darauf dem Ebenenbüschel s_1 eine solche Lage zu geben, daß die kongruenten Strahlbüschel sich decken. Um aber den Ebenenbüschel A_1, B_1, Γ_1 in einem zu abc kongruenten Büschel $a'b'c'$ zu schneiden, schneide man ihn zuerst normal zu seiner Achse s_1 in dem Büschel $a_1 b_1 c_1$ und stelle letzteren nach 186 als Orthogonalprojektion von $a'b'c'$ dar. (Vergl. die schiefe Ansicht in Fig. 133.)

188. Liegen vier Ebenen $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma\Delta$ eines Büschels s perspektiv zu den vier Ebenen $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1\Gamma_1\Delta_1$ eines anderen Büschels s_1 in Bezug auf die Perspektivitätsebene E_1, so

kann man sie auch in Bezug auf jede andere Ebene E_2 in perspektive Lage bringen, wobei die Lage von E_2 gegen s beliebig fixiert werden darf. Es folgt das unmittelbar aus der vorhergehenden Nummer.

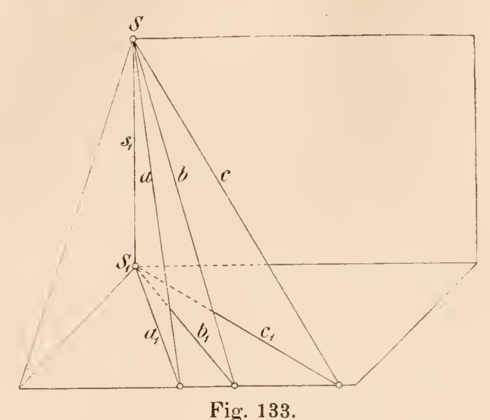


Fig. 133.

In zwei perspektiven Ebenenbüscheln giebt es zwei einander entsprechende Paare rechtwinkliger Ebenen. Sie entsprechen einander für jede mögliche perspektive Lage der beiden Büschel. Man findet sie mit Hilfe der entsprechenden rechten Winkel in den beiden Strahlbüscheln, die von zwei zu den Achsen s und s_1 senkrechten Ebenen aus den Ebenenbüscheln ausgeschnitten werden.

Sind zwei Ebenenbüschel zu einem dritten perspektiv, so können sie zu einander in Perspektive gesetzt werden, indem man sie in Bezug auf eine und dieselbe Ebene zum dritten Ebenenbüschel perspektiv legt. Wenn zwei Ebenenbüschel einerseits perspektiv gelegt und andererseits drei Ebenen des einen mit den entsprechenden des andern zur Deckung gebracht werden können, so sind sie kongruent.

189. Zwei einförmige Grundgebilde (Punktreihen, Strahl- und Ebenenbüschel) nennt man *projektiv*, wenn sie in perspektive Lage gebracht werden können. So kann eine Punktreihe sowohl zu einer zweiten, als auch zu einem Strahl- oder Ebenenbüschel projektiv sein, u. s. f. Aus den Sätzen in 180, 184 und 188 folgt aber sofort der allgemeine Satz: Ist ein einförmiges Grundgebilde (Punktreihe, Strahl- oder Ebenenbüschel) zu einem zweiten projektiv und dieses wiederum zu einem dritten, das dritte zu einem vierten u. s. f., so ist auch das erste Gebilde zu dem letzten projektiv, d. h. die beiden können in perspektive Lage zu einander gebracht werden.

190. Sind die vier Punkte $ABCD$ einer Reihe zu den vier Punkten $A_1B_1C_1D_1$ einer anderen projektiv, so sind diese Punkte $A_1B_1C_1D_1$ auch zu den Punkten $BADC$ oder $CDAB$ oder $DCBA$ projektiv. Bringen wir etwa die beiden

Träger der Reihen in eine solche relative Lage zu einander, daß C mit D_1 zusammenfällt (Fig. 134), dann werden die Strahlen A_1A, A_1B, A_1C, A_1D die Gerade DC_1 in vier Punkten $A'B'C_1D$ schneiden, die zu $ABCD$ perspektiv sind. Ebenso wird diese Gerade von den Strahlen AA_1, AB_1, AC_1, AD_1 in vier Punkten $A'B''C_1D$ geschnitten, die zu $A_1B_1C_1D_1$ perspektiv sind. Da aber $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ projektiv sind, so gilt Gleiches für $A'B'C_1D$ und $A'B''C_1D$; deshalb muß nach 180 B' mit B'' identisch sein. Von dem Centrum $B' = B''$ liegen nun die Punkte $BADC$ der Reihe nach perspektiv zu den Punkten $A_1B_1C_1D_1$; beide Reihen sind also auch projektiv. Ganz ebenso gestaltet sich der Beweis für die beiden andern oben genannten Reihenfolgen $CDAB$ und $DCBA$.

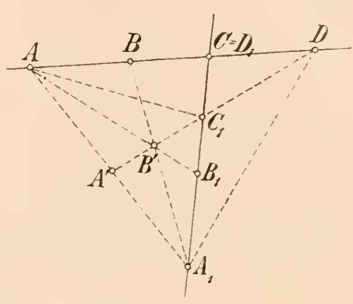


Fig. 134.

Im Speziellen können die Reihen $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ kongruent sein. Dann folgt, daß die vier Reihen $ABCD$, $BADC$, $CDAB$ und $DCBA$ untereinander projektiv sind, also in perspektive Lage gebracht werden können.

191. Wir wenden uns jetzt wieder der Centralprojektion ebener Figuren zu, von der wir ausgegangen waren, um mit den gewonnenen Hilfsmitteln folgenden Satz zu beweisen.

Je zwei ebene Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ können in perspektive Lage gebracht werden. — Wir weisen zunächst nach, daß dies in einer Ebene möglich ist. Wird dann das eine Viereck um die Perspektivitätsachse gedreht, so ergeben sich perspektive Lagen der Vierecke im Raume.

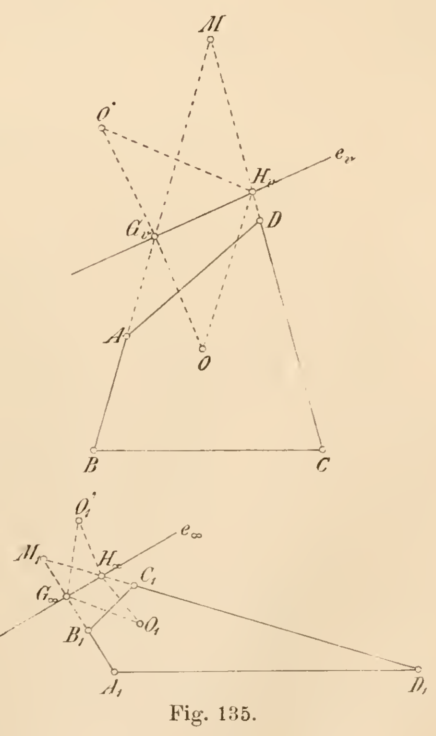


Fig. 135.

Es seien $M = g \times h$ und $M_1 = g_1 \times h_1$ die Schnittpunkte zweier entsprechender Gegenseitenpaare $g = AB$, $h = CD$ und $g_1 = A_1B_1$, $h_1 = C_1D_1$, die zusammen alle acht Ecken enthalten (Fig. 135). Denken wir uns eines der Vierecke, etwa $ABCD$ fest, so ist dem andern eine solche Lage zu erteilen, daß die Punktreihen ABM und $A_1B_1M_1$, sowie die Punktreihen CDM und $C_1D_1M_1$ aus einem Centrum O perspektiv liegen. Legen wir diese Reihen zunächst einzeln irgendwie perspektiv, so können wir ihre Gegenpunkte bestimmen, nämlich G_v auf g, G_∞ auf g_1, H_v auf h, H_∞ auf h_1. Hieraus ergeben sich die Gegenachsen $e_v = G_vH_v$ und $e_\infty = G_\infty H_\infty$ der beiden perspektiven Figuren.

Nach 171 müssen ferner die Beziehungen bestehen:

$$\angle OG_vH_v = \angle g_1e_\infty, \quad \angle OG_\infty H_\infty = \angle ge_v,$$
$$\angle OH_vG_v = \angle h_1e_\infty, \quad \angle OH_\infty G_\infty = \angle he_v.$$

192. Jetzt drehen wir das zweite Viereck bis e_∞ zu e_v parallel wird, dann muß sich die gewünschte perspektive Lage der beiden Vierecke durch eine bloße Parallelverschiebung der zweiten bewirken lassen. Wir ziehen nun einerseits in dem festen Viereck durch G_v und H_v respektive die Parallelen zu den Seiten g_1 und h_1 des gedrehten Vierecks und andererseits in dem gedrehten Viereck durch G_∞ und H_∞ respektive die Parallelen zu den Seiten g und h des festen Vierecks. Dann werden sich die ersteren in einem Punkte O' und die letzteren in einem Punkte O_1' schneiden, und eine Parallelverschiebung des zweiten Vierecks, bei der O_1' mit O' zusammenfällt, bringt die beiden Vierecke in perspektive Lage. Eine andere perspektive Lage der Vierecke ergiebt sich, wenn wir das zweite Viereck nachträglich um $O' = O_1'$ um 180^0 drehen.

Man kann jedoch auch zuerst das zweite Viereck um e_∞ umklappen und dann eine Drehung desselben vornehmen, so daß $e_\infty \parallel e_v$ wird. In diesem Falle schneiden sich die durch G_v und H_v gezogenen Geraden, welche zu den Seiten g_1 und h_1 des so gelegenen zweiten Vierecks parallel sind, im Punkte O, und ebenso die Parallelen zu g und h durch G_∞ und H_∞ im Punkte O_1. Eine Parallelverschiebung des zweiten Vierecks, wobei O_1 mit O zusammenfällt, bewirkt wiederum eine perspektive Lage beider Vierecke, und eine weitere perspektive Lage ergiebt sich noch, wenn man das zweite Viereck nachträglich um $O = O_1$ um 180^0 dreht. Es sind also vier verschiedene perspektive Lagen in der Ebene möglich.

In der Figur 136 ist eine der zuletzt erwähnten perspektiven Lagen dargestellt, wobei O_1 mit O vereinigt liegt. Sind $G_1 = g \times g_1$ und $H_1 = h \times h_1$ die Schnittpunkte der sich entsprechenden Seiten,

so sind die Vierecke $OH_\infty M_1 G_\infty$ und $MH_v OG_v$ ähnlich, da ihre homologen Seiten und die homologen Diagonalen $H_\infty G_\infty$ und $H_v G_v$ parallel laufen. Demnach sind auch ihre Diagonalen OM_1 und OM parallel, d. h. M, M_1 und O liegen auf einer Geraden. Nun sind auch die Vierecke $OH_\infty M_1 G_\infty$ und $MH_1 M_1 G_1$ ähnlich, da ihre homologen Seiten und die homologen Diagonalen OM_1 und MM_1 parallel laufen, folglich ist auch $H_1 G_1 \parallel H_\infty G_\infty$. — Jetzt liegen drei Punkte von g, nämlich M, G_v und der unendlich ferne Punkt, perspektiv vom Centrum O aus zu den entsprechenden Punkten auf g_1, nämlich M_1, dem unendlich fernen Punkt und G_∞. Mithin liegen je zwei entsprechende Punkte von g und g_1 auf einem Strahle durch O; insbesondere gehen AA_1 und BB_1 durch O. Ganz ebenso zeigt sich, daß CC_1 und DD_1 durch O gehen; die Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ befinden sich also in perspektiver Lage.

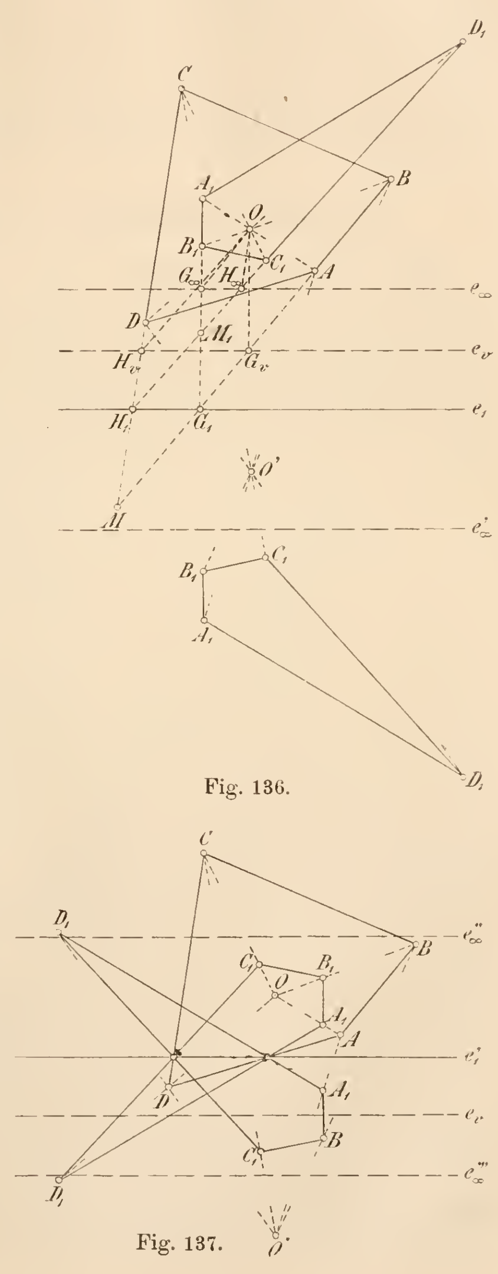


Fig. 136.

Fig. 137.

193. In Fig. 136 ist noch eine andere perspektive Lage angegeben; sie geht aus der vorigen hervor, wenn man das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ um die Perspektivitätsachse e_1 umklappt; hierbei ist O' das Centrum. Die Fig. 137

bringt die beiden noch fehlenden perspektiven Lagen; sie ergeben sich aus den Lagen in Fig. 136, wenn man das eine Viereck $A_1B_1C_1D_1$ um O und das andere Viereck $A_1B_1C_1D_1$ um O' um 180^0 dreht. Im Raume sind nur zwei verschiedene Arten perspektiver Lagen der beiden Vierecke möglich. Sie werden erhalten, wenn man in Fig. 136 das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ um die Achse e_1, oder wenn man es in Fig. 137 um die Achse e'_1 aufdreht.

Harmonische Grundgebilde. Vierseit und Viereck.

194. Die einfachste Figur in der Ebene ist — vom Dreieck abgesehen — das Vierseit. Das vollständige Vierseit wird von vier Geraden a, b, c, d einer Ebene gebildet, deren sechs Schnittpunkte seine Ecken heißen. Diese gruppieren sich paarweise als Gegenecken, nämlich: $a \times b = E$ und $c \times d = F$, $a \times c = G$ und $b \times d = H$, $a \times d = K$ und $b \times c = J$, so daß durch jedes Paar alle vier Seiten gehen. Die Verbindungslinien je zweier Gegenecken werden Diagonalen genannt und bilden das Diagonaldreiseit (Fig. 138).

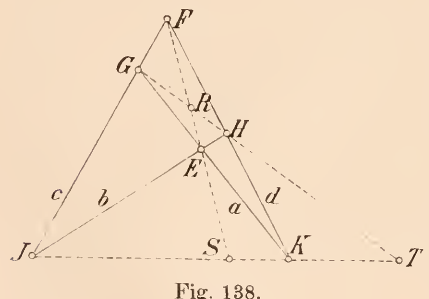


Fig. 138.

Die Ecken eines Vierseits und seines Diagonaldreiseits weisen eine charakteristische Lage zu einander auf, die sich bei jedem Vierseit wieder findet. Daraus folgt denn auch, daß diese charakteristische Lage durch irgend welche Parallel- oder Centralprojektion nicht zerstört werden kann, da eine solche ein Vierseit immer wieder in ein Vierseit verwandelt.

195. Betrachten wir zwei Diagonalen eines Vierseits, so trägt jede von ihnen vier Punkte, und die vier Punkte auf der einen liegen zu den vier Punkten auf der andern in doppelter Weise perspektiv. So sind $GHRT$ vom Centrum F aus perspektiv zu $JKST$, dagegen vom Centrum E aus perspektiv zu $KJST$. Nach 180 können somit auch die vier Punkte $JKST$ zu den vier Punkten $KJST$ in perspektive Lage gebracht werden, oder wie wir uns nach 189 kürzer ausdrücken: die Punkte $JKST$ sind projektiv zu den Punkten $KJST$. Von vier Punkten $JKST$, welche diese besondere Eigenschaft besitzen, sagen wir, daß sie sich in harmonischer Lage befinden.

Wir sprechen also die Definition aus: Auf jeder Diagonale

eines Vierseits liegen die beiden Ecken und die Schnittpunkte mit den beiden andern Diagonalen harmonisch.

196. Es läßt sich auch leicht die Umkehrung zeigen, daß vier Punkte $JKST$ einer Geraden stets zwei Gegenecken und zwei Diagonalschnittpunkte eines Vierseits bilden können, falls $JKST$ zu $KJST$ projektiv ist. Zum Beweise ziehe man durch T eine beliebige Gerade und projiziere aus einem beliebigen Centrum F jene Punkte auf diese Gerade, so daß $GHRT$ zu $JKST$ perspektiv liegen (Fig. 138). Wenn nun aber $JKST$ und $KJST$ projektiv sind, so sind nach 189 auch $GHRT$ und $KJST$ projektiv, und da in T zwei entsprechende Punkte zusammenfallen, so sind nach 178 die zweimal vier Punkte sogar perspektiv, d. h. GK, JH und RS schneiden sich in einem Punkte E. Damit ist aber die erwähnte Umkehrung bewiesen.

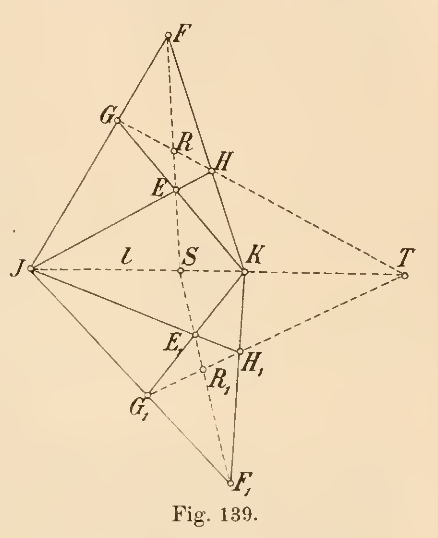


Fig. 139.

197. Aus diesen Betrachtungen geht zugleich hervor, daß durch drei von den vier harmonischen Punkten der vierte mit bestimmt ist. Denn sind JKT gegeben, so kann man wie vorher eine Gerade durch T und den Punkt F beliebig annehmen, dann ergeben sich G, H und $E = JH \times GK$, und damit auch $S = JK \times EF$.

Führen wir dieselbe Konstruktion zweimal aus, wie das in Fig. 139 geschehen ist, so gelangen wir von den Punkten JKT der Geraden l ausgehend immer zu dem nämlichen Punkte S, welcher sich in harmonischer Lage mit jenen drei Punkten befindet. Das giebt den Satz: Alle Vierseite, welche eine Diagonale und auf ihr zwei Eckpunkte und einen Diagonalschnittpunkt gemein haben, haben auch noch den andern Diagonalschnittpunkt auf ihr gemeinsam.

Man kann die Richtigkeit dieses Satzes auch leicht direkt erkennen, wenn man in Fig. 139 von den beiden Vierseiten mit der gemeinsamen Diagonalen l und den gemeinsamen Punkten JK und T das eine um l aufdreht. Dann sind die beiden Vierseite in perspektiver Lage im Raume. Denn zunächst gilt dies von den Drei-

ecken FGH und $F_1G_1H_1$, deren entsprechende Seiten sich auf l schneiden; durch das zugehörige Centrum O gehen die Geraden FF_1, GG_1 und HH_1. Auch die Ebenen GKG_1 und HJH_1 enthalten den Punkt O und folglich geht auch ihre Schnittlinie EE_1 durch O. Die Geraden EE_1 und FF_1 liegen also in einer Ebene und diese schneidet l in einem Punkte S, durch welchen die beiden Geraden EF und E_1F_1 hindurchgehen.

198. Nach dem Vorhergehenden könnte es scheinen, daß von vier harmonischen Punkten zwei eine andere Rolle spielen als die beiden übrigen, insofern zwei davon, etwa J und K, zwei Ecken eines Vierseits, die beiden andern aber, etwa S und T, zwei Diagonalschnittpunkte desselben bilden. Daß dem nicht so ist, folgt daraus, daß man auch Vierseite konstruieren kann, welche S und T zu Ecken, dagegen J und K zu Diagonalschnittpunkten haben. Geht man nämlich von dem früheren Vierseit aus (Fig. 140) und zieht SG und SH, so liegen die Punkte $P = SH \times GK$, $Q = SG \times JH$ und T in gerader Linie. Denn die Punkte $JKST$ sind perspektiv zu den Punkten $GHRT$, und folglich sind die Strahlen EJ, EK, ES, ET nach 189 projektiv zu den Strahlen SG, SH, SR, ST. Die zweimal vier Strahlen sind aber sogar in perspektiver Lage, da die entsprechenden Strahlen ES und SR sich decken (vergl. 181); sonach liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen, nämlich Q, P und T, auf einer Geraden. Jetzt bilden die Geraden THG, TPQ, SPH, SQG die Seiten eines Vierseits, dessen Diagonalen sich in E, K und J schneiden, womit unsere Behauptung erwiesen ist. Wir erkennen also den Satz: Vier Punkte in harmonischer Lage gruppieren sich in zwei Paare derart, daß jedes Paar die Ecken eines Vierseits bilden kann, welches das andere Paar zu Diagonalschnittpunkten hat.

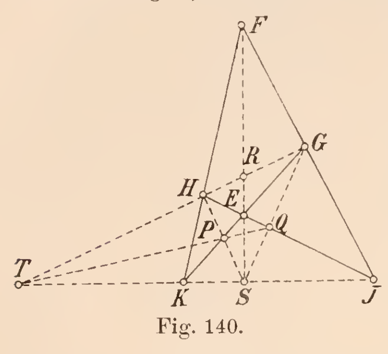


Fig. 140.

Wenn man von vier Punkten $ABCD$ nur aussagt, daß sie harmonisch liegen, so ist damit noch in keiner Weise festgelegt, wie sie sich in Paare gruppieren. Will man dieser Gruppierung Ausdruck verleihen, so sagt man: Das Punktepaar AB, oder die Strecke AB, wird durch das Punktepaar CD harmonisch geteilt. Dann wird nach den obigen Untersuchungen zugleich die Strecke CD durch die Punkte AB harmonisch geteilt.

199. Wir haben in 190 gesehen, daß vier beliebige Punkte einer Geraden in folgenden vier verschiedenen Anordnungen $ABCD$, $BADC$, $CDAB$, $DCBA$ zu einander projektiv sind. Liegen die vier Punkte im besonderen harmonisch, und werden etwa die Punkte AB durch CD harmonisch getrennt, so sind nach 195 auch die Punkte $BACD$ und $ABCD$ projektiv. Auch hier giebt es wieder vier zu einander projektive Anordnungen $BACD$, $ABDC$, $CDBA$, $DCAB$, so daß also bei vier harmonischen Punkten im ganzen acht zu einander projektive Reihenfolgen existieren. Man erhält alle acht Anordnungen, wenn man sowohl die beiden Punktepaare, die sich gegenseitig harmonisch trennen, als auch die Punkte jedes Paares unter sich vertauscht.

200. Vier Strahlen aus einem Punkte und ebenso vier Ebenen durch eine Achse heißen harmonisch, wenn sie von einer Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten werden. Offenbar giebt es auch für solche vier Strahlen und für solche vier Ebenen acht Reihenfolgen, die untereinander projektiv sind.

Hiernach gilt auch der Satz: In jeder Ecke eines Vierseits werden die beiden Seiten von der Diagonale und dem Strahl nach dem Schnittpunkt der andern beiden Diagonalen harmonisch getrennt.

201. Zweimal vier harmonische Punkte (Strahlen, Ebenen) sind stets projektiv, d. h. sie können in perspektive Lage gebracht werden. Werden die Punkte AB durch CD und die Punkte A_1B_1 durch C_1D_1 harmonisch getrennt, so sind durch die Wahl der Punkte ABC einerseits und $A_1B_1C_1$ andererseits die Punkte D und D_1 mitbestimmt. Man bringe nun $A_1B_1C_1$ zu ABC in perspektive Lage, indem man C_1 mit C vereinigt (Fig. 141), und verbinde dann A und B mit jedem der beiden Punkte A_1 und B_1. Diese vier Geraden bilden ein Vierseit, von dem AB und A_1B_1 zwei Diagonalen sind, während die dritte Diagonale JK auf ihnen die vierten harmonischen Punkte D resp. D_1 ausschneidet. Aus der Figur ist aber zu ersehen, daß $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ vom Centrum K aus perspektiv liegen. Es ist nach Früherem selbstverständlich, daß es acht verschiedene Reihenfolgen der Punkte $A_1B_1C_1D_1$ giebt, deren jede zu $ABCD$ projektiv ist.

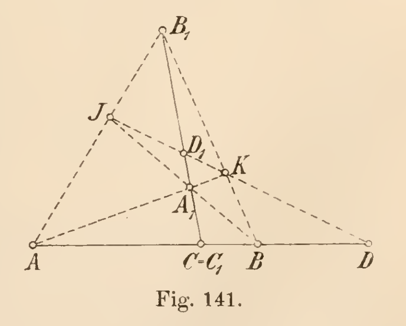


Fig. 141.

Hiermit ist auch die Aufgabe gelöst, einen Punkt D zu finden, der mit C zusammen die Strecke AB harmonisch teilt. Man zieht nämlich eine beliebige Gerade durch C und nimmt auf ihr zwei beliebige Punkte A_1 und B_1 an (Fig. 141). Die vier Geraden AA_1, AB_1, BA_1, BB_1 bilden ein Vierseit mit den Diagonalen AB und A_1B_1, dessen dritte Diagonale JK den Punkt D ausschneidet.

202. Das vollständige Viereck wird von vier Punkten $ABCD$ einer Ebene gebildet, deren sechs Verbindungslinien seine Seiten heißen. Diese ordnen sich paarweise als Gegenseiten an, nämlich AB und CD, AC und BD, AD und BC, so daß jedes Paar alle vier Ecken enthält. Die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten heißen Diagonalpunkte und bilden das Diagonaldreieck LMN (Fig. 142).

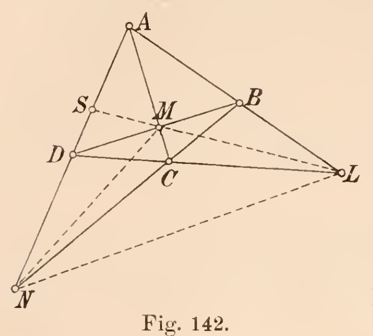


Fig. 142.

203. In jedem Diagonalpunkt werden die Seiten des vollständigen Vierecks durch die Seiten seines Diagonaldreiecks harmonisch getrennt. So liegen im Punkte M der Fig. 142 die Vierecksseiten MA und MB zu den Seiten ML und MN des Diagonaldreiecks harmonisch. Die vier Geraden BL, BM, CL, CM bilden nämlich ein Vierseit, und nach 200 liegen seine Seiten MB, MA harmonisch zu seiner Diagonale ML und dem Strahl nach dem Schnittpunkt N der Diagonalen AD und BC.

Auf jeder Seite eines Vierecks werden die Ecken durch einen Diagonalpunkt und den Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der beiden andern Diagonalpunkte harmonisch geteilt. Denn in dem von den Geraden BL, BM, CL, CM gebildeten Vierseit sind A und D Gegenecken, S und N aber Diagonalschnittpunkte; somit werden A und D durch N und S nach 195 harmonisch geteilt.

Um den Strahl d zu finden, der mit einem Strahle c zusammen den Winkel ab harmonisch teilt, wähle man auf c einen beliebigen Punkt und ziehe durch ihn zwei beliebige Gerade a_1 und b_1 (Fig. 143). Die vier Schnittpunkte $a \times a_1$, $a \times b_1$, $b \times a_1$, $b \times b_1$ bilden ein Viereck mit den Diagonalpunkten $a \times b$ und $a_1 \times b_1$, durch dessen dritten Diagonalpunkt der Strahl d zu ziehen ist.

Aus der geschilderten Konstruktion folgt zugleich, daß von den beiden Strahlen, welche den Winkel ab harmonisch teilen, der eine im Winkel ab, der andere aber außerhalb liegt. Ganz ebenso zeigt die frühere Konstruktion, daß von zwei Punkten, welche die Strecke AB harmonisch teilen, der eine auf der Strecke, der andere aber außerhalb liegen muß.

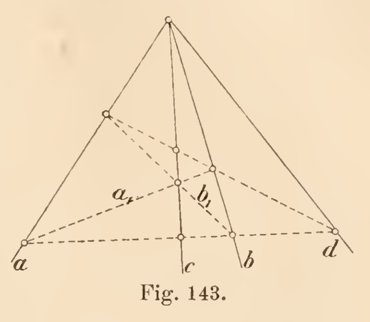


Fig. 143.

204. Wir wollen jetzt unsere Aufmerksamkeit noch kurz einigen speziellen Vierseiten und Vierecken zuwenden. Projizieren wir ein Vierseit derart auf eine andere Ebene, daß das Bild einer Diagonale ins Unendliche fällt, so erhalten wir ein Parallelogramm. Auf einer Diagonale des Parallelogramms liegen dann die Eckpunkte mit dem Mittelpunkt und dem unendlich fernen Punkt harmonisch. Jede Strecke wird also von ihrem Mittelpunkt und dem unendlich fernen Punkt harmonisch geteilt.

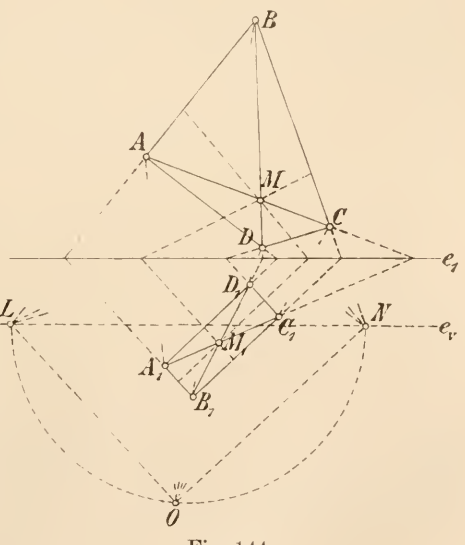


Fig. 144.

Durch perspektive Abbildung können wir auch ein beliebiges Viereck $ABCD$ in ein Rechteck $A_1B_1C_1D_1$ verwandeln (Fig. 144). Dazu brauchen wir nur die Verbindungslinie zweier Diagonalpunkte L und N zur Verschwindungslinie e_v zu machen und das Centrum O so zu wählen, daß $ON \perp OL$ wird, während die Achse e_1 zu e_v beliebig parallel gezogen werden kann. Da aber im Punkte M die Geraden AC und BD mit ML und MN harmonisch liegen, so sind in M_1 die Diagonalen des Rechtecks harmonisch zu den beiden Geraden, die den Seiten des Rechtecks parallel laufen. Jeder Winkel wird also von seiner Halbierungslinie und der Halbierungslinie seines Nebenwinkels harmonisch geteilt und umgekehrt. Oder auch: Stehen von vier harmonischen Strahlen

die Strahlen des einen Paares senkrecht aufeinander, so halbieren sie Winkel und Nebenwinkel der beiden andern.

Die Richtigkeit dieser Sätze erkennt man auch, wenn man vier spezielle harmonische Punkte zu Grunde legt, von denen der eine unendlich fern ist (Fig. 145). Projiziert man diese aus einem Punkte S, so daß $SC \perp AB$ ist, dann stehen zwei der vier harmonischen Strahlen durch S aufeinander senkrecht, während die beiden andern SA und SB mit SC gleiche Winkel einschließen.

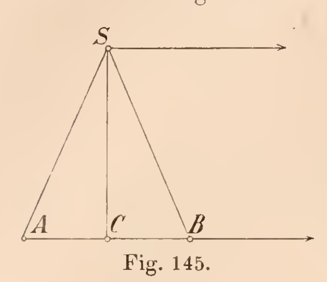


Fig. 145.

205. Will man ein beliebiges Viereck $ABCD$ in ein Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ durch Perspektive abbilden, so hat man in Fig. 144 das Centrum O so zu wählen, daß nicht nur $OL \perp ON$ wird, sondern auch die beiden Strahlen, die O mit den Punkten $U = e_v \times AC$ und $V = e_v \times BD$ verbinden, aufeinander senkrecht stehen. Denn beim Quadrat schneiden sich auch die Diagonalen A_1C_1 und B_1D_1 rechtwinklig. Demnach wird O als Schnittpunkt zweier Kreise erhalten, von denen der eine über dem Durchmesser LN und der andere über dem Durchmesser UV beschrieben ist.

Metrische Beziehungen zwischen perspektiven Grundgebilden.

206. Für zwei ähnliche ebene Figuren gilt das Gesetz: Alle Strecken des Originals haben zu ihren Bildern das nämliche Verhältnis (gleichviel in welcher Richtung sie gezogen sind). Für affine Figuren ergab sich: Alle unter sich parallele Strecken des Originals haben zu ihren Bildern das gleiche Verhältnis (aber dies ändert sich von einer Richtung zur andern). In beiden Fällen besteht zwischen den Abständen dreier Punkte A, B, C einer Geraden und denen der entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1 der Bildgeraden die Verhältnisgleichung:

$$AC : BC = A_1C_1 : B_1C_1.$$

Es erhebt sich jetzt die Frage nach einem analogen Gesetze für perspektive Figuren.

207. Zwischen drei Punkten A, B, C einer Geraden und den entsprechenden Punkten A_1, B_1, C_1 der dazu perspektiven Bildgeraden kann keine Streckenrelation bestehen, denn wir haben gesehen, daß letztere noch willkürlich angenommen werden dürfen, wenn erstere gegeben sind. Dagegen zeigt der in 178 bewiesene

Satz, daß vier Punkte einer Geraden g_1 eine Streckenrelation erfüllen müssen, wenn es möglich sein soll, sie mit vier gegebenen Punkten einer andern Geraden g in Perspektive zu setzen. Hier sind aber nicht mehr, wie bei affinen Figuren, die Streckenverhältnisse selbst auf der Original- und Bildgeraden gleich; vielmehr werden erst die Quotienten zweier Streckenverhältnisse auf beiden Geraden einander gleich, und ein derartiger Quotient wird Doppelverhältnis genannt. — Obgleich nun in der darstellenden Geometrie auf die Bestimmung von Doppelverhältniswerten im allgemeinen nicht Bezug genommen wird, so soll doch hier der Begriff des Doppelverhältnisses entwickelt und seine Bedeutung für perspektive Figuren erklärt werden. Dies kann indes nicht geschehen, ohne einige allgemeine Bemerkungen über die Messung von Strecken und Winkeln vorauszuschicken.[6])

208. Eine Strecke ist durch ihre Endpunkte A und B eindeutig bestimmt, wenn zugleich die Richtung gegeben ist, in der sie durchlaufen werden soll. Ist dies die Richtung von A nach B, so bezeichnen wir die Strecke durch AB, durch BA dagegen im entgegengesetzten Falle. Wir setzen ferner für jede Gerade eine positive Richtung fest (welche ist gleichgültig), d. h. wir stellen alle in der einen Richtung durchlaufenen Strecken als positiv in Rechnung, die in der umgekehrten Richtung durchlaufenen Strecken aber als negativ. Hiernach besteht für zwei beliebige Punkte A und B die Gleichung:

$$AB + BA = 0, \quad \text{oder} \quad BA = -AB;$$

ebenso besteht für drei beliebig auf einer Geraden gelegene Punkte A, B, C die Gleichung:

$$AB + BC + CA = 0, \quad \text{oder} \quad AB = AC + CB,$$

und ähnliche Gleichungen gelten für mehr Punkte.

209. Der von zwei Geraden a und b (in einer Ebene) eingeschlossene Winkel ist eindeutig bestimmt, wenn angegeben wird, nach welcher Richtung vom Scheitel O aus die Schenkel gehen und in welchem Drehsinne der Winkel beschrieben werden soll. Bezeichnen wir mit a nicht bloß die Gerade, sondern drücken durch dieses Zeichen zugleich eine bestimmte Richtung aus, welche als positive Durchlaufungsrichtung genommen wird, und machen wir die gleiche Festsetzung für b, so giebt es zwischen den Schenkeln a und b, die vom Scheitel O in positiver Richtung ausgehen, zwei verschiedene Winkel, die sich zu 4 R ergänzen. Wir setzen ferner für jede Ebene willkürlich einen positiven Drehsinn fest, d. h. wir rechnen die in dem einen Sinn beschriebenen Winkel

positiv, die in dem entgegengesetzten Sinn beschriebenen negativ. Durch $\angle ab$ bezeichnen wir den Winkel, den die Gerade a in positivem Drehsinn beschreiben muß, um in die Lage b zu gelangen, so zwar, daß die positiven Durchlaufungsrichtungen beider Geraden übereinstimmen. Es ist dann:

$$\angle ab + \angle ba = 4R \quad \text{und} \quad \angle ab + \angle ba' = 2R,$$

wenn a' mit a zusammenfällt, aber eine entgegengesetzte positive Durchlaufungsrichtung zeigt.

Wenn wir verabreden, daß ganze Umdrehungen außer Acht bleiben, also Winkel, die sich um ganze Vielfache von $4R$ unterscheiden, als gleich angesehen werden sollen, so haben wir die Gleichung:

$$\angle ab + \angle ba = 0, \text{ oder } \angle ba = - \angle ab.$$

Ebenso besteht für drei beliebige Gerade a, b, c einer Ebene die Gleichung:

$$\angle ab + \angle bc + \angle ca = 0, \text{ oder } \angle ab = \angle ac - \angle bc.$$

Ähnliche Gleichungen giebt es für mehr Gerade. Wie man leicht erkennt, ist es gleichgültig, ob die betrachteten Geraden durch den nämlichen Punkt gehen oder nicht. Auch bedarf es keiner weiteren Erläuterung, wie die gegebenen Erklärungen auf die Bestimmung der Winkel windschiefer Geraden, oder der Neigungswinkel gegebener Ebenen auszudehnen sind.

Wird ein Winkel durch seinen Scheitel O und zwei auf den Schenkeln gelegene Punkte A und B bestimmt, so bezeichnen wir ihn durch $\angle AOB$, wenn er von einem Strahle beschrieben wird, der aus der Lage OA mit positivem Drehsinn in die Lage OB übergeht. Dann ergiebt sich, ähnlich wie vorher:

$$\angle AOB + \angle BOA = 0, \text{ oder } \angle BOA = - \angle AOB,$$
$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 0, \text{ oder } \angle AOB = \angle AOC - \angle BOC,$$

u. s. f., wobei die Punkte $O, A, B, C \ldots$ beliebig in der Ebene verteilt sein können.

210. In einer Punktreihe ist nach Festlegung zweier Grundpunkte A und B jeder dritte Punkt C durch das Verhältnis

$$\varkappa = \frac{CA}{CB}$$

seiner Abstände von den Grundpunkten bestimmt (wobei vorausgesetzt wird, daß $\varkappa$ auch dem Vorzeichen nach bekannt sei). $\varkappa$ ist ersichtlich ein reiner Zahlenwert; jedem solchen Wert gehört ein Punkt der Reihe AB zu. Durchläuft das Abstandsverhältnis $\varkappa$ stetig alle positiven Werte von $+\infty$ bis $+1$ und von $+1$ bis 0, dann alle

negativen Werte von 0 bis -1 und von -1 bis $-\infty$, so beschreibt dementsprechend der Punkt C die Punktreihe in der Richtung der Strecke AB, nämlich vom Punkte B aus bis ins Unendliche, auf der andern Seite aus dem Unendlichen kommend bis A, dann von A bis zur Mitte M der Strecke AB und endlich von hier bis wieder zu B (Fig. 146).

Fig. 146.

211. In einem Strahlbüschel ist nach Angabe zweier Grundstrahlen a und b (und willkürlicher Festsetzung ihrer positiven Richtungen) jeder dritte Strahl c durch das Verhältnis der senkrechten Abstände irgend eines seiner Punkte von den Strahlen a und b, oder — was dasselbe ist — durch das Sinusverhältnis

$$\varkappa = \frac{\sin ca}{\sin cb}$$

seiner Winkel mit den Grundstrahlen bestimmt bis auf die Durchlaufungsrichtung, welche willkürlich bleibt. Mag man aber diese Durchlaufungsrichtung von c wählen, wie man will, immer wird das Sinusverhältnis $\varkappa$ negativ sein, wenn c in dem von den positiven Richtungen der Grundstrahlen a und b gebildeten Winkel liegt; im andern Falle wird $\varkappa$ positiv. Speziell nimmt $\varkappa$ die Werte 0, ∞, -1 und $+1$ an, wenn die Gerade c mit a, b, m oder n zusammenfällt, wo m den Winkel ab und n seinen Nebenwinkel halbiert (Fig. 147). Analoges gilt von der Bestimmung der Ebenen eines Büschels durch ein Sinusverhältnis.

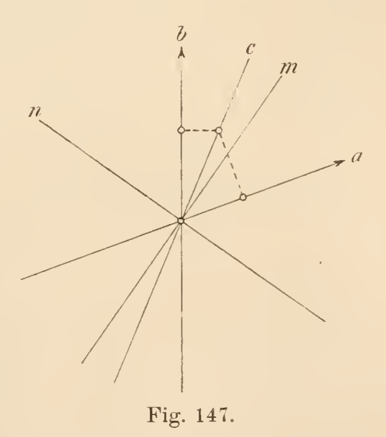


Fig. 147.

212. Vier Punkte A, B, C, D einer Geraden bestimmen ein Doppelverhältnis; es ist dies der Quotient der beiden Abstandsverhältnisse, welche der dritte und vierte Punkt in Bezug auf die ersten beiden ergeben, und hat somit den Wert

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

der gewöhnlich kurz durch das Symbol $(ABCD)$ bezeichnet wird.

Vier Strahlen a, b, c, d (Ebenen A, B, Γ, Δ) eines Büschels haben als Doppelverhältnis den Quotient der beiden Sinus-

verhältnisse, welche der dritte und vierte Strahl (Ebene) in Bezug auf die ersten beiden ergeben, und hat somit den Wert

$$\frac{\sin ca}{\sin cb} : \frac{\sin da}{\sin db} = (abcd),$$

wo die rechte Seite der Gleichung wieder ein Symbol für den Wert der linken ist, und der Winkel zweier Geraden einfach durch Nebeneinanderschreiben ihrer Zeichen ausgedrückt wird.

213. Ändert man die Reihenfolge der vier Punkte $ABCD$, so ändert sich im allgemeinen auch der Wert ihres Doppelverhältnisses, indem die beiden darin auftretenden Abstandsverhältnisse andere und andere werden. Bei gewissen Vertauschungen der vier Punkte bleibt jedoch der Wert ungeändert. Man hat nämlich:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{DB}{DA} : \frac{CB}{CA} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BC} : \frac{AD}{AC},$$

oder $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$ (vergl. 190).

Teilt man also die vier Punkte irgendwie in zwei Paare und vertauscht man in der ursprünglichen Reihenfolge die beiden Punkte eines jeden Paares miteinander, so behält das Doppelverhältnis seinen Wert bei. Den 24 möglichen Anordnungen der vier Punkte entsprechen daher nicht ebenso viele, sondern nur sechs verschiedene Doppelverhältniswerte. So zeigen die Anordnungen

$$ABCD,\ ABDC,\ ACBD,\ ACDB,\ ADBC,\ ADCB,$$

oder die mit ihnen äquivalenten, lauter verschiedene Werte.

Die gleichen Betrachtungen lassen sich für die Doppelverhältniswerte von vier Strahlen oder vier Ebenen eines Büschels wiederholen.

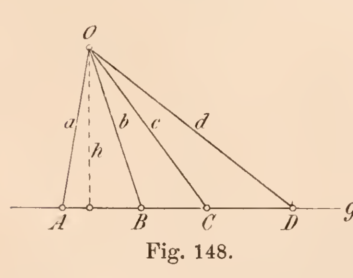


Fig. 148.

214. Vier Strahlen eines Büschels haben das gleiche Doppelverhältnis wie die vier Punkte, die eine beliebige Gerade auf ihnen ausschneidet. Die Gerade g mag die Strahlen a, b, c, d in den Punkten A, B, C, D schneiden, und es sei h das vom Scheitel O des Büschels auf g gefällte Lot (Fig. 148). Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks CAO läßt sich dann in der doppelten Form ausdrücken:

$$h \,.\, CA = CO \,.\, AO \,.\, \sin ca.$$

Ebenso gelten die Relationen:

$$h \,.\, CB = CO \,.\, BO \,.\, \sin cb$$
$$h \,.\, DA = DO \,.\, AO \,.\, \sin da$$
$$h \,.\, DB = DO \,.\, BO \,.\, \sin db,$$

und daraus folgt:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\sin ca}{\sin cb} : \frac{\sin da}{\sin db}.$$

215. In zwei projektiven Punktreihen (Strahlbüscheln) haben vier beliebige Punkte der einen Reihe (Strahlen des einen Büschels) das gleiche Doppelverhältnis wie die entsprechenden Punkte der andern Reihe (Strahlen des andern Büschels). Bringt man nämlich beide Reihen in perspektive Lage, so erscheinen sie als Schnitte eines und desselben Strahlbüschels. Nach dem voraufgehenden Satze haben dann zweimal vier Punkte, die sich in beiden Reihen entsprechen, das gleiche Doppelverhältnis wie die vier Strahlen, welche sie ausschneiden. Bringt man zwei projektive Strahlbüschel in perspektive Lage, so schneiden sich ihre entsprechenden Strahlen in den Punkten einer Geraden. Je zweimal vier Strahlen, die sich in beiden Büscheln entsprechen, haben das gleiche Doppelverhältnis wie die vier Punkte der Geraden, in denen sie sich schneiden.

216. Es gilt auch ganz allgemein der Satz: In zwei projektiven einförmigen Grundgebilden (Punktreihen, Strahlbüschel, Ebenenbüschel) weisen je vier Elemente des einen Gebildes das gleiche Doppelverhältnis auf wie die entsprechenden des andern. Für Punktreihen und Strahlbüschel ist der Beweis schon geführt; und er gilt offenbar in seiner ganzen Allgemeinheit, sobald gezeigt wird, daß vier Ebenen Α, Β, Γ, Δ eines Büschels das gleiche Doppelverhältnis besitzen wie die vier Geraden a, b, c, d, die eine beliebige Ebene, oder wie die vier Punkte A, B, C, D, die eine beliebige Gerade aus ihnen ausschneidet. Legt man aber zur Achse des Ebenenbüschels einen Normalschnitt, so ist das Doppelverhältnis der von ihm ausgeschnittenen Strahlen a', b', c', d' gleich demjenigen der vier Ebenen, da ja je zwei dieser Strahlen den Winkel der bezüglichen Ebenen messen ($\angle a'b' = \angle$ ΑΒ, u. s. f.). Ferner sind auch die Doppelverhältnisse $(abcd)$ und $(a'b'c'd')$ gleich, da beide Strahlbüschel perspektiv sind; somit kommt: $(abcd) =$ (ΑΒΓΔ). Daß auch die vier Punkte $ABCD$ das gleiche Doppelverhältnis besitzen, erkennt man, wenn man von einem Punkt auf der Achse des Ebenenbüschels vier Strahlen nach ihnen zieht. Denn diese vier Strahlen haben sowohl mit den vier Punkten der Reihe, als mit den vier Ebenen des Büschels das gleiche Doppelverhältnis. Damit ist unser Satz bewiesen.

217. Vom letzten Satze giebt es auch eine Umkehrung, die in gleicher Allgemeinheit gilt. Es genügt indessen den speziellen

Satz zu beweisen: Damit vier Punkte A, B, C, D und vier Strahlen a, b, c, d in perspektive Lage gebracht werden können, ist notwendig und hinreichend, daß ihre entsprechenden Doppelverhältnisse gleich sind. Aus diesem Satz folgt dann unmittelbar, daß man auch zweimal vier Punkte zweier Reihen, oder zweimal vier Strahlen zweier Büschel bei gleichem Doppelverhältnis in perspektive Lage bringen kann. Zum Beweise unseres Satzes verschieben wir den Träger der Punkte A, B, C, D so, daß A, B und C resp. auf a, b und c zu liegen kommen (175); dann ist zu zeigen, daß auch d durch den Punkt D geht. Schnitte nun d den Träger der Punktreihe bei seiner neuen Lage im Punkte D', so wäre:

$$(ABCD) = (abcd) = (ABCD'),$$

woraus

$$DA : DB = D'A : D'B, \quad \text{oder} \quad (DA - DB) : DB = (D'A - D'B) : D'B$$

folgt, und da das erste und dritte Glied der Proportion gleich sind, muß auch $DB = D'B$ sein, d. h. D' muß mit D zusammenfallen.

218. Teilen die Punkte C, D das Punktepaar A, B harmonisch, so sind ihre Abstandsverhältnisse in Bezug auf dieses Paar entgegengesetzt gleich und das Doppelverhältnis der vier Punkte hat den Wert -1. Nach 195 sind die Punkte A, B, C, D projektiv zu den Punkten B, A, C, D; sie haben also das gleiche Doppelverhältnis, und es ist:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist der reciproke Wert der linken, folglich muß das Doppelverhältnis den Wert ± 1 aufweisen. Der Wert $+1$ ist aber ausgeschlossen, sonst müßte C mit D zusammenfallen. Damit ist unsere Behauptung erwiesen, daß $(ABCD) = -1$, oder $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$ ist.

Auch für die harmonische Lage von vier Strahlen a, b, c, d gilt die Relation: $(abcd) = -1$. Halbieren die Strahlen c und d im speziellen den Winkel und Nebenwinkel der Strahlen a und b, so sind ihre Sinusverhältnisse in Bezug auf die letzteren gleich der negativen und positiven Einheit, sie liegen also harmonisch (vergl. 204). Halbiert der Punkt C die Strecke AB und fällt der Punkt D ins Unendliche, so werden ihre Abstandsverhältnisse ebenfalls gleich der negativen und positiven Einheit, d. h. die vier Punkte liegen harmonisch (vergl. 204).

Daß unter den vier Punkten A, B, C, D, ohne ihre harmonische Beziehung zu zerstören, die in 199 angegebenen Vertauschungen stattfinden können, drückt sich in der Gleichheit der acht Doppelverhältnisse aus:

$$(ABCD) = (BACD) = (ABDC) = (BADC) = (CDAB) = (DCAB) = \\ = (CDBA) = (DCBA) = -1.$$

Involutorische Grundgebilde.

219. Zwei projektive Punktreihen auf dem nämlichen Träger befinden sich in involutorischer Lage, wenn jedem Punkt des Trägers, mag man ihn zur ersten oder zweiten Reihe rechnen, der nämliche Punkt in der andern Reihe entspricht. Sind $ABCDE$ .... und $A_1B_1C_1D_1E_1$ .... solche Reihen, so entspricht also dem Punkte A der ersten Reihe der Punkt A_1 der zweiten, aber auch zugleich dem Punkte A der zweiten Reihe der Punkt A_1 in der ersten. Und in gleicher Weise findet überhaupt zwischen den Punkten des gemeinsamen Trägers ein vertauschbares (doppeltes) Entsprechen statt. Dabei werden also die Punkte des Trägers in Paare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, ... geordnet, und die Punkte eines jeden Paares entsprechen sich, einerlei welchen man von ihnen als zur ersten und welchen als zur zweiten Reihe gehörig ansieht. In Rücksicht auf diesen Umstand sagt man: Die Punktepaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, ... sind involutorisch, oder sie bilden eine Involution.[7])

220. Daß man zwei projektive Punktreihen stets in involutorische Lage bringen kann, werden wir weiterhin sehen. Zunächst stellen wir den Satz auf: Zwei projektive Punktreihen auf dem nämlichen Träger sind involutorisch, sobald es ein Paar getrennter (nicht zusammenfallender) Punkte giebt, die sich vertauschbar entsprechen. Sind nämlich $A, A_1, B, C, D, ..,$ und A_1, A, B_1, C_1, D_1, ... entsprechende Punkte der projektiven Reihen und entspricht dem Punkte B_1 der ersten Reihe in der zweiten der Punkt B', so sind die vier Punkte A, A_1, B, B_1 projektiv zu den vier Punkten A_1, A, B_1, B' und nach 190 auch zu den vier Punken A, A_1, B', B_1. Nun fallen aber drei Punkte der Reihe A, A_1, B, B_1 mit den entsprechenden der projektiven Reihe A, A_1, B', B_1 zusammen, folglich müssen nach 180 auch B' und B sich decken. Demnach findet auch zwischen den Punkten B und B_1 der gegebenen Reihen ein vertauschbares Entsprechen statt; damit ist aber unser Satz bewiesen.

Insbesondere entspricht dem unendlich fernen Punkt des Trägers,

mag man ihn als Punkt der ersten oder zweiten Reihe nehmen, der nämliche Punkt in der andern Reihe. Die Gegenpunkte der beiden projektiven Reihen decken sich also bei involutorischer Lage. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt der Involution, er bildet mit dem unendlich fernen Punkt zusammen ein Punktepaar desselben.

221. Zwei beliebige projektive Punktreihen kann man in involutorische Lage bringen, indem man die eine so verschiebt, daß ihre Träger und ihre Gegenpunkte sich decken. Denn dann bildet dieser Punkt mit dem unendlich fernen Punkt ein Paar sich vertauschbar entsprechender Punkte beider Reihen; deshalb muß nach dem Satz der vorangehenden Nummer das Entsprechen der Punkte beider Reihen immer ein vertauschbares sein, und die Reihen liegen involutorisch.

222. Liegen zwei projektive Punktreihen auf der nämlichen Geraden, so hat man bezüglich ihrer Anordnung zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Wir lassen einen Punkt der ersten Reihe den Träger in einer bestimmten Richtung durchlaufen. Dann wird der entsprechende Punkt der zweiten Reihe den Träger entweder ebenfalls in der gleichen Richtung wie der erste Punkt durchlaufen, oder in der dazu entgegengesetzten Richtung. Im ersten Falle nennt man die projektiven Punktreihen auf dem nämlichen Träger gleichlaufend, im zweiten Falle entgegenlaufend.

Sind zwei involutorische Punktreihen gleichlaufend, und bilden AA_1 irgend ein Paar entsprechender Punkte, dann entspricht jedem Punkt auf der Strecke AA_1 ein Punkt außerhalb; sind sie aber entgegenlaufend, dann entspricht jedem Punkt auf der Strecke AA_1 wieder ein solcher Punkt und jedem Punkt außerhalb wieder ein Punkt außerhalb. Denn bewegt sich im ersten Falle (Fig. 149a) ein Punkt der ersten (oder zweiten) Reihe von A nach A_1, so bewegt sich der entsprechende Punkt von A_1 ins Unendliche und auf der andern Seite aus dem Unendlichen zurückkommend nach A; es liegen also niemals beide Punkte gleichzeitig auf der Strecke AA_1. Bewegt sich aber im zweiten Fall (Fig. 149b) ein Punkt der ersten (oder zweiten) Reihe von A nach A_1, so bewegt sich der entsprechende Punkt von A_1 in entgegengesetzter Richtung nach A; es liegen also beide Punkte gleichzeitig auf der Strecke AA_1, oder gleichzeitig außerhalb der-

Fig. 149a u. b.

selben. Wenden wir dieses Resultat auf den Mittelpunkt und den entsprechenden unendlich fernen Punkt der Reihen an, so kommt der Satz: Bei gleichlaufenden involutorischen Punktreihen wird jedes Paar entsprechender Punkte durch den Mittelpunkt der Involution getrennt, bei entgegenlaufenden Reihen geschieht dies nicht. In Fig. 149 ist der Mittelpunkt mit M bezeichnet.

223. Entgegenlaufende involutorische Reihen besitzen zwei sich selbst entsprechende Punkte oder Doppelpunkte der Involution; diese liegen zu jedem Punktepaar der Involution harmonisch. Gleichlaufende involutorische Reihen besitzen solche Doppelpunkte nicht.

Nach dem Vorhergehenden ist das letztere selbstverständlich. Bei entgegenlaufenden Reihen muß ein Punkt, der sich von A nach A_1 bewegt, einmal seinem entsprechenden, der sich von A_1 nach A bewegt, auf dieser Strecke begegnen, das liefert den einen Doppelpunkt $U = U_1$ (Fig. 149b). Bewegt sich aber der erstere Punkt von A durchs Unendliche nach A_1, so bewegt sich der letztere von A_1 durchs Unendliche nach A, und wiederum muß eine Begegnung stattfinden, aber dieses Mal außerhalb der Strecke AA_1, das liefert den andern Doppelpunkt $V = V_1$. Den Punkten A, A_1, U, V der einen Reihe entsprechen die Punkte A_1, A, U, V der andern; wenn aber die Punkte A, A_1, U, V zu den Punkten A_1, A, U, V projektiv sind, so liegen sie nach 195 harmonisch. Der Mittelpunkt bildet mit dem unendlich fernen Punkt des Trägers zusammen ein Punktepaar der Involution. Dieses Paar liegt ebenfalls zu den Doppelpunkten harmonisch; folglich halbiert der Mittelpunkt einer Involution die Entfernung ihrer beiden Doppelpunkte.

224. Kennt man von einer Involution zwei Paare entsprechender Punkte AA_1 und BB_1, so ist die Involution bestimmt und man kann zu jedem weiteren Punkt den entsprechenden konstruieren. Sei etwa C ein beliebiger Punkt der Involution und C_1 der entsprechende, dann müssen diese beiden Punkte nur die Bedingung erfüllen, daß die vier Punkte A, B, C, C_1 projektiv zu den vier Punkten A_1, B_1, C_1, C sind. Es besteht ja alsdann ein vertauschbares Entsprechen zwischen C, C_1 und somit nach 220 auch zwischen A, A_1, sowie zwischen B, B_1.

Zur Konstruktion ziehe man durch C eine beliebige Gerade und wähle auf ihr zwei beliebige Punkte J und K (Fig. 150). Darauf verbinde man K mit A und B, sowie J mit A_1 und B_1; dann schneidet die Gerade, welche durch $L = KA \times JB_1$ und M

$= KB \times JA_1$ geht, auf dem Träger den Punkt C_1 aus. Es sind nämlich die Punkte A, B, C, C_1 vom Centrum K aus perspektiv zu den Punkten L, M, R, C_1; diese sind wiederum vom Centrum J aus perspektiv zu den Punkten B_1, A_1, C, C_1 und die letzteren sind nach 190 projektiv zu den Punkten A_1, B_1, C_1, C. Damit sind aber auch die erstgenannten Punkte zu den letztgenannten projektiv, was unsern Satz beweist. Insbesondere kann man in dieser Weise den Mittelpunkt der Involution als den entsprechenden zum unendlich fernen konstruieren.

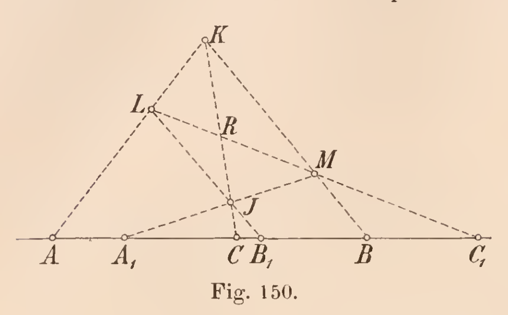


Fig. 150.

Aus unserer Figur folgt zugleich ein weiterer Satz. $JMKL$ sind die Eckpunkte eines vollständigen Vierecks, dessen drei Paar Gegenseiten die Punktepaare AA_1, BB_1 und CC_1 der Involution ausschneiden. *Jede Gerade schneidet die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in drei Punktepaaren einer Involution.*

225. Nach 221 gelangen zwei projektive Punktreihen dadurch in involutorische Lage, daß man sie so aufeinander legt, daß ihre Träger und ihre Gegenpunkte sich decken. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß in der neuen Lage das Entsprechen der Punkte *vertauschbar* ist. Sind g und g_1 die Träger zweier Punktreihen in perspektiver Lage; dann seien G_v und G_∞ ihre Gegenpunkte, A und A_1 irgend zwei entsprechende Punkte und O das Centrum der Perspektive (Fig. 151). Bestimmt man jetzt auf g die beiden Punkte B_1 und C, so daß $G_vA = G_vC = G_\infty B_1$ ist, dann gilt für die entsprechenden Punkte B und C_1 die Relation: $G_\infty A_1 = G_\infty C_1 = G_vB$. Denn die Dreiecke AG_vO und $OG_\infty A_1$ sind ähnlich, also wird: $G_vA \cdot G_\infty A_1 = OG_v \cdot OG_\infty$. Ebenso sind die Dreiecke BG_vO und $OG_\infty B_1$ ähnlich und es folgt: $G_vB \cdot G_\infty B_1 = OG_v \cdot OG_\infty$. Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind identisch und somit folgt aus $G_\infty B_1 = G_vA$ die Gleichheit

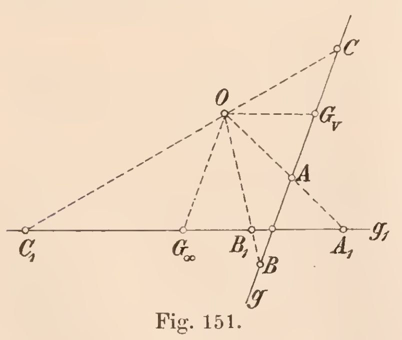


Fig. 151.

der Strecken $G_v B = G_\infty A_1$. In gleicher Weise ergiebt sich auch $G_v B = G_\infty C_1$.

Bringt man nun die Träger g und g_1 und zugleich G_v mit G_∞ zur Deckung, so kann das in doppelter Weise geschehen. Im einen Fall deckt sich A mit B_1 und B mit A_1; die Punkte $A = B_1$ und $B = A_1$ entsprechen sich dann vertauschbar. Im andern Fall deckt sich B mit C_1 und C mit B_1; hierbei entsprechen sich also die Punkte $B = C_1$ und $C = B_1$ vertauschbar. Da der Punkt A der Reihe g beliebig gewählt wurde, so erkennt man die Richtigkeit der obigen Behauptung.

226. Zum Schluß mag noch einer metrischen Beziehung bei den involutorischen Reihen gedacht werden. Zu den Punkten A, B, M, ∞ sind die Punkte A_1, B_1, ∞, M projektiv; wobei M der Mittelpunkt der Involution und ∞ ihr unendlich ferner Punkt ist.

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse $(ABM\infty)$ und $(A_1B_1\infty M)$ ergiebt sich $\frac{MA}{MB} = 1 : \frac{MA_1}{MB_1}$, denn $\frac{\infty A}{\infty B} = 1$. Daraus folgt weiter: $MA \,.\, MA_1 = MB \,.\, MB_1$. Da aber AA_1 und BB_1 ganz willkürliche Punktepaare der Involution sind, so gilt der Satz: Das Produkt der Abstände je zweier entsprechender Punkte einer Involution von ihrem Mittelpunkt ist konstant. Hat dieses Produkt einen positiven Wert $+c$, so bestimmen sich die Doppelpunkte $U = U_1$ und $V = V_1$ durch die Relation: $(MU)^2 = (MV)^2 = +c$, während für den negativen Wert $-c$ eine solche Gleichung nicht existieren kann.

227. Die obigen Definitionen und Sätze lassen sich mit Leichtigkeit auf die übrigen einförmigen Grundgebilde ausdehnen. Ebenso wie für Punktreihen auf derselben Geraden gelten sie auch für Strahlbüschel mit demselben Scheitel und in derselben Ebene und für Ebenenbüschel mit derselben Achse. Man erhält z. B. zwei involutorische Strahlbüschel oder eine Involution von Strahlen, wenn man zwei involutorisch liegende Punktreihen aus einem außerhalb gelegenen Centrum projiziert, und analog erhält man eine Involution von Ebenen durch Projektion aus einer Strahleninvolution. Umgekehrt ergiebt jeder ebene Schnitt einer Ebeneninvolution eine solche von Strahlen und jeder geradlinige Schnitt einer Strahleninvolution eine solche von Punkten. Es mag hier genügen, das Wichtigste bezüglich der involutorischen Strahlbüschel hervorzuheben.

228. Zwei projektive Strahlbüschel mit gemeinsamem Scheitel liegen involutorisch, wenn zwischen ihren Strahlen ein vertauschbares Entsprechen stattfindet. Besteht zwischen

einem Paare getrennter Strahlen ein vertauschbares Entsprechen, so ist das Entsprechen auch für die übrigen Strahlen vertauschbar; sie bilden die Strahlenpaare einer Involution. Zwei involutorische Strahlenbüschel sind entweder gleichlaufend, oder entgegenlaufend, je nachdem entsprechende Strahlen sich in gleichem oder entgegengesetztem Sinne drehen. Im letzteren Falle giebt es zwei sich selbst entsprechende oder Doppelstrahlen.

229. Zwei Paare entsprechender Strahlen einer Involution bestimmen diese vollständig, und man kann zu jedem weiteren Strahl derselben den entsprechenden konstruieren. Sind etwa aa_1 und bb_1 zwei Strahlenpaare der Involution und soll zu c der entsprechende Strahl c_1 gesucht werden, so wähle man auf c einen beliebigen Punkt C und ziehe durch ihn zwei beliebige Strahlen (Fig. 152). Der eine von ihnen mag a in A und b in B, der andere mag a_1 in A_1 und b_1 in B_1 schneiden; dann liegt der Schnittpunkt $C_1 = A_1B \times AB_1$ auf einem Strahle c_1, der mit c ein Strahlenpaar der Involution bildet. Zum Beweise bezeichne man noch $P = c_1 \times AB$ und $Q = c_1 \times A_1B_1$,

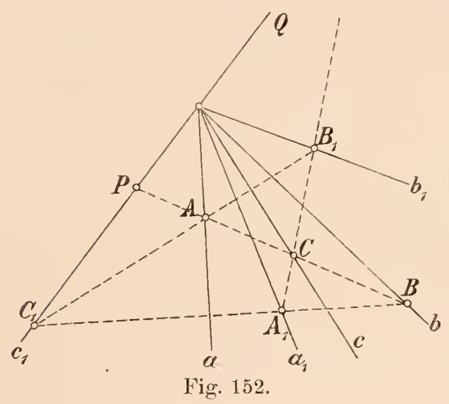


Fig. 152.

so ist: $(abcc_1) = (ABCP)$ als Schnitt des Büschels, ferner $(ABCP) = (B_1A_1CQ)$, da beide Reihen aus dem Centrum C_1 perspektiv liegen. Weiter ist $(B_1A_1CQ) = (b_1a_1cc_1)$ und endlich $(b_1a_1cc_1) = (a_1b_1c_1c)$ nach 190; also wird auch $(abcc_1) = (a_1b_1c_1c)$, d. h. die Strahlen c und c_1 entsprechen sich vertauschbar und die Strahlenpaare aa_1, bb_1, cc_1 gehören einer Involution an. Diese Konstruktion liefert noch den Satz: Verbindet man die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits mit einem beliebigen Punkt seiner Ebene, so erhält man drei Strahlenpaare einer Involution.

230. In jeder Strahleninvolution giebt es ein Paar entsprechender Strahlen, die aufeinander senkrecht stehen. Nach 183 sahen wir, daß es in zwei projektiven Strahlbüscheln zwei entsprechende rechte Winkel giebt, die wie früher mit $x \perp y$ und $x_1 \perp y_1$ bezeichnet sein mögen. Legen wir nun die beiden projektiven Strahlbüschel so aufeinander, daß die nicht entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel sich decken, so sind

die Büschel in involutorischer Lage und $x = y_1$, $y = x_1$ bilden ein Paar rechtwinkliger Strahlen, die sich vertauschbar entsprechen.

Leicht überzeugt man sich, daß bei einer solchen Übereinanderlagerung der beiden Büschel entsprechende gleich große Winkel zur Deckung gelangen, indem die nicht entsprechenden Schenkel dieser Winkel zusammenfallen. Um diese Verhältnisse zu überblicken, bringe man die Strahlbüschel S und S_1 in eine solche perspektive Lage, daß die Strahlen x und x_1 sich decken (Fig. 153). Sind hier a und a_1 entsprechende Strahlen, so geht die Perspektivitätsachse e_1 durch $A = a \times a_1$ und ist zu $y \| y_1$ parallel. Wir tragen jetzt am Scheitel S zu beiden Seiten des Strahles x und am Scheitel S_1 zu beiden Seiten des Strahles y_1 den willkürlich gewählten Winkel φ an. Die so erhaltenen neuen Winkelschenkel mögen durch a, d, b_1, c_1 bezeichnet werden, ihre Schnittpunkte mit der Perspektivitätsachse durch A, D, B, C und die zu ihnen perspektiv liegenden Strahlen durch a_1, d_1, b, c. Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke SXA und BXS_1 ähnlich, da ihre Winkel bei S und B gleich φ

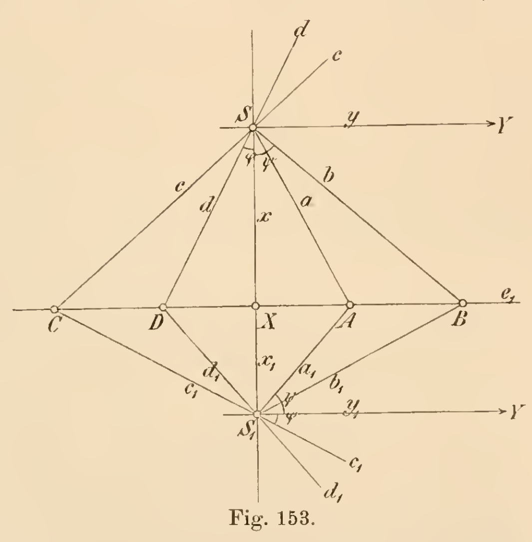


Fig. 153.

sind, also: $S_1X : XA = BX : XS$. Folglich sind auch die rechtwinkligen Dreiecke S_1XA und BXS ähnlich und es ist: $\angle BSX = \angle S_1AX$, oder $\angle bx = \angle a_1y_1$. Bezeichnet man die Größe dieser beiden Winkel mit ψ, so kommt:

$$\angle ab = a_1b_1 = \angle cd = \angle c_1d_1 = \psi - \varphi.$$

Ebenso findet man: $\angle ac = \angle a_1c_1 = \angle bd = \angle b_1d_1 = \psi + \varphi$.

Man kann nun beide Büschel S und S_1 zur Deckung bringen, indem man x_1 mit y und y_1 mit x zusammenfallen läßt. Das kann aber noch in doppelter Weise geschehen, wie die Figg. 154 a und 154 b erkennen lassen. Im ersten Fall decken sich die gleichen Winkel ab und b_1a_1, sowie cd und d_1c_1; im zweiten Fall decken sich die Winkel ac und c_1a_1, sowie bd und d_1b_1. Im ersten Fall entspricht einer Drehung des Strahles x durch die Lage a hindurch

nach y die Drehung des Strahles $x_1 = y$ durch die Lage $a_1 = b$ hindurch nach $y_1 = x$; wir haben es hier mit entgegenlaufenden involutorischen Strahlbüscheln zu thun. Im zweiten Fall entspricht einer Drehung des Strahles x durch die Lage a hindurch nach y die Drehung des Strahles $x_1 = y$ durch die Lage $a_1 = c$ hindurch nach $y_1 = x$; die involutorischen Strahlbüschel sind also hier gleichlaufend.

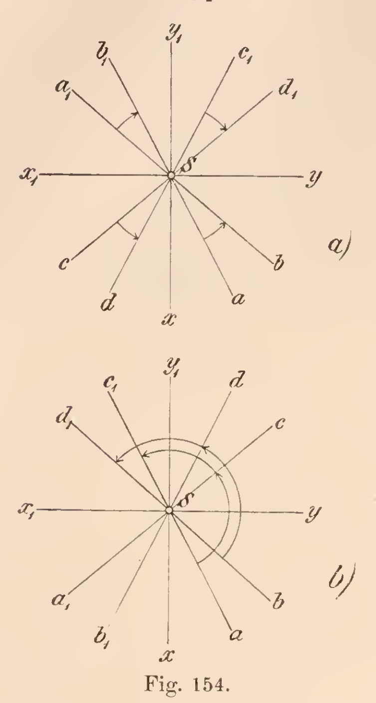


Fig. 154.

231. Geht man im speziellen von zwei kongruenten Strahlbüscheln aus und wählt irgend zwei rechtwinklige Strahlen x und y im ersten Büschel, so entsprechen ihnen auch zwei rechtwinklige Strahlen x_1 und y_1 im zweiten. Sind ferner a und b zwei andere rechtwinklige Strahlen des ersten Büschels und a_1 und b_1 die entsprechenden rechtwinkligen im zweiten, so hat man $\angle xa = \angle yb = \angle x_1a_1 = \angle y_1b_1$. Nun lege man beide Büschel so aufeinander, daß y_1 auf x und b_1 auf a fällt, dann deckt sich auch x_1 mit y und a_1 mit b; d. h. jetzt sind die beiden Strahlbüschel in involutorischer Lage und die Strahlen jedes der beiden Paare xx_1 und aa_1 unserer Involution stehen senkrecht aufeinander. Jedes Strahlenpaar der Involution hat aber die gleiche Eigenschaft, denn der Strahl a war beliebig gewählt. Es giebt eine spezielle Involution von Strahlen, bei der je zwei entsprechende Strahlen zu einander normal sind.

232. Bei zwei entgegenlaufenden involutorischen Strahlbüscheln giebt es zwei sich selbst entsprechende oder Doppelstrahlen, bei gleichlaufenden giebt es solche Strahlen nicht. Die Doppelstrahlen lassen sich leicht konstruieren, wenn man von der in 230 angenommenen perspektiven Lage der beiden Strahlbüschel S und S_1 ausgeht. Sind nämlich SU und S_1U zwei perspektive Strahlen (Fig. 155) und sollen dieselben bei der Vereinigung der Büschel zur Involution zur Deckung kommen, so muß $\angle x_1u_1 = \angle yu$ sein, und da $x_1 \perp y$ ist, folgt $u_1 \perp u$. Beschreibt man daher über SS_1 als Durchmesser einen Kreis, so schneidet er

die Perspektivitätsachse e_1 in Punkten U und V, die mit S resp. S_1 verbunden die gesuchten Strahlen u, v resp. u_1, v_1 liefern. Aus dieser Konstruktion folgt unmittelbar: Die beiden Geraden, welche Winkel und Nebenwinkel der beiden Doppelstrahlen einer Involution halbieren, sind ihre entsprechenden rechtwinkligen Strahlen.

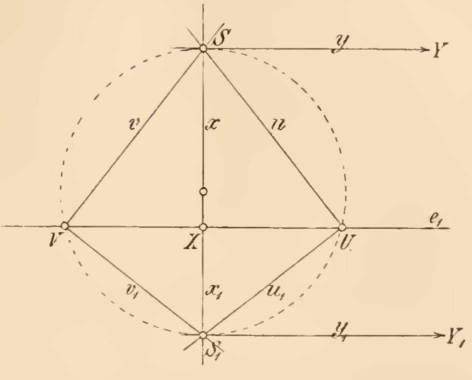


Fig. 155.

Aus denselben Gründen wie oben für die Punktreihen folgt noch der Satz: Bei zwei entgegenlaufenden involutorischen Strahlbüscheln werden je zwei einander vertauschbar entsprechende Strahlen durch die Doppelstrahlen harmonisch getrennt.

233. Auch für die involutorischen Strahlbüschel soll noch zum Schluß eine metrische Beziehung abgeleitet werden. Sind aa_1 und bb_1 zwei beliebige und ist xx_1 das rechtwinklige Strahlenpaar einer Involution, so haben wir gleiche Doppelverhältnisse $(abxx_1) = (a_1b_1x_1x)$ oder:

$$\frac{\sin xa}{\sin xb} : \frac{\sin x_1 a}{\sin x_1 b} = \frac{\sin x_1 a_1}{\sin x_1 b_1} : \frac{\sin x a_1}{\sin x b_1}.$$

Da aber $\angle\, xa + \angle\, ax_1 = R$ ist, so ist: $\sin x_1 a = \cos xa$, und ähnliche Relationen gelten für die andern Strahlen. Dadurch geht unsere Gleichung über in:

$$\tan xa : \tan xb = \tan xb_1 : \tan xa_1;$$

also findet man:

$$\tan xa \,.\, \tan xa_1 = \tan xb \,.\, \tan xb_1 = \text{const.},$$

da ja die beiden Strahlenpaare aa_1 und bb_1 völlig beliebig aus der Involution gewählt sind. Dieses Resultat führt zu dem Satz: Je zwei entsprechende Strahlen einer Involution schließen mit einem der beiden sich entsprechenden rechtwinkligen Strahlen zwei Winkel ein, für welche das Produkt ihrer trigonometrischen Tangenten konstant ist.

Sind zwei involutorische Punktreihen oder Strahlbüschel gegeben — etwa durch Angabe zweier Paare von einander vertausch-

bar entsprechenden Elementen — so entsteht die Frage nach der Konstruktion ihrer Doppelelemente. Die einfachsten Hilfsmittel hierzu werden wir später kennen lernen.

FÜNFTES KAPITEL.

Die Kegelschnitte als Kreisprojektionen.

Perspektivität zweier Kreise. Pol und Polare beim Kreise. Involutorische Centralprojektion in der Ebene. Perspektivität zweier Kreise im Raume.

234. Es ist bekannt, daß zwei beliebige Kreise einer Ebene in doppelter Weise als ähnliche und ähnlich liegende Figuren angesehen werden können (vergl. 4). Dabei entsprechen sich die Mittelpunkte und die Endpunkte je zweier paralleler Radien. Sind die Radien gleichgerichtet, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte stets durch den äußeren, dagegen durch den inneren Ähnlichkeitspunkt, falls die Radien entgegengesetzte Richtung haben. Die Ähnlichkeit kann als spezieller Fall der Perspektive angesehen werden, wobei die Achse der Perspektive ins Unendliche gerückt ist. Es gilt aber auch weiter noch der Satz: Zwei beliebige Kreise k und k_1 einer Ebene stehen auf doppelte Weise in perspektiver Beziehung; dabei bildet einer der beiden Ähnlichkeitspunkte das Centrum und ihre gemeinsame Potenzlinie die Achse der Perspektive.

Zur Erklärung erinnern wir an folgende elementare Sätze. Das Streckenprodukt $SP \cdot SQ$ hat für alle durch einen Punkt S gezogenen Sehnen PQ eines Kreises k denselben Wert und heißt die Potenz des Punktes S in Bezug auf den Kreis k. Diese Potenz läßt sich auch in der Form $(SM)^2 - r^2$ schreiben, wenn M das Centrum und r der Radius von k ist. Der geometrische Ort aller Punkte gleicher Potenz in Bezug auf zwei Kreise k und k_1 ist eine Gerade, welche die gemeinsame Potenzlinie oder Chordale genannt wird. Sie steht auf der gemeinsamen Centralen (Verbindungslinie der beiden Kreiscentren) senkrecht, liegt außerhalb der beiden

Kreise, wenn diese sich nicht treffen (Fig. 156), oder verbindet ihre Schnittpunkte, wenn es solche giebt (Fig. 158). Von diesem letzteren Umstande rührt die Bezeichnung Chordale her; daß ihre Punkte in Bezug auf beide Kreise die gleiche Potenz haben, ist selbstverständlich. Daß es auch eine gemeinsame, zur Centralen senkrechte Potenzlinie giebt, wenn die Kreise k und k_1 sich nicht schneiden, folgt so. Ist S ein beliebiger Punkt gleicher Potenz in Bezug auf k und k_1, so ist: $(SM)^2 - r^2 = (SM_1)^2 - r_1^2$. Ist ferner E der Fußpunkt des aus S auf die Centrale MM_1 gefällten Lotes und subtrahiert man $(SE)^2$ von dieser Gleichung, so kommt: $(EM)^2 - r^2 = (EM_1)^2 - r_1^2$, also ist auch E ein Punkt gleicher Potenz.

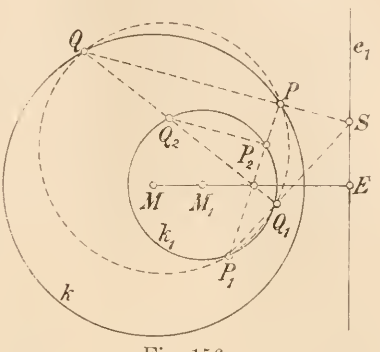


Fig. 156.

Für drei Kreise gilt der Satz, daß die drei Potenzlinien, welche je zwei von ihnen bestimmen, sich in einem Punkte schneiden. Denn der Schnittpunkt zweier Potenzlinien ist ein Punkt gemeinsamer Potenz für alle drei Kreise, liegt also auch auf der dritten Potenz-

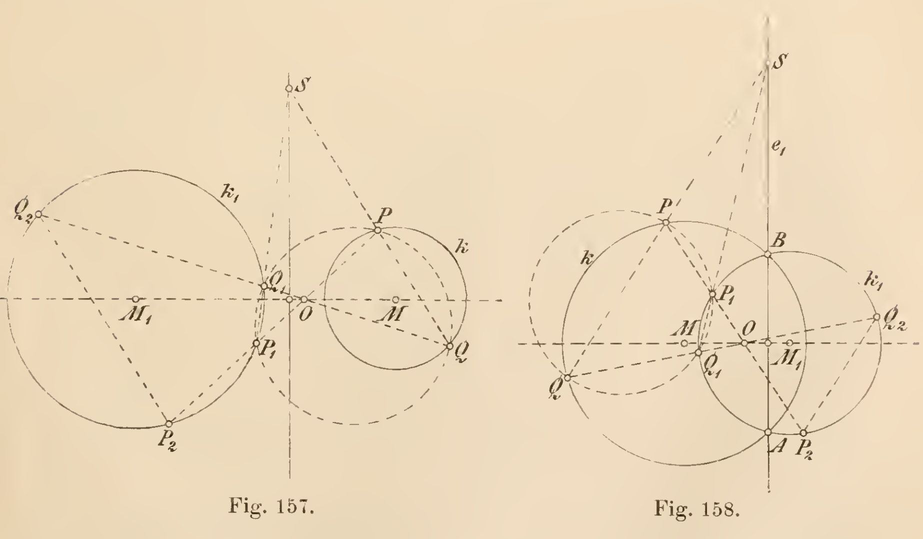


Fig. 157.

Fig. 158.

linie. Diesen Satz kann man benutzen, um die Potenzlinie zweier sich nicht schneidender Kreise k und k_1 zu zeichnen. Zieht man nämlich einen beliebigen Hilfskreis, der k und k_1 schneidet, dann

schneiden sich die so bestimmten Chordalen in einem Punkt der gesuchten Potenzlinie.

235. Wir wollen nun die vorher behauptete perspektive Lage der beiden Kreise k und k_1 nachweisen. Dabei ist es gleichgültig, ob die Kreise k und k_1 sich gegenseitig ausschließen (Fig. 157), oder schneiden (Fig. 158), oder einer den andern einschließt (Fig. 156).

Ist O der äußere oder innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise k und k_1, so läßt sich auf den Strahlen durch O jedem Punkt P auf k ein bestimmter Punkt P_1 auf k_1 als entsprechender Punkt zuordnen. Freilich schneidet der Strahl OP aus k_1 noch zwei Punkte P_1 und P_2 aus; aber einer von ihnen, etwa P_2, ist der zu P ähnlich liegende Punkt des Kreises k_1 und ist dadurch charakterisiert, daß die Radien MP und M_1P_2 parallel sind. Wir lassen nun je zwei Punkte der Kreise k und k_1 einander entsprechen, die sich auf einem Strahle durch O befinden, aber nicht parallelen Radien angehören, also nicht ähnlich liegen, so z. B. die Punkte P und P_1, Q und Q_1 u. s. f. Auf diese Weise gehört zu jedem Punkt des einen Kreises ein und nur ein Punkt des andern, und wir werden jetzt zeigen, daß hierdurch die beiden Kreise in perspektive Beziehung gebracht sind. Einerseits laufen ja die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch den festen Punkt O, der das Centrum der Perspektive bildet. Andererseits müssen sich entsprechende Gerade auf einer festen Geraden, der Achse der Perspektive, schneiden. Das ist in der That der Fall, denn eine ganz beliebig gewählte Sehne PQ von k und die entsprechende Sehne P_1Q_1 von k_1 treffen sich immer in einem Punkt der gemeinsamen Potenzlinie e_1 beider Kreise, die somit die Achse der Perspektive darstellt. Um dies zu erkennen, beachte man (Figg. 156, 157, 158), daß die Sehnen PQ und P_2Q_2 ähnlich liegen, also parallel sind, und daß deshalb aus der Gleichheit der Winkel in P_1 und Q_2 (als Centriwinkel über dem Kreisbogen P_2Q_1) die Gleichheit der Winkel in P_1 und Q folgt. Hiernach kann man durch die vier Punkte PQP_1Q_1 einen Hilfskreis legen, und dieser bestimmt mit k die Chordale PQ und mit k_1 die Chordale P_1Q_1; beide müssen sich aber nach dem früher erwähnten Satze auf der gemeinsamen Potenzlinie e_1 von k und k_1 schneiden.

236. Wir haben in der vorigen Nummer nachgewiesen, daß die beiden Kreise k und k_1 sich in perspektiver Lage befinden, wobei wir allerdings von der Annahme ausgingen, daß das Centrum der Perspektive stets einer der beiden Ähnlichkeitspunkte sei. Wir haben nun nachträglich noch den Beweis zu führen, daß in der

That nur ein Ähnlichkeitspunkt das Perspektivitätscentrum bilden kann. Zunächst zeigen wir, daß dieses auf der Centrale MM_1 liegen muß. Entsprechende Tangenten der Kreise k und k_1 schneiden sich auf der Achse e_1, deren Lage wir freilich noch nicht kennen. Insbesondere entsprechen den zu e_1 parallelen Tangenten des einen Kreises die zu e_1 parallelen Tangenten des andern. Somit entsprechen sich auch ihre Berührungspunkte und die sie verbindenden Durchmesser, die zu e_1 normal sind. Da sich aber beide als entsprechende Gerade auf der Achse e_1 schneiden müssen, liegen sie auf der nämlichen Normalen zur Achse. So sehen wir denn, daß die Centrale MM_1 der beiden Kreise zur Achse e_1 der Perspektive

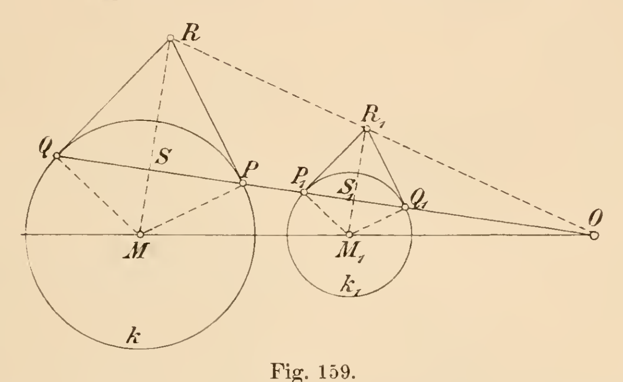


Fig. 159.

senkrecht ist und als Träger entsprechender Punkte durch das Centrum O der Perspektive hindurchgeht.

Sind jetzt P, P_1 zwei entsprechende Punkte der Kreise k und k_1, so schneidet PP_1 auf MM_1 das Centrum O aus und trifft die Kreise noch in zwei weiteren entsprechenden Punkten Q und Q_1. Auch die Tangenten an k_1 in P_1 und Q_1 und ihr Schnittpunkt R_1 entsprechen den Tangenten an k in P und Q und deren Schnittpunkt R (Fig. 159); deshalb muß auch RR_1 durch O gehen. Zugleich sind RM und R_1M_1 senkrecht zu dem Strahle OP und halbieren die Sehnen PQ und P_1Q_1 in S resp. S_1. Nun sind die rechtwinkligen Dreiecke MPR und $M_1Q_1R_1$ ähnlich und, vom Centrum O aus gesehen, in ähnlicher Lage. Denn MR und M_1R_1 sind ähnlich gelegen, und das zu $\triangle MPR$ ähnlich liegende Dreieck mit der Seite M_1R_1 muß seine dritte Ecke auf OP haben und rechtwinklig sein, da $\angle MPR = 90^0$ ist. Es giebt aber nur zwei solche Dreiecke, nämlich $M_1Q_1R_1$ und $M_1P_1R_1$, also muß eines von ihnen und zwar $\triangle M_1Q_1R_1$ zu $\triangle MPR$ ähnlich liegen. Demnach ist $MP \parallel M_1Q_1$, so daß

P und Q_1 ähnlich liegende Punkte auf k und k_1 sind und O das zugehörige Ähnlichkeitscentrum ist.

237. Es giebt unendlich viele perspektive Beziehungen oder Centralprojektionen in der Ebene, die einen gegebenen Kreis in sich selbst überführen. Die Achse oder das Centrum der Perspektive kann beliebig angenommen werden. Aus der perspektiven Beziehung eines Kreises zu einem zweiten läßt sich in einfachster Weise auch die perspektive Beziehung eines Kreises zu sich selbst ableiten. Sei k_1 ein Kreis und e_1 irgend eine Gerade in seiner Ebene, so bestimme man zunächst den zu k_1 in Bezug auf e_1 symmetrischen Kreis k. Betrachtet man k_1 als das perspektive Bild von k, so ist e_1 die Achse und $O = e_1 \times MM_1$ — als innerer Ähnlichkeitspunkt — das Centrum (Fig. 160). Läßt man jetzt den Kreis k um e_1 eine halbe Umdrehung machen und bezeichnet ihn in seiner neuen Lage mit k_0, so deckt sich k_0 völlig mit k_1. Nach 163 sind dann auch die Kreise k_1 und k_0 in perspektiver Lage, d. h. wir haben es mit einer neuen perspektiven Beziehung zu thun, bei welcher der Kreis k_1 sich selbst entspricht und die beliebige Gerade e_1 die Perspektivitätsachse ist. Sind ferner P und P_1 entsprechende Punkte der Kreise k und k_1, so gelangt P bei der Umdrehung in die Lage P_0, die zu P in Bezug auf e_1 symmetrisch ist. P_1 und P_0 werden entsprechende Punkte der neuen Perspektive, die k_1 in sich selbst verwandelt, und die Gerade P_1P_0 schneidet auf MM_1 das Centrum O' derselben aus. Der zu P_1 symmetrische Punkt Q und der Punkt $Q_1 = P_0$ entsprechen sich ebenfalls als Punkte von k und k_1, und nach der Drehung des Kreises k bilden $Q_1 = P_0$ und $Q_0 = P_1$ entsprechende Punkte von k_1 und k_0. So sehen wir denn, daß jeder Strahl durch O' den Kreis $k_1 = k_0$ in zwei Punkten schneidet, die sich vertauschbar entsprechen, d. h. zu dem ersten als Originalpunkt gehört der zweite als perspektives Bild und zu dem zweiten als Originalpunkt wiederum der erste als perspektives Bild.

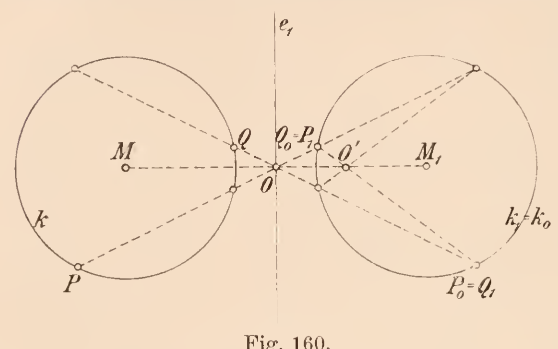


Fig. 160.

238. Als Achse der Perspektive, die einen Kreis k in sich

selbst verwandelt, kann, wie wir sahen, jede Gerade e in seiner Ebene dienen, das zugehörige Centrum O ist alsdann bestimmt. Wir wollen nun noch etwas näher untersuchen, in welcher Weise Achse und Centrum einer solchen Perspektive miteinander verknüpft sind. Zunächst schicken wir die Definition voraus: Ein Punkt und eine Gerade werden als Pol und Polare in Bezug auf einen Kreis k bezeichnet, wenn sie Centrum und Achse einer Perspektive darstellen, die den Kreis k in sich selbst abbildet. Ziehen wir jetzt durch den Pol O zwei beliebige Strahlen, welche den Kreis k in P und P_1 resp. Q und Q_1 schneiden (Fig. 161), so entsprechen den Originalpunkten P, Q, P_1, Q_1 die Bildpunkte P_1, Q_1, P, Q. Demnach schneiden sich die entsprechenden Geraden PQ und P_1Q_1 in einem Punkte J der Polare e und ebenso die entsprechenden Geraden PQ_1 und P_1Q in einem Punkte K derselben. Hierin liegt die Konstruktion der Polare zu einem gegebenen Punkt als Pol.

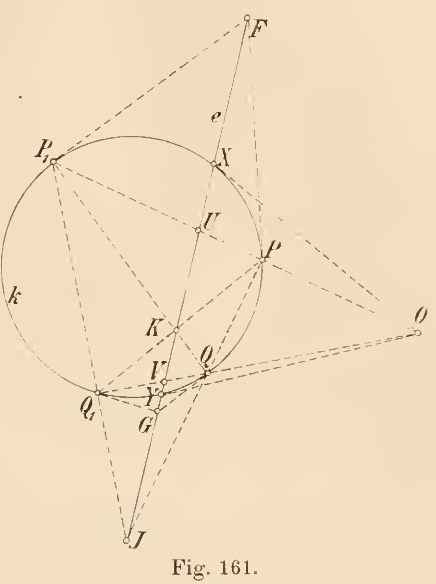


Fig. 161.

Auch die Tangenten in P und P_1 entsprechen sich, so daß ihr Schnittpunkt F auf der Polare e liegt, und in gleicher Weise muß sich der Schnittpunkt G der Tangenten in Q und Q_1 auf der Polare befinden. Ferner schneidet die Polare die Sehnen PP_1 und QQ_1 in Punkten U resp. V, welche mit O zusammen diese Sehnen harmonisch teilen. Denn die Linien PQ, PQ_1, P_1Q, P_1Q_1 bilden ein Vierseit, dessen Diagonalschnittpunkte O, U und V sind. Liegt O im Innern des Kreises k, so liegen U und V als vierte harmonische Punkte auf den verlängerten Sehnen PP_1 resp. QQ_1; da ein gleiches Verhalten bei allen Sehnen durch O eintritt, schneidet die Polare e den Kreis nicht. Liegt dagegen O außerhalb k, so liegen U und V innerhalb, und die Polare schneidet den Kreis in zwei Punkten X und Y. Diese sind die Berührungspunkte der von O an den Kreis gelegten Tangenten. Denn OX schneidet k in zwei Punkten, die zu O und X harmonisch liegen, und da einer dieser Schnittpunkte mit X zu-

sammenfällt, muß es nach 218 auch der andere thun. Wir fassen diese Resultate in die folgenden Sätze zusammen.

α) Je zwei beliebige Sehnen durch den Pol besitzen vier Endpunkte, deren vier Verbindungslinien sich zweimal zu zwei auf der Polaren schneiden. Dieser Satz liefert die Konstruktion der Polaren zu einem gegebenen Pole.

β) Jede Sehne durch den Pol bestimmt in ihren Endpunkten zwei Tangenten, die sich auf der Polaren schneiden und umgekehrt.

γ) Jede Sehne durch den Pol wird von diesem und der Polaren harmonisch geteilt.

δ) Kann man vom Pol aus Tangenten an den Kreis legen, so geht die Polare durch ihre Berührungspunkte.

Je nachdem der Pol außer- oder innerhalb des Kreises liegt, schneidet ihn die Polare, oder sie schneidet ihn nicht. Im besonderen erhält man als Polare des Kreismittelpunktes die unendlich ferne Gerade der Ebene. Tangiert die Polare den Kreis, so ist ihr Berührungspunkt der zugehörige Pol und umgekehrt. Denn legt man aus irgend einem Punkt der Polaren die beiden Tangenten an den Kreis (deren eine in diesem Falle die Polare selbst ist), so muß die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte durch den Pol gehen.

239. Wir haben zu Anfang dieses Kapitels untersucht, in welcher Weise ein Kreis durch Perspektive in einen zweiten Kreis abgebildet werden kann. Die hierbei gewonnenen Resultate haben wir alsdann benutzt, um die perspektive Abbildung eines Kreises in sich selbst abzuleiten. Diese letztere lieferte uns die Eigenschaften von Pol und Polare, welche dabei als Centrum und Achse der Perspektive auftreten. Wir werden späterhin die Beziehungen zwischen Pol und Polare direkt ableiten, gestützt auf einen einfachen Satz über den Kreis (vergl. 267). Daraus können wir dann wieder den Schluß ziehen, daß ein Kreis auf unendlich viele Weisen zu sich selbst perspektiv liegt.

240. Die Perspektive in der Ebene, bei welcher ein Kreis k in sich selbst verwandelt wird, ist von einer besonderen Art, die wir jetzt noch etwas studieren wollen. In 237 fanden wir, daß sich hierbei die Punkte des Kreises paarweise vertauschbar entsprechen, so daß jeder Punkt eines Paares als Bild des andern erscheint. Im Anschluß an dieses Verhalten stellen wir die Definition an die

Spitze: Eine Centralprojektion oder Perspektive in der Ebene heißt involutorisch, wenn je zwei als Original und Bild einander zugeordnete Punkte sich vertauschbar entsprechen. Aus dieser Definition folgt unmittelbar: Jede Punktreihe, welche das Centrum O enthält, liegt mit ihrem Bilde (entgegenlaufend) involutorisch; das Centrum und der Achsenschnittpunkt bilden die Doppelpunkte der Involution. Denn bei einer jeden Perspektive entspricht einer Punktreihe, deren Träger durch das Centrum O geht, eine dazu projektive Punktreihe auf dem gleichen Träger. Die Punkte beider Reihen entsprechen sich aber im vorliegenden Falle vertauschbar, die Reihen sind also nach 219 involutorisch. Ferner folgt aus der Definition: Jeder Strahlbüschel, der seinen Scheitel auf der Achse e_1 hat, liegt mit einem Bilde (entgegenlaufend) involutorisch; die Achse und der Strahl durch das Centrum bilden die Doppelstrahlen der Involution. Jede von zwei entsprechenden Punkten begrenzte Strecke wird durch das Centrum und den Schnittpunkt mit der Achse harmonisch geteilt (vergl. 223). Ebenso wird jeder von zwei entsprechenden Geraden eingeschlossene Winkel durch die Achse und den Strahl nach dem Centrum harmonisch geteilt (232). Sind Centrum und Achse einer involutorischen Centralprojektion gegeben, so ist sie völlig bestimmt, denn man kann nach dem Gesagten zu jedem Punkt und jeder Geraden den entsprechenden Punkt und die entsprechende Gerade zeichnen.

Da bei jedem Paare involutorischer Punktreihen die Gegenpunkte (G_v und G_∞) im Mittelpunkte der Involution vereinigt liegen, ergiebt sich ferner: Die Verschwindungs- und die Fluchtlinie (e_v und e_∞) einer involutorischen Perspektive fallen in diejenige Parallele zur Achse zusammen, welche deren Abstand vom Centrum halbiert (164).

241. Auf Grund der voranstehenden Erklärungen kann der in 237 ausgesprochene Satz dahin vervollständigt werden: Ein gegebener Kreis wird durch jede involutorische Centralprojektion oder Perspektive in sich übergeführt, deren Centrum O und Achse e_1 in der Beziehung von Pol und Polare hinsichtlich des Kreises stehen. Denn jeder Strahl durch O schneidet den Kreis in zwei Punkten, die zu O und dem Schnittpunkt mit e_1 harmonisch liegen, also sich wechselseitig entsprechen. — Aus den gleichen Gründen erkennt man die Richtigkeit des Satzes: Eine gegebene involutorische Centralprojektion führt alle Kreise der Ebene in sich über, für welche das Centrum und die Achse respektive Pol und Polare bilden.

Diese Kreise werden erhalten, wenn man von dem Centrum O das Lot OE auf die Achse e_1 fällt, auf demselben irgend zwei harmonisch

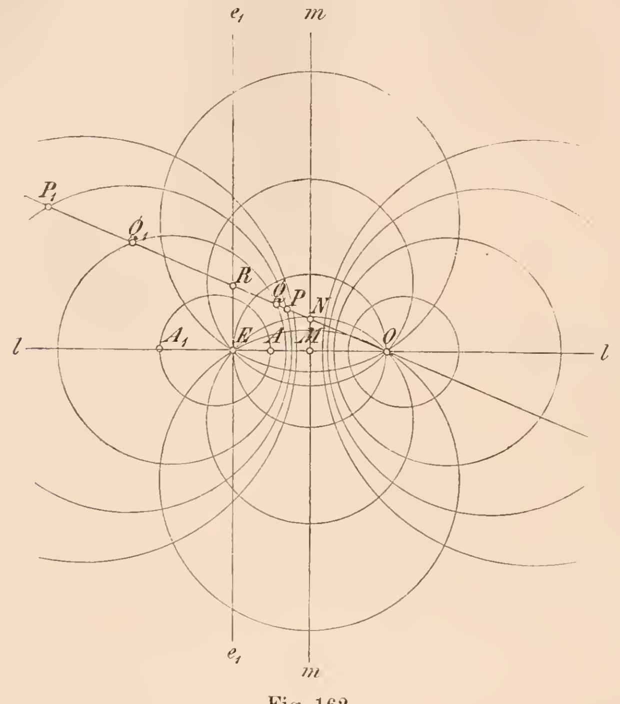


Fig. 162.

zu O und E liegende Punkte A und A_1 aufsucht und über AA_1 als Durchmesser den Kreis beschreibt (Fig. 162).

242. Von welcher Art ist nun das System der Kreise, die bei einer involutorischen Perspektive in sich selbst abgebildet werden? Die Mittelpunkte aller dieser Kreise liegen wie gesagt auf der Geraden $l = OE$, und ihre auf l liegenden Durchmesser werden durch O und E harmonisch geteilt. In dem System befinden sich deshalb auch zwei Kreise von verschwindendem Radius (Nullkreise), nämlich die Punkte O und E, ferner ein Kreis von unendlich großem Radius, nämlich die Gerade m, die im Mittelpunkt M von OE auf dieser Geraden senkrecht steht. In der Geraden m fallen zugleich Flucht- und Verschwindungslinie der Perspektive zusammen, und es bildet m für alle Kreise des Systems die gemeinsame Chordale. Ist nämlich N irgend ein Punkt derselben, so schneidet der Strahl ON das Kreissystem in einer Involution von

Punktepaaren, deren Doppelpunkte O und der Achsenschnittpunkt R sind und deren Mittelpunkt N ist. Sind P, P_1 und Q, Q_1 die Schnittpunkte des Strahls mit irgend zwei Kreisen des Systems, so ist nach 226:

$$NP \cdot NP_1 = NQ \cdot NQ_1,$$

folglich ist N ein Punkt der gemeinsamen Potenzlinie, oder Chordale beider Kreise, w. z. b. w.

243. Aus der letzten Relation folgt ferner: Zieht man von einem Punkte N der Chordalen an alle Kreise des Systems die Tangenten, so sind die Längen derselben (von N bis zum Berührungspunkte gemessen) sämtlich gleich ($=\sqrt{NP \cdot NP_1}$), d. h. die Berührungspunkte liegen auf einem neuen Kreise mit dem Centrum N. Dieser geht durch die Punkte O und E (die Nullkreise) und schneidet alle Kreise des Systems unter rechtem Winkel (d. h. in jedem Schnittpunkte stehen die beiderlei Kreistangenten aufeinander senkrecht). Da der Punkt N auf der Geraden m beliebig angenommen werden darf, erhält man ein zweites System von unendlich vielen Kreisen, die alle durch die beiden festen Punkte O und E gehen und die Kreise des ersten Systems rechtwinklig kreuzen. Für die Kreise dieses zweiten Systems bildet die Gerade l die gemeinsame Chordale; sie ist als der zum System gehörige Kreis mit unendlich großem Radius aufzufassen. Nullkreise treten hier nicht auf.

Bei der involutorischen Perspektive mit dem Centrum O und der Achse e_1 wird jeder Kreis des ersten Systems in sich selbst übergeführt, dagegen jeder Kreis des zweiten in einen andern Kreis des nämlichen Systems.

244. Das System aller Kreise, die eine gemeinsame Chordale oder Potenzlinie besitzen, bezeichnet man als Kreisbüschel. Demnach bilden die soeben betrachteten Systeme, deren Kreise sich gegenseitig rechtwinklig durchschneiden, zwei Kreisbüschel. Sie liefern uns die Hilfsmittel, um die in 233 gestellten Aufgaben zu lösen, welche die Involution von Punkten betreffen. Sind nämlich von einer Involution zwei Paare entsprechender Punkte P und P_1, Q und Q_1, so schlage man über den Strecken PP_1 und QQ_1 als Durchmesser Kreise p und q. Dann schneidet ihre gemeinsame Chordale den Mittelpunkt M der Involution und jeder Kreis des Büschels, dem p und q angehören, ein Punktepaar derselben aus (Fig. 163). Denn für M gilt dann die Relation $MP \cdot MP_1 = MQ \cdot MQ_1 = MR \cdot MR_1$, wie es nach 226 für den Mittelpunkt der Involution sein

muß. Für die Nullkreise U und V des Büschels ist ferner $(MU)^2 = (MV)^2 = MP \cdot MP_1$, sie bilden also die Doppelpunkte der Involution.

245. Schneiden sich die beiden Kreise p und q nicht, so gehören die Paare PP_1 und QQ_1 einer entgegenlaufenden Involution an (Fig. 163). In diesem Falle konstruiere man mittels eines Hilfskreises k einen Punkt E der gemeinsamen Potenzlinie von p und q nach 234; hierauf ziehe man die Chordale senkrecht zu g und findet damit den Mittelpunkt M der Involution. Legt man aus M eine Tangente MT an einen der Kreise, so schneidet der um M mit dem Radius MT beschriebene Kreis auf g die Doppelpunkte U und V aus. Derselbe Kreis schneide die Chordale in X und Y, dann treffen

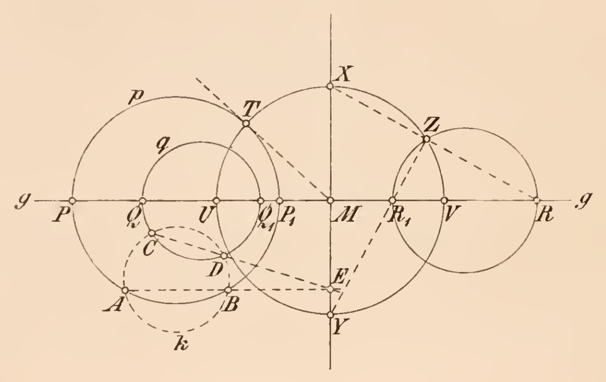


Fig. 163.

je zwei zu einander rechtwinklige Strahlen durch X und Y die Gerade g in einem Punktepaar der Involution, z. B. $XR \perp YR_1$. Denn der Schnittpunkt Z dieser Strahlen muß sowohl auf einem über dem Durchmesser XY, als auf einem über dem Durchmesser RR_1 beschriebenen Kreise liegen, und es folgt: $MR \cdot MR_1 = MX \cdot MY = (MV)^2$.

246. Schneiden sich die Kreise p und q, so gehören die Paare PP_1 und QQ_1 einer gleichlaufenden Involution an (Fig. 164), und die Verbindungslinie der Schnittpunkte X und Y unserer Kreise geht durch den Mittelpunkt M. Für die Schnittpunkte U und V des über dem Durchmesser XY beschriebenen Kreises mit g besteht die Relation $(MU)^2 = (MV)^2 = - MP \cdot MP_1$; sie stellen aber keine Doppelpunkte dar, sondern entsprechen sich vertauschbar. Je zwei zu einander rechtwinklige Strahlen durch X treffen die Gerade g in einem Punktepaar der Involution.

Die Strahleninvolution, welche die betrachtete Punktinvolution

aus einem der beiden Punkte X oder Y projiziert, hat die Eigenschaft, daß jedes Paar entsprechender Strahlen einen rechten Winkel einschließt und heißt deshalb eine Involution rechter Winkel.

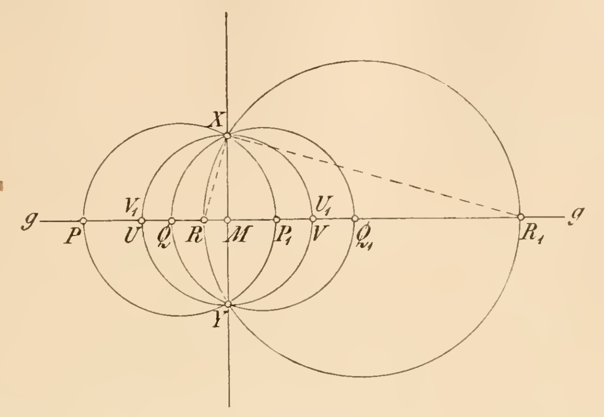


Fig. 164.

Es mag noch erwähnt werden, daß ein Kreisbüschel von jeder beliebigen Geraden in einer Involution von Punktepaaren und seine gemeinsame Chordale im Mittelpunkt der Involution geschnitten wird, wie ja unmittelbar aus der Eigenschaft der Chordalen folgt.

247. Seither haben wir die Perspektive in der Ebene behandelt, die einen Kreis in einen andern oder in sich selbst überführt. Man kann von jener zur Perspektive oder Centralprojektion im Raume übergehen, die einen gegebenen Kreis in einen andern oder in einen kongruenten Kreis verwandelt. Denn denkt man sich für die perspektive Lage zweier Kreise in einer Ebene, oder für die eines Kreises mit sich selbst Centrum und Achse bestimmt, so bleibt nur übrig, die eine der beiden perspektiven Figuren um die Achse aus der Ebene herauszudrehen, um räumliche perspektive Lagen der Kreise zu erhalten. Während zwei beliebige Kreise einer Ebene perspektiv liegen, erkennt man schon hieraus, daß zwei perspektive Kreise im Raume sich in einer besonderen Lage zu einander befinden.

Um diese Sache weiter verfolgen zu können, betrachten wir eine zu unserer Untersuchung in nächster Beziehung stehende Figur: den schiefen Kreiskegel.

248. Alle Strahlen, die durch einen festen Punkt S des Raumes nach den Punkten eines festen Kreises k gezogen werden können, liegen auf einer Fläche, die man als schiefen Kreiskegel be-

zeichnet. Der Punkt S heißt die Spitze oder der Scheitel, k der Grundkreis, jene Strahlen die Erzeugenden oder Mantellinien (Kanten) des Kegels. Die vollständige Fläche besteht aus zwei Mänteln (Kegel und Gegenkegel), die in der Spitze zusammenstoßen; die Mantellinien des Gegenkegels sind die Verlängerungen von denen des Kegels und umgekehrt. Jede Ebene durch die Spitze des Kegels schneidet ihn entweder gar nicht (abgesehen von der Spitze), oder sie schneidet ihn in zwei getrennten Mantellinien, oder in zwei zusammenfallenden; im letzten Falle berührt sie ihn längs dieser Mantellinie und heißt Tangentialebene.

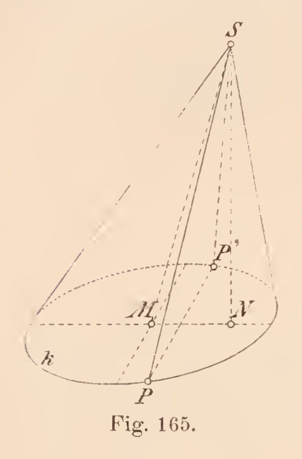


Fig. 165.

Man ziehe nun von der Spitze S einen Strahl nach dem Mittelpunkt M des Kreises k und fälle ferner auf die Ebene des Grundkreises das Lot SN (vergl. die schiefe Ansicht in Fig. 165), so bestimmen diese Linien eine Symmetrieebene $\mathsf{A} = SMN$ des Kegels, d. h. zu jeder Mantellinie des Kegels giebt es eine in Bezug auf A symmetrische. Trifft erstere den Grundkreis in P, so trifft die letztere ihn in P', wo P und P' symmetrisch zum Durchmesser MN liegen. — Fallen die Linien SM und SN zusammen, so geht der schiefe Kreiskegel in einen geraden oder Rotationskegel über und alle durch SM gezogenen Ebenen sind Symmetrieebenen. — Rückt die Spitze ins Unendliche, so verwandelt sich der Kegel in einen schiefen Kreiscylinder, dessen Mantellinien sämtlich parallel liegen.

249. Alle Parallelebenen zur Grundkreisebene schneiden den schiefen Kreiskegel in Kurven, die mit k ähnlich sind, also wiederum in Kreisen. Ebenso schneidet jedes System paralleler Ebenen aus dem Kegel ähnliche Kurven aus. Es gilt nun der Satz: Durch zwei Kreise, die sich in perspektiver Lage, aber nicht in parallelen Ebenen befinden, läßt sich stets eine Kugelfläche legen. Ist e die Schnittlinie der Ebenen der beiden Kreise k und k_1, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Schneidet e den Kreis k in P und Q, so geht auch k_1 durch diese Punkte, da sie sich als Punkte der Perspektivitätsachse selbst entsprechen. Zwei derartige Kreise liegen aber stets auf einer Kugel. Denn die Ebene A welche auf PQ im Mittelpunkt senkrecht steht, enthält nicht nur die Mittelpunkte der Kreise k und k_1, sondern auch die in diesen Punkten auf den Kreisebenen errichteten Normalen. Die letzteren

schneiden sich somit in einem Punkte O, und eine um O mit dem Radius OP beschriebene Kugel geht durch beide Kreise. Zugleich erkennt man, daß die Ebene A das Centrum S der Perspektive enthält. Die Ebene A schneidet nämlich die Kreise k und k_1 in zwei Durchmessern AB und A_1B_1, deren Endpunkte sich in der Perspektive entsprechen müssen, weil die zugehörigen Tangenten als Parallelen zur Achse e sich entsprechen. S erscheint also als Schnittpunkt der Strahlen AA_1 und BB_1. S ist der Scheitel eines Kegels, auf dessen Mantel die beiden Kreise k und k_1 liegen und der die Ebene A zur Symmetrieebene hat.

Schneidet dagegen die Achse e die Kreise k und k_1 nicht, so führt folgende Überlegung zum Ziele. Die Kegelfläche mit der Spitze S, auf der die Kreise k und k_1 liegen, schneide man mit einer zur Ebene von k_1 parallelen Ebene in einem Kreise k_2 so zwar, daß k_2 und k zwei Punkte P und Q gemein haben. Dann geht nach dem Voranstehenden durch die beiden Kreise k und k_2 eine Kugel, und die Ebene A, welche auf PQ im Mittelpunkt senkrecht steht, enthält den Scheitel S des Kegels und ist eine Symmetrieebene desselben. Macht man die Ebene A zur Projektionsebene, so stellen die in ihr liegenden Durchmesser AB, A_1B_1 und A_2B_2 der Kreise k, k_1 und k_2 die orthogonalen Projektionen dieser Kreise dar (Fig. 166). Nun liegen k und k_2 auf einer Kugel; sie wird von A in einem größten Kreise l geschnitten, der durch die vier Punkte ABA_2B_2 geht. Demnach sind die Winkel bei A und B_2 einander gleich, da sie auf demselben Bogen A_2B stehen, und ebenso die Winkel bei A und B_1, da $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ ist. Mithin kann man auch durch die vier Punkte ABA_1B_1 einen Kreis m legen, und eine Kugel, für welche m ein größter Kreis, also A eine Symmetrieebene ist, enthält wie ersichtlich die beiden Kreise k und k_1.

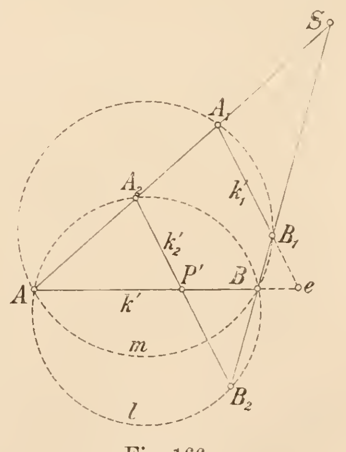


Fig. 166.

Zu jedem der beiden Kreise k und k_1 giebt es auf dem Kegel ein System von Parallelkreisen, d. h. Kreise in parallelen Ebenen. Da jeder Kreis des einen Systems zu jedem Kreis des andern perspektiv liegt, geht nach unserm Satz durch je zwei solche Kreise eine Kugel. Zwei Kreisschnitte eines Kegels heißen Wechsel-

schnitte, wenn ihre Ebenen nicht parallel sind. Wir haben also den Satz: Durch je zwei Wechselschnitte eines Kegels — Kreisschnitte mit nicht parallelen Ebenen — läßt sich eine Kugelfläche legen.

250. Eine Umkehrung des soeben bewiesenen Satzes lautet: Kann man durch zwei Kreise eine Kugel legen, so befinden sie sich auch in perspektiver Lage und zwar auf zweifache Weise. Sind k und k_1 die beiden Kreise und ist e die Schnittlinie ihrer Ebenen, so ziehe man durch den Kugelmittelpunkt eine zu e normale Ebene A. Diese schneidet die Kugel in einem größten Kreise m und steht auf den Ebenen der beiden Kreise k und k_1 senkrecht; sie enthält also deren Mittelpunkte und je einen Durchmesser, den wir mit AB resp. A_1B_1 bezeichnen (Fig. 166 stellt diese Verhältnisse wieder in orthogonaler Projektion dar). Nun betrachte man den Punkt $S = AA_1 \times BB_1$ als Spitze einer Kegelfläche, die man durch den Kreis k_1 legt; es ist dann zu zeigen, daß diese Kegelfläche auch durch den Kreis k geht. Das ist aber der Fall, sobald man beweisen kann, daß jeder beliebige Punkt P von k auf derselben liegt. Zu diesem Zwecke ziehe man durch P eine Ebene parallel zu der des Kreises k_1, dieselbe wird den Kegel in einem Kreise k_2 mit dem Durchmesser A_2B_2 schneiden. Nach der Voraussetzung liegen die Punkte ABA_1B_1 auf dem Kreise m, und da $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ ist, liegen auch die Punkte ABA_2B_2 auf einem Kreise l. Hieraus schließt man weiter, daß die Kreise k und k_2 auf einer Kugelfläche liegen, für die der Kreis l ein größter Kreis ist. Somit müssen sich k und k_2 in zwei in Bezug auf A symmetrischen Punkten schneiden, von denen der eine der Punkt P sein muß; P liegt also auch auf dem Kreis k_2, d. h. auf der Kegelfläche.

Es giebt noch eine zweite Kegelfläche durch die beiden Kreise k und k_1; ihre Spitze wird von dem Schnittpunkt der Geraden AB_1 und A_1B gebildet.

251. Eine andere Umkehrung läßt sich in der Form aussprechen: Schneidet eine Kugel einen Kegel in einem Kreise k, so schneidet sie ihn außerdem in einem zweiten Kreise k_1 (Wechselschnitt). Zum Beweis gehe man wieder von der Symmetrieebene A des Kegels aus und wähle sie zur Projektionsebene (Fig. 166). Sie schneide k in dem Durchmesser AB, den Kegel in den Mantellinien SA und SB und die Kugel in dem größten Kreise m. SA und SB mögen m noch in A_1 und B_1 treffen, dann ist A_1B_1 der Durchmesser eines Kugelkreises k_1, dessen Ebene auf A senkrecht steht. Nach dem Vorigen gehören aber k und k_1 als

Kreise auf der nämlichen Kugel einem Kegel mit dem Scheitel $S = AA_1 \times BB_1$ an, w. z. b. w.

Wir drücken unser Ergebnis noch in einer zweiten Form aus: Durch Centralprojektion eines Kreises auf eine ihn enthaltende Kugel aus einem beliebigen Punkte des Raumes entsteht wieder ein Kreis; bei Parallelprojektion sind beide Kreise kongruent.

252. Es wurde bereits gezeigt, daß jeder schiefe Kreiskegel eine Symmetrieebene A besitzt, die zu den Ebenen aller Kreisschnitte normal ist. Wählt man nun als Wechselschnitte zwei Kreise k und k_1 von gleicher Größe, so werden sie von A in den gleich großen Durchmessern AB und A_1B_1 geschnitten (Fig. 167 in schiefer Ansicht). Da wir es mit Wechselschnitten zu thun haben, ist $\angle SAB = \angle SB_1A_1$, also $\triangle SAB \cong \triangle SB_1A_1$; folglich muß auch $SA = SB_1$, $SA_1 = SB$ und $\triangle SAE \cong \triangle SB_1E$ sein ($E = AB \times A_1B_1$). Demnach halbiert SE die Winkel ASB_1 und A_1EB. Nennen wir B die Ebene, die in SE auf A senkrecht steht, so ist der eine Wechselschnitt zu dem andern symmetrisch in Bezug auf B, und somit ist B auch eine Symmetrieebene für den Kegel.

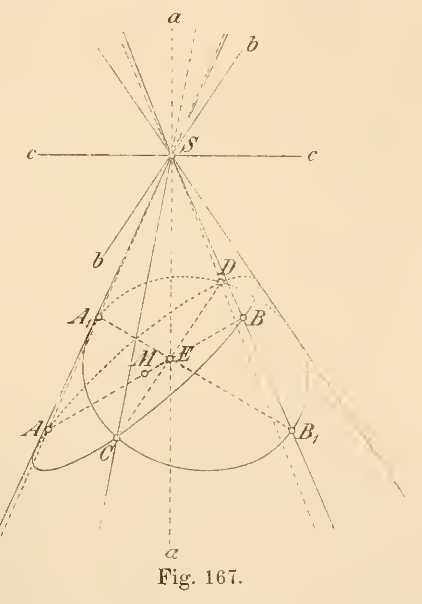


Fig. 167.

In der Figur sind die gleich großen Wechselschnitte k und k_1 auf dem nämlichen Kegelmantel genommen. Wählt man jedoch k auf dem einen und k_1 auf dem andern Mantel, so kann man die ganzen Betrachtungen wiederholen und gelangt zu einer Symmetrieebene Γ, die zu A normal ist und den Nebenwinkel von $\angle ASB_1$ halbiert. Je zwei gleich große Wechselschnitte auf verschiedenen Mänteln liegen zu der Ebene Γ symmetrisch.

Ein schiefer Kreiskegel besitzt drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen A, B, Γ; ihre drei in der Spitze S aufeinander senkrecht stehenden Schnittlinien $a = \mathsf{B} \times \Gamma$, $b = \Gamma \times \mathsf{A}$, $c = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ heißen die Achsen des Kegels. Es giebt zwei Systeme von Kreisen auf dem Kegel; ihre Ebenen stehen auf A senkrecht und schließen mit B (ebenso mit Γ) gleiche Winkel ein.

253. Wir untersuchen weiterhin noch einige spezielle Fälle, in denen ein Kreis in einen andern Kreis projiziert wird unter gleichzeitiger Erfüllung besonderer Bedingungen.

Es giebt unendlich viele Centralprojektionen, bei denen einem gegebenen Kreis k ein Kreis und einer außerhalb des Kreises k in seiner Ebene E gegebenen Geraden e_v die unendlich ferne Gerade der Bildebene entspricht. Die durch den Mittelpunkt von k senkrecht zu e_v gelegte Ebene A diene wieder als Aufrißebene, während wir die Ebene von k als Grundrißebene benutzen. Man zeichne nun in A irgend einen Kreis, der den Durchmesser AB von k zur Sehne hat und ziehe an ihn aus $M = \mathsf{A} \times e_v$ eine Tangente, die in O berühren mag (Fig. 168). Schneidet dann eine beliebige Parallele zu MO die Strahlen OA und OB resp. in A_1 und B_1, so ist $\angle BAO = \angle BOM = \angle A_1B_1O_1$ und folglich liegen die Punkte ABA_1B_1 auf einem Kreise. Hieraus erkennt man (wie in 251), daß die durch A_1B_1 normal zu A gelegte Ebene E_1 auf dem Kegel mit der Spitze O und dem Grundkreis k einen Wechselschnitt zu k, also einen Kreis k_1 bestimmt. Da überdies $\mathsf{E}_1 \parallel Oe_v$ ist, so hat die durch O als Centrum und E_1 als Bildebene bestimmte Centralprojektion die oben geforderte Eigenschaft. Alle durch unsere Konstruktion erhältlichen Centren O liegen auf einem in A um M beschriebenen Kreise m (vergl. 243).

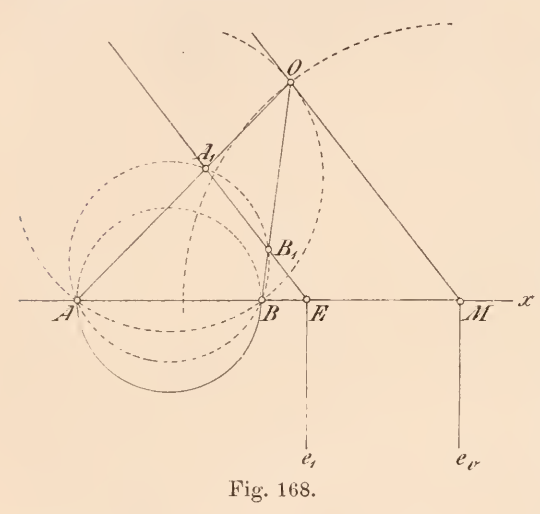


Fig. 168.

254. Es giebt unendlich viele Centralprojektionen, bei denen einem gegebenen Kreise k ein Kreis und einem von k eingeschlossenen Punkt C der Mittelpunkt des Bildkreises entspricht.

Es sei AB der durch C gelegte Durchmesserdes Kreises k (Fig. 169); ferner teile D mit C die Strecke AB harmonisch und e_v ziehe man in D normal zu AB. Dann benutze man die Ebene des Kreises k als Grundriß und die in $AB = x$ auf ihr senkrechte Ebene A als Aufriß und bestimme wie vorher das Centrum O einer Projektion, bei

welcher e_v die Verschwindungslinie bildet und k in einen Kreis k_1 übergeht. Werden die Punkte A, B, C in A_1, B_1, C_1 abgebildet, so entspricht dem vierten harmonischen Punkt D der ersten Reihe der unendlich ferne Punkt der letzteren. C_1 ist folglich die Mitte der Strecke A_1B_1 und, da A_1B_1 ein Durchmesser ist, der Mittelpunkt des Bildkreises.

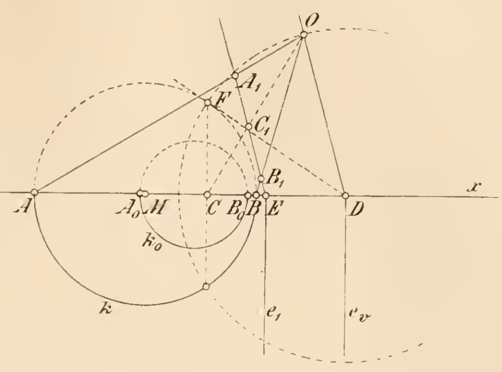
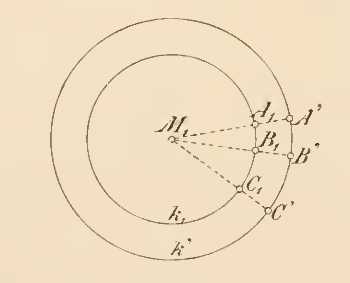


Fig. 169.

Die Konstruktion wird am einfachsten ausgeführt, indem man durch C die auf AB senkrechte Sehne des Kreises k und in einem ihrer Endpunkte F die Tangente zieht, welche AB in D schneidet. CF ist nämlich die Polare von D in Bezug auf k, Pol und Polare teilen aber den Durchmesser AB harmonisch (238 γ). O kann auf dem in A um D mit dem Radius DF beschriebenen Kreise m willkürlich angenommen werden; E ist $\| O e_v$ zu wählen.



255. Zwei gegebene Kreise k und k_1 lassen sich so in perspektive Lage bringen, daß drei gegebenen Punkten A, B, C des einen drei gegebene Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen.

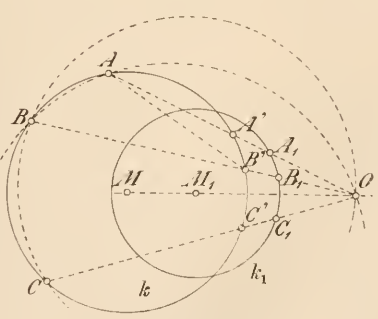


Fig. 170.

Wir nehmen beide Kreise in einer Ebene gelegen an und geben für diesen Fall die Konstruktion. Man zeichne den mit k kongruenten und mit k_1 konzentrischen Kreis k' und bestimme auf ihm die Punkte A', B', C' durch die Radien M_1A_1, M_1B_1 und M_1C_1 (Fig. 170). Dann kann man k' so mit k zur Deckung bringen, daß die Punkte A, B, C mit A', B', C' resp. perspektiv liegen. Wäre O das Centrum

der fraglichen Perspektive, so müßte $\angle AOB = \angle AB'B - \angle A'AB'$ sein. Die letzteren beiden Winkel sind aber als Peripheriewinkel über den Bogen AB und $A'B'$ bekannt. O liegt demnach auf einem Kreise, der über der Sehne AB beschrieben ist und den bekannten Winkel AOB als Peripheriewinkel über dieser Sehne faßt. Ganz ebenso liegt O auf einem zweiten Kreise über der Sehne BC, der einen bekannten Winkel BOC als zugehörigen Peripheriewinkel faßt. Somit ist O konstruierbar und man erhält A', B', C' in der gesuchten Lage auf k durch die Strahlen OA, OB, OC. Bringt man schließlich k_1 samt den Punkten A_1, B_1, C_1 in ähnliche Lage zu k und den Punkten A', B', C', indem man O als Ähnlichkeitscentrum ansieht ($M_1A_1 \parallel MA'$ und von bekannter Größe), so ist auch die perspektive Lage der Kreise k und k_1 und der auf ihnen gegebenen Punkte A, B, C resp. A_1, B_1, C_1 hergestellt.

256. Wir haben uns in diesem Kapitel die Aufgabe gestellt, die Centralprojektionen des Kreises zu studieren. Bisher haben wir indessen nur solche besondere Centralprojektionen oder perspektive Abbildungen des Kreises untersucht, die denselben entweder in einen neuen Kreis oder in sich selbst verwandeln. Die Abbildung eines Kreises in sich selbst hat uns insbesondere zu den Eigenschaften von Pol und Polare geleitet, deren Bedeutung später noch mehr hervortreten wird, und die wir dort noch in anderer Weise ableiten werden. Die räumliche Auffassung des Problems führte uns zum schiefen Kreiskegel und zu dem Resultat, daß auf einem solchen neben den Parallelschnitten zum Basiskreis noch ein zweites System von Kreisschnitten existierte, die wir als Wechselschnitte bezeichneten.

Entstehung der Kegelschnitte aus der Centralprojektion des Kreises. Um- und eingeschriebene Polygone.

257. Entgegen den seitherigen Untersuchungen wollen wir uns jetzt mit den Eigenschaften derjenigen Kurven befassen, die aus einem Kreise bei einer ganz beliebigen perspektiven Abbildung hervorgehen. Dabei ist es gleichgültig, ob man die Centralprojektion in der Ebene oder im Raume zu Grunde legen will, da ja die eine in die andere übergeführt werden kann (164). Die Centralprojektion eines Kreises aus einem Raumpunkt auf eine beliebige Ebene ist aber nichts anderes als der Schnitt dieser Ebene mit einem schiefen Kreiskegel. Aus dieser Anschauung heraus bezeichnet man jedes beliebige perspektive Bild eines Kreises als Kegelschnitt. Daß man jede derartige Kurve sogar immer als Schnitt eines geraden Kreiskegels erhalten kann, werden wir später nachzuweisen haben.[8])

Wir werden nun solche Eigenschaften der Kreise aufzusuchen haben, die bei einer Centralprojektion unveränderlich sind; dann kommen die gleichen Eigenschaften auch den Kegelschnitten zu. So werden alle Sätze beim Kreise, die aussagen, daß drei oder mehr Punkte auf einer Geraden liegen, oder daß drei oder mehr Gerade durch einen Punkt gehen, sich bei den Kegelschnitten wiederfinden müssen, da die Punkte einer Geraden und ebenso die Geraden durch einen Punkt sich wieder als Punkte und Gerade von der nämlichen Eigenschaft projizieren. Auch projektive Punktreihen oder Strahlbüschel, die beim Kreise auftreten, projizieren sich als projektive Punktreihen oder Strahlbüschel beim Kegelschnitt, und alle hierauf basierenden Sätze haben gleichzeitig für den Kreis und sein perspektives Bild — den Kegelschnitt — Gültigkeit. Insbesondere verlieren harmonische Punkte oder Strahlen und involutorische Reihen oder Büschel bei der perspektiven Abbildung ihre Eigenschaften nicht. Die Beziehungen zwischen Pol und Polare, wie sie beim Kreis auftreten, werden sich deshalb auch beim Kegelschnitt einstellen müssen. Hiermit ist aber die Richtung angegeben, in der sich unsere weiteren Untersuchungen zu bewegen haben. Zunächst sollen allerdings einige allgemeine Bemerkungen über die Kreisprojektionen vorausgeschickt werden.

258. Wir stellen an den Anfang die Definition: *Die ebenen Centralprojektionen oder perspektiven Bilder des Kreises heißen Kegelschnitte.* Durchläuft ein Punkt P den Kreis, so dreht sich sein projizierender Strahl OP um das Centrum O und sein Bildpunkt P_1 durchläuft den Kegelschnitt als Bild des Kreises. So wie P den Kreis in einem Zuge beschreibt und zur Ausgangslage zurückkehrt, so beschreibt auch P_1 von einem seiner Punkte anfangend den ganzen Kegelschnitt in einem ununterbrochenen Zuge und kehrt nach Durchlaufung desselben in die Anfangslage zurück. Man darf daher jeden Kegelschnitt, ebenso wie den Kreis, als eine stetige geschlossene Kurve bezeichnen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei der geschilderten Bewegung der Bildpunkt P_1 sich ins Unendliche entfernt und wieder zurückkehrt, der Kegelschnitt also sich ins Unendliche erstreckt. Man hat ihn dann, ähnlich wie die gerade Linie (160), als im Unendlichen geschlossen aufzufassen.

259. Aus dem gegenseitigen Entsprechen der geraden Linien in der Original- und Bildfigur und ihrer Schnittpunkte mit dem gegebenen Kreise resp. mit seinem Bilde, dem Kegelschnitt, folgen unmittelbar die Sätze:

Ein Kegelschnitt wird von irgend einer Geraden seiner

Ebene in höchstens zwei Punkten geschnitten. Einer Kreistangente und ihrem Berührungspunkt entsprechen im Bilde eine Tangente des Kegelschnittes und deren Berührungspunkt.

An einen Kegelschnitt können aus irgend einem Punkte seiner Ebene höchstens zwei Tangenten gezogen werden, die in eine zusammenfallen, wenn der Punkt auf der Kurve liegt.

Beim Kreise spricht man von einem Gebiete innerhalb und von einem solchen außerhalb desselben; dem ersteren gehören alle Punkte an, von denen sich keine Tangenten an den Kreis legen lassen, dem letzteren alle Punkte mit zwei Kreistangenten. Ganz ebenso sagt man beim Kegelschnitt von einem Punkte seiner Ebene, daß er außerhalb oder innerhalb desselben liege, je nachdem durch ihn Tangenten an den Kegelschnitt gelegt werden können oder nicht.

260. Es giebt drei Arten von Kegelschnitten, auf deren Unterscheidung man sofort geführt wird, wenn man ihre Beziehung zur unendlich fernen Geraden der Ebene in Betracht zieht. Geht man vom schiefen Kreiskegel aus, dessen Spitze das Centrum der Perspektive und dessen Mantellinien projizierende Strahlen sind, so kann die Bildebene Π, die den Kegel in der Bildkurve schneidet, folgende drei wesentlich verschiedene Lagen gegen den Kegel einnehmen. Die Ebene Π kann entweder nur den einen Mantel des Kegels schneiden, oder sie kann beide Mäntel (Kegel und Gegenkegel) treffen; zwischen beiden Fällen aber bildet ein dritter den Übergang. Von solchen Fällen, die keine eigentlichen Kegelschnitte liefern, sehen wir ab. Denkt man sich durch das Centrum O (Spitze des Kegels) eine Parallelebene zu Π gelegt, so wird sie den genannten drei Fällen entsprechend entweder keine Mantellinie des Kegels enthalten, oder deren zwei, oder sie wird ihn längs einer Mantellinie berühren. Die fragliche Ebene schneidet aber die des gegebenen Kreises k (die Originalebene E) in der Verschwindungslinie e_v. Hiernach können wir unsere Unterscheidungen auf die Lage des Originalkreises gegen die Verschwindungslinie seiner Ebene basieren.

261. Die Centralprojektion eines Kreises auf eine Ebene ergiebt drei verschiedene Kegelschnitte, je nachdem der Kreis mit der Verschwindungslinie seiner Ebene keinen, zwei getrennte, oder einen Berührungspunkt gemein hat; sie heißen: *Ellipse*, *Hyperbel*, *Parabel*.

Aus dieser Erklärung folgt:

Die Ellipse ist im Endlichen geschlossen. Ihre Über-

einstimmung mit der affinen Kurve des Kreises (vergl. die Definition in 15) wird weiterhin nachgewiesen werden.

Die Hyperbel schneidet die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene in zwei getrennten Punkten; sie verläuft also zweimal durch das Unendliche. Ihre beiden unendlich fernen Punkte sind die Bilder der Schnittpunkte des Originalkreises mit der Verschwindungslinie e_v. Die Tangenten der Hyperbel in diesen Punkten sind die Bilder der Tangenten des Kreises in seinen beiden Verschwindungspunkten und heißen Asymptoten; die unendlich fernen Punkte der Hyperbel werden durch die Asymptotenrichtungen vertreten.

Die Parabel berührt die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene. Der Berührungspunkt ist das Bild des Berührungspunktes von Verschwindungslinie und Originalkreis.

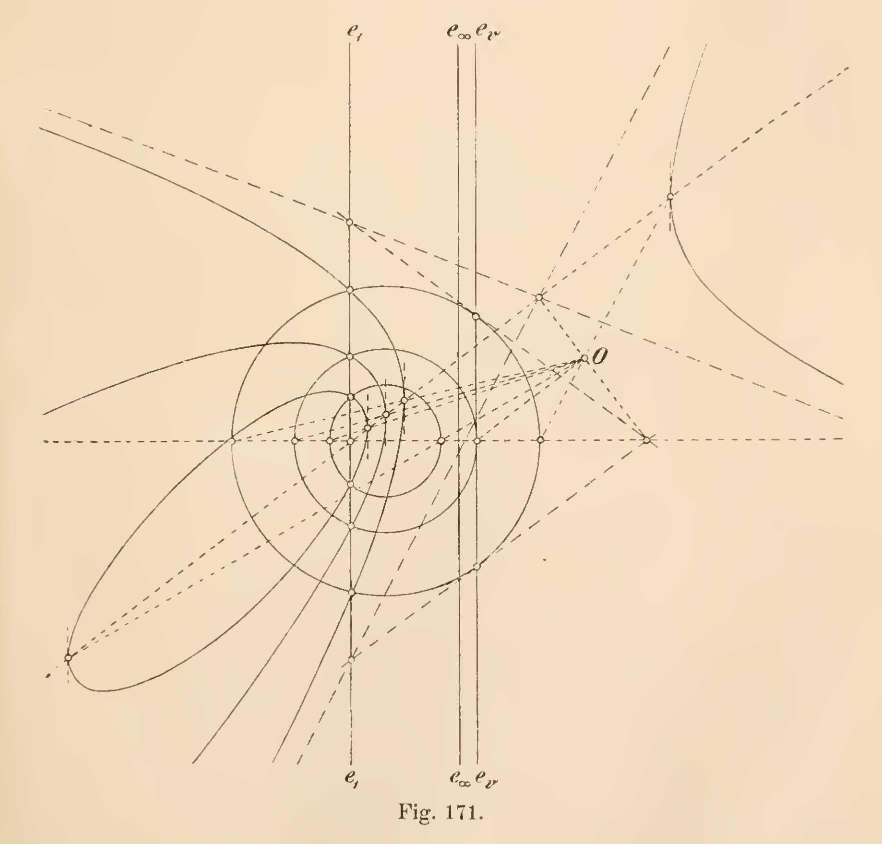


Fig. 171.

262. Da man aus einem Kreise die gleichen Bilder sowohl durch eine ebene wie durch eine räumliche Perspektive erhalten

kann, werden wir bei der konstruktiven Erzeugung des Kegelschnittes die erstere benutzen, weil sie für die Zeichnung bequemer ist. Sind Centrum O, Achse e_1 und Verschwindungslinie e_v, oder an Stelle der letzteren ein Paar entsprechender Punkte gegeben, so können wir nach den in 166 bis 171 auseinandergesetzten Prinzipien zu beliebig vielen Punkten und Tangenten eines vorgelegten Kreises die perspektiven Bilder und somit beliebig viele Punkte und Tangenten eines Kegelschnittes erhalten. In Fig. 171 sind drei konzentrische Kreise so gewählt, daß einer die Verschwindungslinie e_v nicht schneidet, einer dagegen sie schneidet und einer sie berührt. Dementsprechend werden die Bilder durch eine Ellipse, eine Hyperbel und eine Parabel dargestellt. Von der Hyperbel sind zugleich die Asymptoten angegeben.

263. Wir werden jetzt eine Reihe von Sätzen für den Kreis aufstellen, die sich unmittelbar auf die Kegelschnitte als perspektive Bilder des Kreises übertragen lassen. Insbesondere werden wir dabei den Satz benutzen: Bei der perspektiven Abbildung einer Figur in eine andere gehen projektive Punktreihen oder Strahlbüschel wieder in projektive Punktreihen oder Strahlbüschel über. Denn das Bild der ersten Reihe ist projektiv (sogar perspektiv) zu dieser Reihe; nach Voraussetzung ist die erste Reihe projektiv zu einer zweiten, und diese wiederum ist projektiv (sogar perspektiv) zu ihrem Bilde. Somit sind nach 189 auch die Bilder der beiden Reihen projektiv. —

264. Eine Reihe beliebig auf einem Kreise gegebener Punkte $A, B, C, D, \ldots$ wird aus irgend zwei festen Punkten S und S_1 desselben durch kongruente Strahlbüschel projiziert (Fig. 172). Denn je zwei Strahlen des einen Büschels, etwa SA und SB, schließen den gleichen Winkel ein, wie die entsprechenden Strahlen S_1A und S_1B des andern (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen AB). Dabei entspricht ersichtlich dem Strahl SS_1 des ersten Büschels im zweiten Büschel die Kreistangente in S_1 und dem Strahl S_1S des zweiten Büschels im ersten Büschel die Kreistangente in S.

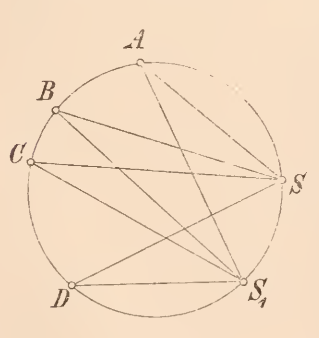


Fig. 172.

Verwandelt man den Kreis durch perspektive Abbildung in einen Kegelschnitt, so gehen (nach 263) die kongruenten Strahlbüschel der Kreisfigur — da die Kongruenz ein Spezialfall der Perspektivität

ist — in projektive Büschel beim Kegelschnitt über, und wir haben den Satz: Eine Reihe beliebig auf einem Kegelschnitt gegebener Punkte $A, B, C, D, \ldots$ wird aus irgend zwei festen Punkten S und S_1 desselben durch projektive Strahlbüschel projiziert. Der Tangente in S (resp. S_1) entspricht dabei der Strahl S_1S (resp. SS_1).

Für den Kreis gilt offenbar auch die Umkehrung des obigen Satzes: Zwei kongruente Strahlbüschel erzeugen einen Kreis, d. h. ihre entsprechenden Strahlen schneiden sich in den Punkten eines Kreises, der durch die Scheitel der beiden Büschel hindurchgeht. Dagegen wissen wir nicht, ob zwei beliebig gegebene projektive Strahlbüschel einen Kegelschnitt erzeugen. Dazu gehört noch der Nachweis, daß zwei derartige Strahlbüschel stets durch perspektive Abbildung aus zwei kongruenten Strahlbüscheln gewonnen werden können, was erst im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

265. Zieht man an einen Kreis irgend welche Tangenten $a, b, c, d, \ldots$, so schneiden sie auf zwei beliebig gewählten Kreistangenten t und t_1 projektive Punktreihen aus. Beide Punktreihen werden vom Kreismittelpunkt M durch kongruente Strahlbüschel projiziert (Fig. 173). Bezeichnen wir die auf t und t_1 ausgeschnittenen Reihen mit $A, B, C, D, \ldots$ resp. $A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots$, so brauchen wir nur zu zeigen, daß die Strahlen $MA, MB, MC, \ldots$ in die Strahlen $MA_1, MB_1, MC_1, \ldots$ durch Drehung um den gleichen Winkel und in dem gleichen Sinne übergehen. Dann sind die Strahlbüschel

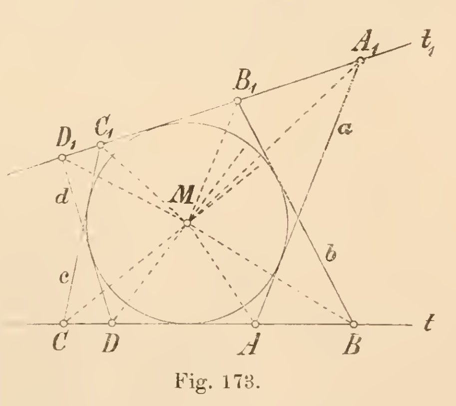


Fig. 173.

kongruent und schneiden auf t und t_1 projektive Punktreihen aus. Nun bilden t und t_1 mit jeder der Tangenten $a, b, c, \ldots$ ein Dreieck und alle diese Dreiecke haben $\angle\, tt_1$ gemein. Folglich ist $\angle\, CAA_1 + \angle\, C_1A_1A = \angle\, CBB_1 + \angle\, C_1B_1B$, oder wenn man alle Winkel der Gleichung halbiert: $\angle\, MAA_1 + \angle\, MA_1A = \angle\, MBB_1 + \angle\, MB_1B$, was die Relation $\angle\, AMA_1 = \angle\, BMB_1$ nach sich zieht. Durch Drehung um diesen Winkel gehen MA und MB in MA_1 und MB_1 über. Man zeigt ebenso einfach, daß $\angle\, CMC_1 = 2\,R - \angle\, AMA_1$ ist; $\angle\, CMC_1$ ist aber in entgegengesetztem Sinne gerechnet wie $\angle\, AMA_1$.

Dreht man also MC in gleichem Sinne und um den gleichen Winkel, wie bei der Drehung von MA nach MA_1, so fällt die gedrehte Gerade mit der verlängerten Geraden MC_1 zusammen, w. z. b. w.

Nach 263 erkennen wir unmittelbar die Richtigkeit des Satzes: Zieht man an einen Kegelschnitt irgend welche Tangenten $a, b, c, d, \ldots$, so schneiden sie auf zwei beliebig gewählten Tangenten t und t_1 desselben projektive Punktreihen aus. Auch hier ist zu bemerken, daß die Umkehrung noch später zu beweisen ist.

266. Die weiteren Sätze beziehen sich auf Polygone, die einem Kreise oder Kegelschnitt ein- oder umgeschrieben sind. An erster Stelle wollen wir hier den Satz ableiten, auf den sich weiterhin einerseits die Theorie von Pol und Polare und andererseits die doppelte Erzeugungsweise der Kegelschnitte stützen soll. Die erstere findet sich im folgenden Abschnitt eingehender entwickelt und ist schon in 238 auf anderer Basis kurz besprochen worden; der letzteren ist der übernächste Abschnitt gewidmet.

Schreibt man einem Kreise oder Kegelschnitt ein beliebiges Viereck um, so schneiden sich seine beiden Diagonalen und die beiden Sehnen, welche die Berührungspunkte seiner Gegenseiten verbinden in einem Punkte.

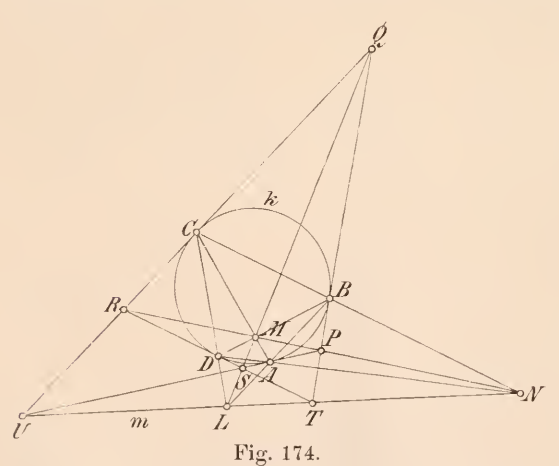


Fig. 174.

Es seien PQ, QR, RS, SP die Seiten des Vierecks und B, C, D, A die zugehörigen Berührungspunkte (Fig. 174). Bezeichnen wir nun mit $C\,(QBAD)$ einen Strahlbüschel, dessen Scheitel C ist und dessen Strahlen durch Q, B, A, D gezogen sind, so erkennen wir, daß die beiden Strahlbüschel $C(QBAD)$ und $B(CQAD)$ in der Figur kongruent sind. Falls jedoch an Stelle des Kreises k ein Kegelschnitt tritt, werden die bezüglichen Strahlbüschel nur noch projektiv sein (264) und nur diese Eigenschaft benutzen wir für den Beweis unseres Satzes. Nach 190 sind auch die Strahlbüschel $C\,(QBAD)$ und $B\,(QCDA)$ projektiv, und da der beiden gemeinsame Strahl CB sich selbst entspricht, sind sie auch perspektiv. Somit liegen die

Punkte Q, $M = CA \times BD$ und $L = CD \times BA$ in gerader Linie. Ganz ebenso sind die Strahlbüschel $D\,(SABC)$ und $A\,(SDCB)$ projektiv und die Punkte S, M und L liegen auf einer Geraden. Es gehören also die vier Punkte Q, S, M, L der nämlichen Geraden an; ferner befinden sich die vier Punkte P, R, M und $N = CB \times DA$ auf einer zweiten Geraden, und die Punkte L, N, $U = SP \times QR$ und $T = PQ \times RS$ auf einer dritten, wie man ganz analog beweist. Hiermit ist aber nicht nur der obige Satz erwiesen, sondern zugleich der folgende allgemeinere Satz: Schreibt man einem Kegelschnitt in den nämlichen vier willkürlich gewählten Punkten ein vollständiges Viereck ein und ein Vierseit um, so verbinden die Diagonalen des letzteren die Diagonalpunkte des ersteren. (Die Seiten des Vierseits berühren den Kegelschnitt in den Ecken des Vierecks.)

267. Da der vorstehende Satz, wie wir noch sehen werden, von fundamentaler Bedeutung für die ganze Theorie der Kegelschnitte ist, so mag hier für den Fall des Kreises noch ein Beweis stehen, der auf der Anwendung ganz einfacher planimetrischer Sätze beruht. Gilt der Satz aber für den Kreis, dann gilt er selbstverständlich auch für sein perspektives Bild, den Kegelschnitt.

Es seien wieder PQ, QR, RS, SP die Seiten des umgeschriebenen Vierecks und B, C, D, A die zugehörigen Berührungspunkte (Fig. 175). Schneiden sich dann CA und QS in M, so hat man: $MQ : MS = QC : SA$. Liegt nämlich G auf AC und ist $QG \parallel AS$, so ist: $MQ : MS = QG : SA$; zugleich ist $QG = QC$, denn die Winkel bei G und C sind beide gleich dem Winkel bei A. Schneiden sich weiter BD und QS in M', so erhält man analog: $M'Q : M'S = QB : SD$. Nun ist $QB = QC$ und $SD = SA$, also auch: $M'Q : M'S = MQ : MS$; dies hat aber das Zusammenfallen von M' und M zur Folge, da zwei verschiedene Punkte auf einer Strecke nicht das gleiche Abstandsverhältnis besitzen können. Somit geht QS durch den Schnittpunkt von AC und BD. Die gleiche Beweisführung zeigt, daß auch PR durch diesen Schnittpunkt hindurchgeht, so daß sich die vier Geraden AC, BD, PR und QS in dem Punkte M schneiden.

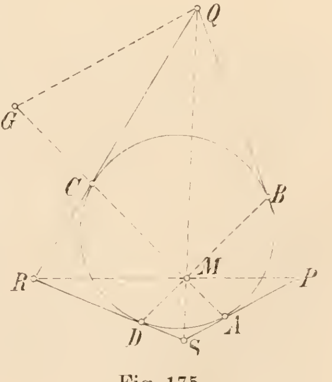


Fig. 175.

Indem wir von dem umgeschriebenen Viereck $PQRS$ ausgingen, zeigten wir soeben, daß die vier Geraden AC, BD, PR und QS sich

in einem Punkte M schneiden (Fig. 174). Legen wir das Viereck $STQU$ zu Grunde, so sind QS und UT seine Diagonalen, während seine zwei Paar Gegenseiten in D und C, resp. B und A berühren. Ganz in der gleichen Weise wie vorher findet man, daß sich jetzt die vier Geraden QS, UT, CD und BA in einem Punkte L schneiden. Endlich folgern wir aus dem umgeschriebenen Viereck $RTPU$, daß die vier Geraden PR, UT, DA und CB einen Punkt N gemein haben, womit unser Satz abermals bewiesen ist.

268. Die Gegenseiten eines einem Kreise oder Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks schneiden sich in den Punkten einer Geraden. Dieser Satz heißt der Pascal'sche Satz und die Gerade die zu dem Sechseck gehörige Pascal'sche Gerade.[9])

Es seien $P = 12 \times 45$, $Q = 23 \times 56$ und $R = 34 \times 61$ die Schnittpunkte der Gegenseiten und überdies $S = 34 \times 56$, $T = 45 \times 61$ (Fig. 176). Die aus den Punkten 1 und 3 als Scheitel nach 2, 4, 5, 6 gezogenen Strahlen bilden entweder kongruente oder projektive Büschel, je nachdem das Sechseck 123456 einem Kreise oder einem Kegelschnitte einbeschrieben ist.

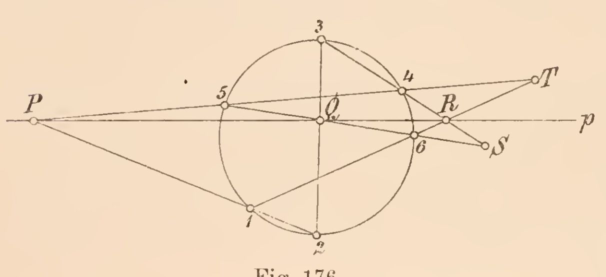


Fig. 176.

Die Schnittpunkte des ersten Büschels mit der Geraden 45 sind der Reihe nach: P, 4, 5, T, die des zweiten mit der Geraden 56 aber: Q, S, 5, 6. Diese Punktreihen sind projektiv als Schnitte projektiver Büschel und, da sie den Punkt 5 entsprechend gemein haben in perspektiver Lage, d. h. die Verbindungslinien $p = PQ$, $4S$ (oder 34), $T6$ (oder 61) schneiden sich in einem Punkte R, w. z. b. w.

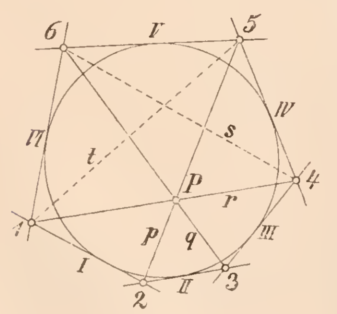


Fig. 177.

269. Die Verbindungslinien der Gegenecken eines einem Kreise oder Kegelschnitte umgeschriebenen Sechsseits schneiden sich in einem Punkte. Dieser Satz rührt von Brianchon her und der zu dem Sechsseit gehörige Punkt wird sein Brianchon'scher Punkt genannt.[10])

Es seien I, II, III, IV, V, VI die Seiten, $p = 25$, $q = 36$, $r = 14$ die Verbindungslinien der Gegenecken und $s = 46$, $t = 51$ (Fig. 177). Die auf den Tangenten I und III von den Tangenten II, IV, V, VI ausgeschnittenen Punkte bilden nach 265 zwei projektive Punktreihen. Die Punkte der ersten Reihe werden aus dem Centrum 5 durch die Strahlen p, IV, V, t, die Punkte der zweiten Reihe aus dem Centrum 6 durch die Strahlen q, s, V, VI projiziert. Diese Strahlbüschel sind folglich projektiv und, da sie den Strahl V entsprechend gemein haben, in perspektiver Lage, d. h. die Schnittpunkte

$$P = p \times q, \text{ IV} \times s \text{ (oder 4)}, t \times \text{VI (oder 1)}$$

liegen auf einer Geraden r, w. z. b. w.

270. Die Sätze von Pascal und Brianchon lassen eine Reihe von Spezialisierungen zu, die wir hier erwähnen müssen. Läßt man bei dem eingeschriebenen Sechseck 1 2 3 4 5 6 die beiden Ecken 5 und 6 sich mehr und mehr nähern, bis sie zusammenfallen, dann wird die Seite 5 6 zur Tangente t im Punkt $5 = 6$. Aus dem Pascal'schen Satze folgt alsdann, daß die Punkte: $12 \times 45 = P$, $23 \times t = S$ und $34 \times 51 = R$ in gerader Linie liegen (Fig. 178). Teilt man die fünf Seiten eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Fünfecks beliebig in zwei Paare und eine einzelne Seite, doch so daß jedes Paar vier Ecken enthält, dann liegen die Schnittpunkte der beiden Paare in gerader Linie mit dem Schnittpunkt der letzten Seite und der Tangente in der gegenüberliegenden Ecke.

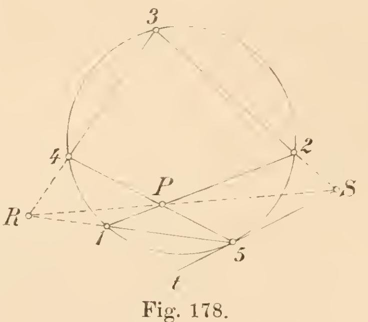


Fig. 178.

271. Auch der in 266 aufgestellte Satz ist als spezieller Fall des Pascal'schen Satzes anzusehen (Fig. 174). Lassen wir nämlich in dem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseck AA_1BCC_1D die Ecke A_1 mit A und die Ecke C_1 mit C zusammenrücken, so entsteht das eingeschriebene Viereck $ABCD$ mit den beiden Tangenten in A und C; folglich liegen die Punkte $AB \times CD = L$, $BC \times DA = N$ und U als Schnittpunkt der beiden Tangenten in A und C auf einer Geraden. Das Sechseck ABB_1CDD_1, bei welchem einerseits B_1 und B und andererseits D_1 und D unendlich nahe liegen, liefert bei Anwendung des Pascal'schen Satzes das Resultat, daß $AB \times CD = L$, $BC \times DA = N$ und T als Schnittpunkt der Tangenten in B und D auf einer Geraden liegen.

Geht man dagegen von dem Viereck $ACBD$ aus, so lehren die gleichen Schlüsse, daß die Punkte $AC \times BD = M$, $CB \times AD = N$ sowohl mit dem Schnittpunkt P der beiden Tangenten in A und B, als auch mit dem Schnittpunkt der beiden Tangenten in C und D auf einer Geraden sich befinden. Das Viereck $ACDB$ endlich führt zu den vier in gerader Linie liegenden Punkten M, L, Q, S.

272. Wenn endlich in dem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck $AA_1BB_1CC_1$ die Ecken A_1, B_1, C_1 bezüglich mit den Ecken A, B, C zusammenfallen, so entsteht ein eingeschriebenes Dreieck ABC mit den Tangenten in seinen Ecken (Fig. 179). Die Anwendung des Pascal'schen Satzes liefert sofort das Resultat: Schreibt man einem Kegelschnitt ein Dreieck ein und in den nämlichen Punkten ein zweites Dreieck um, so werden die Seiten des ersteren von den in den gegenüberliegenden Ecken tangierenden Seiten des letzteren in drei Punkten einer Geraden geschnitten. In der Figur sind J, K und L Punkte einer Geraden.

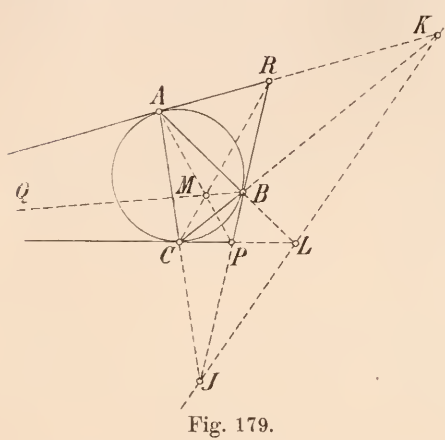


Fig. 179.

273. Läßt man die Berührungspunkte zweier Kreis- oder Kegelschnittstangenten sich einander immer mehr nähern, so wird der Winkel der Tangenten immer spitzer und der Abstand ihres Schnittpunktes von ihren Berührungspunkten immer kleiner. Fallen schließlich die Berührungspunkte zusammen, so fallen auch die zugehörigen Tangenten zusammen und ihr Schnittpunkt geht dabei in den Berührungspunkt über. Fallen also bei dem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Sechsseit I II III IV V VI die Seiten V und VI zusammen und ist B der Berührungspunkt der Seite V = VI, so schneiden sich die Verbindungslinien von I × II mit IV × V, von II × III mit B und von III × IV mit V × I in einem Punkte P (Fig. 180).

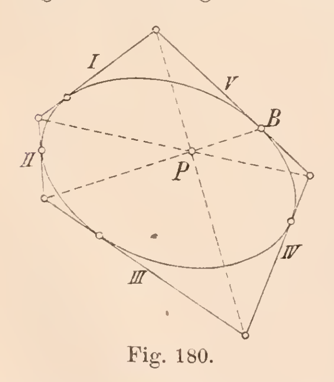


Fig. 180.

Auch aus dem Brianchon'schen Satze kann man den Satz in

266 durch Spezialisierung ableiten. Läßt man von dem umgeschriebenen Sechsseit die erste Seite mit der zweiten und ebenso die vierte mit der fünften zusammenfallen, so erhält man ein umgeschriebenes Vierseit, und der Brianchon'sche Satz sagt aus, daß sich bei diesem die beiden Diagonalen und die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier Gegenseiten in einem Punkte schneiden. Durch mehrmalige Anwendung ergeben sich wieder die Eigenschaften der Fig. 174.

Sind endlich bei dem umgeschriebenen Sechsseit die erste und zweite, die dritte und vierte, die fünfte und sechste Seite zusammengerückt, so wird aus demselben ein umgeschriebenes Dreiseit und aus seinen sechs Ecken gehen die Ecken und Berührungspunkte des Dreiseits hervor. In Fig. 179 sind dies der Reihe nach die Punkte $ARBPCQ$, so daß sich AP, BQ und CR in einem Punkte M schneiden. Schreibt man einem Kegelschnitt ein Dreiseit um, so schneiden sich die Verbindungslinien seiner Ecken mit den Berührungspunkten seiner Gegenseiten in einem Punkte.

274. Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß die Sätze von Pascal und Brianchon und die daraus abgeleiteten Sätze beim Kreise für besondere Lagen der Punkte oder Tangenten unmittelbar einleuchtend sind, und daß daraus auch die Richtigkeit der Sätze bei allgemeiner Lage geschlossen werden kann. Schreibt man z. B. dem Kreise ein gleichseitiges Dreieck um, so gehen die Verbindungslinien seiner Ecken mit den Berührungspunkten (Mittelpunkten) der gegenüberliegenden Seiten durch den Kreismittelpunkt. Nach 255 kann aber der Kreis so in einen andern Kreis perspektiv abgebildet werden, daß die Berührungspunkte des gleichseitigen Dreiecks in drei beliebige Punkte des zweiten Kreises übergehen. Damit gilt dann der Satz für jedes einem Kreise umgeschriebene Dreiseit.

Ferner kann nach 253 ein Kreis so in einen andern Kreis abgebildet werden, daß dabei das Bild einer vorgegebenen Geraden — die allerdings den Kreis nicht schneiden darf — ins Unendliche rückt. Dadurch geht z. B. die Fig. 174 in die Fig. 181 über, wenn dabei das Bild von $m = NL$ un-

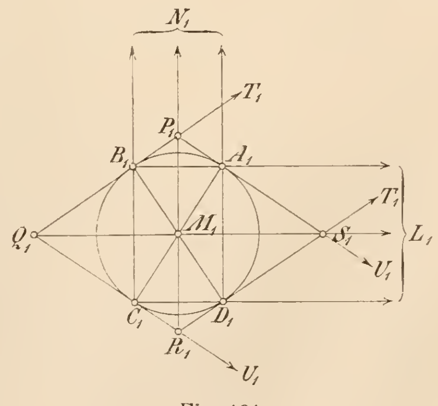


Fig. 181.

endlich fern wird. Das eingeschriebene Viereck wird hier zum Rechteck und die Wahrheit des Satzes in 266 ist in die Augen springend.

Auch das einem Kreise um- oder einbeschriebene Sechseck kann man durch Perspektive in besondere Formen bringen, für welche die angeführten Sätze sich leicht erweisen lassen, doch soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

Pol und Polare eines Kegelschnittes; Mittelpunkt, Durchmesser und Achsen.

275. In 238 wurden die Haupteigenschaften von Pol und Polare abgeleitet, indem wir sie als Centrum und Achse einer ebenen Perspektive ansahen, die den Kreis in sich selbst abbildet. Hier sollen diese Eigenschaften nochmals nachgewiesen werden und zwar gestützt auf den Satz vom Viereck und Vierseit, die einem Kegelschnitt in den nämlichen vier Punkten ein- und umgeschrieben

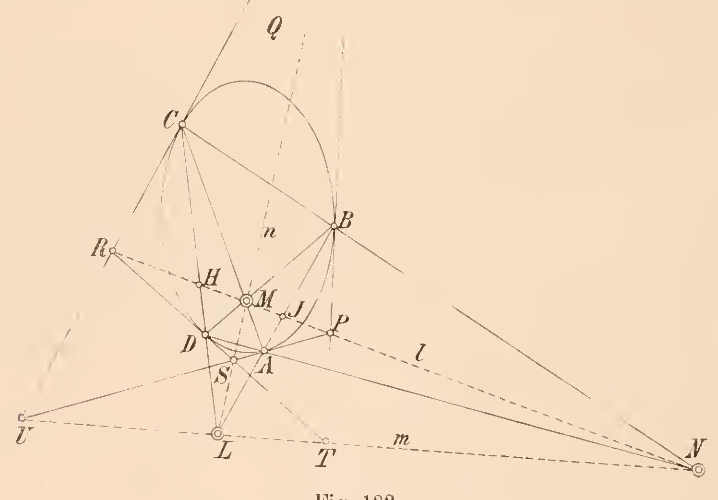


Fig. 182.

sind. In Fig. 182 sind $ABCD$ die vier Punkte auf dem Kegelschnitt. PR, QS und TU sind die drei Diagonalen des umgeschriebenen Vierseits; sie bilden ein Dreieck, dessen Ecken L, M und N zugleich die Diagonalpunkte des eingeschriebenen Vierecks sind. Nach 203 werden auf jeder Seite eines vollständigen Vierecks die beiden Ecken durch einen Diagonalpunkt und den Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der beiden andern harmonisch getrennt. So teilen L und $J = AB \times MN$ die Sehne AB, ferner L und $H = CD \times MN$ die Sehne CD harmonisch.

Auf der Geraden MN liegen noch die vier weiteren Punkte P,

R, H, J. Durch zwei von ihnen, etwa P und J, ist diese Gerade bestimmt. Die Wahl des Punktes L und der Sehne AB durch L genügt aber, um P als Schnitt der Tangenten in A und B, sowie J als vierten harmonischen Punkt zu AB und L zu konstruieren. Hält man also den Punkt L und die eine Sehne durch ihn, nämlich AB, fest, während man die andere Sehne CD sich um L drehen läßt, so bewegen sich zwar auch die Punkte H, R, M und N auf der Geraden PJ, die Lage der Geraden selbst aber bleibt ungeändert. Hält man dagegen die Sehne CD fest und läßt die Sehne AB sich um L drehen, so bleiben R und H fest und damit wiederum die Lage der Geraden.

Demnach kann man beide Sehnen nacheinander Drehungen um L ausführen lassen, was auch eine Bewegung der sechs Punkte M, N, P, R, H, J nach sich zieht, ohne daß der Träger dieser Punkte seine Lage verändert. Das will aber doch sagen, daß die Gerade MN nur von der Wahl des Punktes L, nicht aber von der Wahl der durch L gezogenen Sehnen abhängt. Aus der Figur können wir nun unmittelbar die schon früher aufgezählten Eigenschaften von Pol und Polare hinsichtlich des Punktes L und der Geraden l ablesen.

α) Je zwei beliebige Sehnen durch den Pol besitzen vier Endpunkte, deren vier Verbindungslinien sich zweimal zu zwei auf der Polare schneiden (woraus ihre Konstruktion folgt).

β) Jede Sehne durch den Pol bestimmt in ihren Endpunkten zwei Tangenten, die sich auf der Polare schneiden.

γ) Jede Sehne durch den Pol wird von diesem und seiner Polare harmonisch geteilt.

δ) Die Tangenten aus dem Pol — falls es solche giebt — haben ihre Berührungspunkte auf der Polare. Eine aus L an den Kegelschnitt gezogene Tangente ist nämlich als unendlich kleine Sehne aufzufassen, und da L außerhalb der Sehne liegt, muß der vierte harmonische Punkt auf ihr liegen, d. h. er fällt mit dem Berührungspunkt der Tangente zusammen.

276. Die Fig. 182 läßt uns erkennen, daß nicht nur MN die Polare von L ist, sondern daß auch LM die Polare von N und LN die Polare von M ist. Denn BC und AD sind zwei Sehnen durch N; deshalb schneiden sich die vier Verbindungslinien ihrer Endpunkte paarweise auf der Polare von N, nämlich BD und AC in M und AB und CD in L. Das Dreieck LMN hat die besondere Eigenschaft, daß jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke ist. Ein solches Dreieck nennt man ein Polardreieck des Kegelschnittes.

Der Anblick unserer Figur lehrt uns sofort die beiden Sätze: Die Diagonalpunkte eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen vollständigen Vierecks $ABCD$ bilden die Ecken eines Polardreiecks. Die Diagonalen eines dem Kegelschnitte umschriebenen Vierseits $PQRS$ bilden die Seiten eines Polardreiecks.

277. Der wichtigste Satz der Polarentheorie lautet nun: Geht die Polare eines Punktes L durch einen Punkt N, so geht auch umgekehrt die Polare von N durch den Punkt L. Zieht man nämlich durch N eine beliebige Sehne BC (Fig. 182) und verbindet ihre Endpunkte B und C mit L, so schneiden diese den Kegelschnitt noch je in einem Punkte A resp. D. AB und CD sind aber zwei Sehnen durch L; die vier Verbindungslinien ihrer Endpunkte schneiden sich somit paarweise in zwei Punkten der Polare von L. So wird BC von AD in einem Punkte der genannten Polare getroffen; dies kann jedoch nur der Punkt N sein, da nach der Voraussetzung N ein Punkt dieser Polare ist. Nun gehen BC und AD durch N, folglich liegt $L = AB \times CD$ auf der Polare n von N. Zwei Punkte, von denen jeder auf der Polare des andern liegt, heißen harmonische oder konjugierte Pole in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt. Die Beziehung zwischen beiden ist wechselseitig, und falls ihre Verbindungslinie den Kegelschnitt schneidet, liegen sie zu diesen Schnittpunkten harmonisch. Das folgt unmittelbar aus den Eigenschaften von Pol und Polare.

278. Die soeben gewonnenen Resultate kann man noch in anderer Form aussprechen. Bewegt sich ein Punkt L auf einer Geraden n, so dreht sich seine Polare l um den Pol N dieser Geraden und umgekehrt. Da nämlich hierbei L stets auf n liegt, oder mit anderen Worten die Polare n von N stets durch L geht, so muß auch die Polare l von L stets durch N gehen, w. z. b. w.

Hieraus ergiebt sich auch die Konstruktion des Poles L einer Geraden l. Man nehme dazu auf l zwei beliebige Punkte J und K an und bestimme ihre Polaren i und k nach 275α. Der Punkt $i \times k$ ist dann der Pol von l, denn die Polare eines jeden Punktes von l geht ja durch den zu l gehörigen Pol L.

279. Liegt der Pol einer Geraden l auf einer Geraden n, so liegt auch umgekehrt der Pol von n auf der Geraden l. Denn ist L der Pol von l und N der Pol von n, so liegt L nach der Voraussetzung auf n. Da somit die Polare von N durch L geht, muß nach dem Satze in 277 auch die Polare von L, also l

durch N gehen. Zwei Gerade, von denen jede durch den Pol der andern geht, heißen harmonische oder konjugierte Polaren in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt.

Kann man vom Schnittpunkt zweier konjugierter Polaren Tangenten an den gegebenen Kegelschnitt legen, so teilen sie den Winkel dieser Tangenten harmonisch. Sind l und m die konjugierten Polaren, L auf m und M auf l die zugehörigen Pole, so ist LM die Polare von $N = l \times m$ nach der vorigen Nummer (Fig. 183). Die Berührungspunkte T_1 und T_2 der von N an den Kegelschnitt gelegten Tangenten t_1 und t_2 liegen auf der Polare von N, d. h. auf LM. L und M sind aber konjugierte Pole und teilen deshalb die Sehne T_1T_2 harmonisch, und somit teilen auch l und m den Winkel der Tangenten t_1 und t_2 harmonisch.

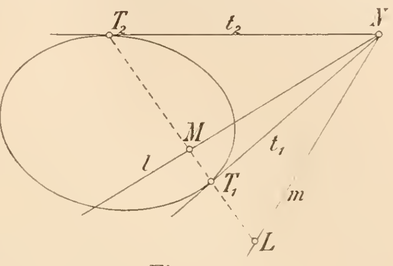


Fig. 183.

280. Nach dem Vorausgehenden gelten offenbar auch die Sätze: Die harmonischen Pole zu einem gegebenen Pole P in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen auf einer Geraden p, der Polare von P. Die harmonischen Polaren zu einer gegebenen Polare p in Bezug auf einen Kegelschnitt gehen durch einen Punkt P, den Pol von p. Ferner ist klar: Berührt die Polare den Kegelschnitt, so ist ihr Pol der Berührungspunkt, und umgekehrt. In Fig. 183 teilen M und L die Sehne T_1T_2 harmonisch. Nähert sich nun L dem Punkt T_1, so nähert sich auch M diesem Punkt, und rückt L in T_1 hinein, so thut dies auch M. Es ist aber M der Pol von LN; rückt also der Pol auf den Kegelschnitt, so wird seine Polare zur Tangente in ihm.

Ein Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes heißt äußerer oder innerer Punkt, je nachdem seine Polare denselben schneidet oder nicht (vergl. 259).

281. Der in 278 aufgestellte Satz kann noch in folgender Weise erweitert werden: Beschreibt ein Punkt eine Punktreihe, so beschreibt die ihm in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zugehörige Polare einen Strahlbüschel, der projektiv zur Punktreihe ist und umgekehrt. Bewegt sich der Punkt L auf einer Geraden m, so dreht sich seine Polare l um den Pol M von m. Die Konstruktion der Polare des Punktes L

in seinen verschiedenen Lagen, die wir mit L, L_1, L_2, ... bezeichnen, führen wir folgendermaßen aus (Fig. 184). Durch M legen wir irgend eine Sehne AC, die wir für alle Konstruktionen festhalten. Die Geraden LA und LC schneiden den Kegelschnitt noch in je einem Punkte D resp. B. Nach 275 a liegen dann die Punkte $AC \times BD$ und $AB \times CD$ auf der Polare l von L. Da aber l durch den Punkt M von AC geht, so schneiden sich AC und BD in M, während sich AB und CD in einem Punkte N der Geraden m schneiden müssen (man konstruiert ja geradezu die Polare m von M als Verbindungslinie der Punkte $AB \times CD = N$ und $AD \times BC = L$). Ganz ebenso verbindet die Polare l_1 des Punktes L_1 die Punkte M und $N_1 = AB_1 \times CD_1$, wobei M als Schnittpunkt der Sehnen AC und B_1D_1 erscheint. Wir können uns noch weitere Polaren konstruiert denken, dabei wird allgemein die Polare von L_i als Verbindungslinie der Punkte M und $N_i = AB_i \times CD_i$ erhalten. Auf der Geraden m befinden sich nun zwei projektive Punktreihen $(L, L_1, L_2, \ldots)$ und $(N, N_1, N_2, \ldots)$. Denn zieht man von C aus Strahlen nach den Punkten der ersten Reihe und von A aus Strahlen nach denen der zweiten, so erhält man zwei Strahlbüschel, deren Scheitel auf dem Kegelschnitt liegen und deren entsprechende Strahlen sich in Punkten B, B_1, B_2, ... desselben schneiden. Solche Büschel sind aber nach 264 projektiv. Aus der Projektivität der Reihen können wir sofort schließen, daß auch die Punktreihe $(L, L_1, L_2, \ldots)$ und der Strahlbüschel $M(N, N_1, N_2, \ldots)$ projektiv sind, w. z. b. w.

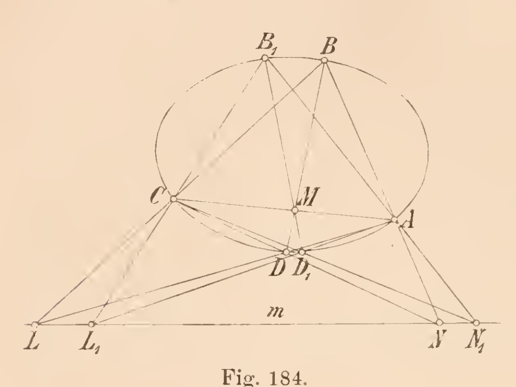


Fig. 184.

282. Die beiden Punktreihen $(L, L_1, L_2, \ldots)$ und $(N, N_1, N_2, \ldots)$ sind indessen nicht nur projektiv, sondern sogar involutorisch. Um dies zu beweisen, haben wir nach 220 nur zu zeigen, daß dem Punkte N als einem Punkt der ersten Reihe in der zweiten Reihe wiederum der Punkt L entspricht. Von einem Punkte L_i der ersten Reihe gelangt man aber zu dem entsprechenden N_i in der zweiten, indem man L_i mit C verbindet, diese Gerade mit dem Kegelschnitt in B_i schneidet; dann liegt N_i auf der Verbindungslinie von B_i mit A. Fällt L_i mit N zusammen, so rückt

B_i nach D und DA schneidet auf m den entsprechenden Punkt N_i aus, der sich also mit L deckt. Die Punktepaare LN, L_1N_1, L_2N_2, ... sind harmonische Pole in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt. Das giebt den Satz: Auf einer jeden Geraden bilden die Paare harmonischer Pole eine Involution. Schneidet die Gerade den Kegelschnitt, so sind ihre Schnittpunkte die Doppelpunkte der Involution. Das letztere ist ohne weiteres klar, da diese Schnittpunkte zu jedem Paar harmonischer Pole harmonisch liegen (223).

Betrachtet man in Fig. 184 die harmonischen Polaren durch den Punkt M, so erkennt man sofort, daß sie involutorische Strahlbüschel bilden, da sie die Gerade m in den Punktepaaren LN, L_1N_1, L_2N_2 ... einer Involution schneiden. Alle durch einen Punkt gehenden Geraden ordnen sich in Bezug auf einen Kegelschnitt in Paare harmonischer Polaren zusammen und diese bilden eine Involution. Kann man von dem Punkt aus Tangenten an denselben legen, so sind sie die Doppelstrahlen der Involution.

283. Aus der Fig. 184 können wir noch weitere Schlüsse ziehen. Indem wir von den einzelnen Punkten des Kegelschnittes aus Strahlenpaare nach den festen Punkten A und C ziehen, schneiden diese auf der Geraden m die Punktepaare einer Involution aus, welche harmonische Pole bilden. Dabei ist nur die Voraussetzung gemacht, daß AC durch den Pol M von m geht, daß also m und AC harmonische Polaren sind. Die Verbindungslinien beliebiger Punkte B, B_1, ... eines Kegelschnittes mit zwei festen Punkten A und C desselben schneiden jede Gerade m, die harmonische Polare zu AC ist, in harmonischen Polen L und N, L_1 und N_1, ...

284. Die Resultate der letzten Nummern haben wir aus der Fig. 184 mit Hilfe des eingeschriebenen Vierecks abgeleitet. Wir können sie aber auch aus den Eigenschaften des umgeschriebenen Vierseits gewinnen (Fig. 185). Lassen wir hier den Punkt M und somit auch seine Polare m ungeändert und halten ferner den Punkt U und die durch ihn gehenden Seiten a und c des Vierseits fest, während wir dem Punkte T verschiedene Lagen T, T_1, T_2, ... auf m erteilen. Dann nehmen auch die Seiten b und d des Vierseits verschiedene Lagen an und ebenso seine Diagonalen $l = PR$ und $n = QS$. Doch gehen diese letzteren in allen ihren Lagen l und n, l_1 und n_1, l_2 und n_2 ... durch den Punkt M und bilden harmonische Polaren. Man erhält je zwei harmonische Polaren durch M dadurch,

daß man die festen Tangenten a und c mit einer beliebigen weiteren Tangente, etwa b, schneidet und die Schnittpunkte P und Q mit M verbindet. Da verschiedene Tangenten $b, b_1, b_2, \ldots$ auf a und c projektive Reihen $P, P_1, P_2, \ldots$ und $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ ausschneiden, so sind auch die Strahlbüschel $M(P, P_1, P_2, \ldots)$ und $M(Q, Q_1, Q_2 \ldots)$

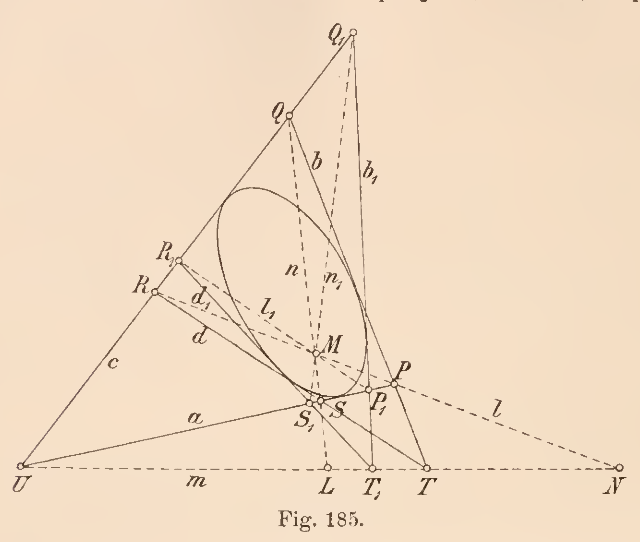


Fig. 185.

projektiv und sogar involutorisch. Denn dem Punkt S der ersten Reihe entspricht der Punkt R der zweiten; die Strahlen $MP = MR$ und $MQ = MS$ entsprechen sich also vertauschbar. Hiermit sind aber die Sätze in 281 und 282 aufs neue bewiesen. Auch erkennen wir aus diesen Darlegungen den Satz: Die Schnittpunkte beliebiger Tangenten eines Kegelschnittes mit zwei festen Tangenten a und c desselben liefern mit irgend einem Punkt M, der harmonischer Pol zu $U = a \times c$ ist, verbunden harmonische Polaren l und n, l_1 und $n_1, \ldots$

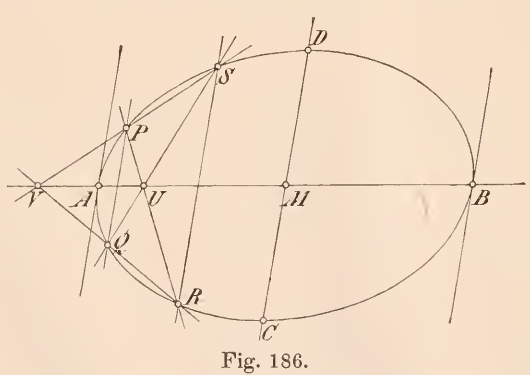


Fig. 186.

285. Der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt auf jeder Sehne eines Kegelschnittes sind harmonische Pole. Hieraus folgt:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines Kegelschnittes liegen auf einer Geraden, der Polare ihres unendlich fernen Punktes (ihrer Richtung); dieselbe heißt ein Durchmesser des Kegelschnittes.

Der Durchmesser enthält die Pole aller der gedachten Sehnen, insbesondere also die Berührungspunkte der zu ihnen parallelen Tangenten des Kegelschnittes (Figg. 186, 187, 188).

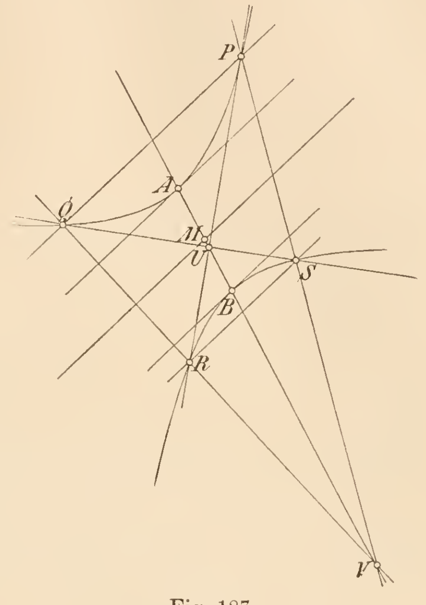


Fig. 187.

Liegt die Kurve gezeichnet vor, so wird ein Durchmesser AB mit Hilfe zweier paralleler Sehnen PQ und RS konstruiert, indem man ihre Endpunkte wechselseitig verbindet und den Durchmesser durch die Punkte $U = PR \times QS$ und $V = PS \times QR$ legt.

286. Alle Durchmesser eines Kegelschnittes gehen als Polaren unendlich ferner Punkte durch den Pol der unendlich fernen Geraden; dieser heißt Mittelpunkt des Kegelschnittes. Man übersieht diese Verhältnisse am besten, wenn man sich vom Kegelschnitt zum Kreise, dessen perspektives Bild er darstellt, zurückwendet. Der Verschwindungslinie und ihrem Pol in Bezug auf den Kreis entsprechen in der Bildfigur die unendlich ferne Gerade und der Mittelpunkt des Kegelschnittes, der den Pol der unendlich fernen Geraden bezüglich des Kegelschnittes bildet.

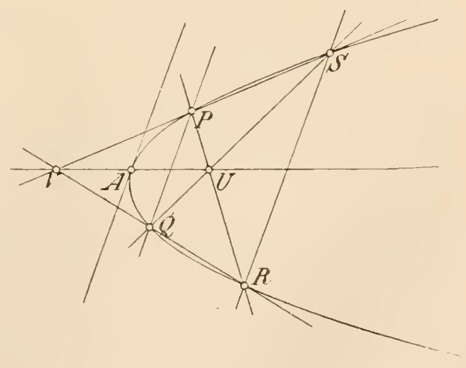


Fig. 188.

Der Mittelpunkt der Ellipse liegt in ihrem Innern, weil sie von der unendlich fernen Geraden nicht getroffen wird.

Für die Hyperbel ist der Mittelpunkt ein äußerer Punkt, denn es giebt von ihm aus zwei Tangenten. Ihre Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der Hyperbel mit der Polare des Mittelpunktes, d. h. mit der unendlich fernen Geraden. Die Hyperbel besitzt ja zwei unendlich ferne Punkte und die Tangenten in diesen Punkten, die Asymptoten, schneiden sich im Mittelpunkte (vergl. 261).

Der Mittelpunkt der Parabel fällt mit ihrem unendlich fernen Punkte zusammen, weil dieser als Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden zugleich deren Pol ist. Man erkennt dies auch sofort daraus, daß die Parabel als perspektives Bild eines Kreises erhalten wird, wenn die Verschwindungslinie den Kreis berührt; der Pol der Verschwindungslinie bezüglich des Kreises ist dann eben ihr Berührungspunkt. Die Parabeldurchmesser sind sämtlich nach dem unendlich fernen Punkt der Parabel gerichtet, also unter sich parallel. Bei der Parabel sagt man auch, sie habe keinen Mittelpunkt, da er ja nicht mehr im Endlichen liegt und also die Durchmesser nicht mehr halbiert (vergl. 287).

287. Ein Durchmesser schneidet entweder den Kegelschnitt und wird dann durch die Schnittpunkte begrenzt (reeller Durchmesser), oder er trifft den Kegelschnitt nicht und ist unbegrenzt (imaginärer Durchmesser). Im ersten Falle ist sein unendlich ferner Pol ein äußerer, im zweiten ein innerer Punkt des Kegelschnittes (vergl. 280).

Die Durchmesser der Ellipse sind sämtlich begrenzt, weil die unendlich fernen Punkte ihrer Ebene alle außerhalb der Kurve liegen.

Unter den Durchmessern der Hyperbel giebt es begrenzte und unbegrenzte, weil die Punkte der unendlich fernen Geraden durch die unendlich fernen Punkte der Hyperbel in äußere und innere Punkte geschieden werden. Zwischen beiden Arten von Durchmessern bilden die Asymptoten den Übergang.

Bei der Ellipse und Hyperbel werden die begrenzten Durchmesser vom Mittelpunkt der Kurve halbiert; denn die Endpunkte eines jeden Durchmessers werden vom Mittelpunkt und seiner Polare, der unendlich fernen Geraden, harmonisch geteilt.

Die Durchmesser der Parabel sind einerseits durch einen Punkt im Endlichen begrenzt und erstrecken sich andererseits bis zu ihrem unendlich fernen Punkte.

Alle hier erwähnten Eigenschaften ergeben sich auch aus den Polareigenschaften des Kreises durch perspektive Abbildung.

288. Zwei Durchmesser eines Kegelschnittes heißen konjugiert, wenn jeder den unendlich fernen Pol des andern

enthält. Jedes Paar konjugierter Durchmesser bildet mit der unendlich fernen Geraden zusammen ein Polardreieck, dessen eine Ecke im Mittelpunkt des Kegelschnittes liegt. Bei der Centralprojektion des Kreises gehen nämlich alle Polardreiecke, deren eine Seite mit der Verschwindungslinie und deren eine Ecke mit ihrem Pol zusammenfällt, in die vorher erwähnten Polardreiecke des Kegelschnittes über. Es folgen hieraus noch weiter die Sätze: Von zwei konjugierten Durchmessern halbiert jeder die zum andern parallelen Sehnen. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind zum konjugierten Durchmesser parallel. Konjugierte Durchmesser eines Kreises sind zu einander rechtwinklig.

289. Zu irgend einem Durchmesser der Parabel ist als konjugierter stets die unendlich ferne Gerade zu rechnen, so daß man hier eigentlich nicht von konjugierten Durchmessern reden kann. Beim Kreise, dessen Bild die Parabel ist, entsprehen den Parabeldurchmessern alle Kreissehnen, die durch den nämlichen Punkt des Kreises gehen, in dem er von der Verschwindungslinie berührt wird. Zu allen Sehnen durch den nämlichen Punkt eines Kreises ist aber die Tangente in diesem Punkte eine konjugierte Polare; dagegen können zwei derartige Sehnen nicht konjugierte Polaren sein, da nicht eine den Pol der andern enthalten kann.

Jeder Parabeldurchmesser halbiert ein System paralleler Sehnen, zu dem auch die Tangente in seinem Endpunkte parallel ist. Auch die Parabelsehnen, die zu der Richtung aller Durchmesser senkrecht stehen, werden von einem bestimmten Durchmesser halbiert. Die Parabel besitzt eine Symmetrielinie oder Achse, die alle zu ihr normalen Sehnen halbiert. Der Endpunkt der Achse heißt Scheitel, die zugehörige Tangente ist normal zur Achse.

290. Die Paare konjugierter Durchmesser eines Kegelschnittes bilden an seinem Mittelpunkte eine Involution; denn sie sind harmonische Polaren (282, 288).

Bei der Ellipse hat die Involution der konjugierten Durchmesser keine Doppelstrahlen. Dagegen hat diese Involution bei der Hyperbel Doppelstrahlen; es sind die vom Mittelpunkt an die Hyperbel gelegten Tangenten oder Asymptoten (282). Jedes Paar konjugierter Durchmesser der Hyperbel liegt zu ihren Asymptoten harmonisch.

291. Unter den konjugierten Durchmessern einer Ellipse oder Hyperbel giebt es stets zwei zu einander rechtwinklige; sie heißen Achsen und ihre Endpunkte die

Scheitel. Die Achsen sind Symmetrielinien des Kegelschnittes (vergl. 230).

Die Achsen der Ellipse endigen in vier Scheiteln. Die Achsen der Hyperbel halbieren die Winkel zwischen ihren Asymptoten; die eine trägt die beiden Scheitel der Hyperbel, die andere ist unbegrenzt.

Von der Konstruktion der Achsen wird weiterhin noch die Rede sein.

292. Nach Früherem (276) erhält man ein Polardreieck eines Kegelschnittes entweder als Diagonaldreieck eines eingeschriebenen Vierecks, oder als Diagonaldreieck eines umgeschriebenen Vierseits.

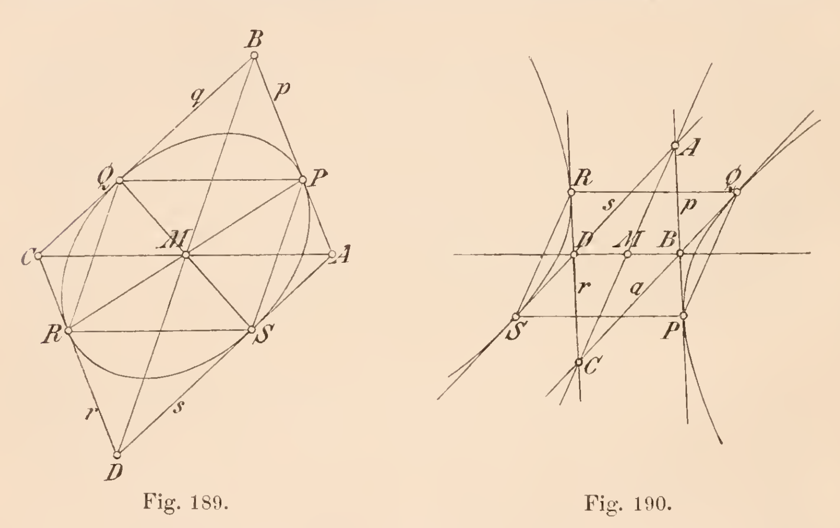


Fig. 189. Fig. 190.

Geht nun das Viereck oder Vierseit in ein Parallelogramm über, so erhält das von ihm abhängige Polardreieck eine unendlich ferne Seite und die beiden andern werden zu konjugierten Durchmessern des Kegelschnittes. Hieraus folgen die Sätze:

Die Diagonalen eines dem Kegelschnitte einbeschriebenen Parallelogrammes schneiden sich im Mittelpunkte; seine Seiten geben die Richtungen konjugierter Durchmesser an. Die Diagonalen eines dem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogrammes sind konjugierte Durchmesser.

In den Figg. 189 und 190 sind diese beiden Sätze veranschaulicht unter der Annahme, daß das umschriebene Parallelogramm *ABCD* den Kegelschnitt in den Ecken des eingeschriebenen Pa-

rallelogrammes $PQRS$ berühre. Es werden dann die Diagonalen AC und BD des ersteren den Seiten des letzteren parallel, wie aus dem Satze in 276 folgt.

Die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlbüschel und Punktreihen.

293. Schon in 264 und 265 wurde gezeigt, daß die Kegelschnitte durch projektive Strahlbüschel und durch projektive Punktreihen erzeugt werden können. Dort wurden zuerst die gleichen Eigenschaften für den Kreis nachgewiesen und dann auf die Kegelschnitte, als Bilder des Kreises, übertragen. Hier nun sollen die projektiven Strahlbüschel und Punktreihen den Ausgangspunkt bilden, und wir wollen die Kurven studieren, die durch solche Strahlbüschel und Punktreihen erzeugt werden können. Dabei werden wir von den seither gewonnenen Resultaten keinen Gebrauch machen, sondern lediglich die Eigenschaften der Kurven aus ihrer Erzeugungsweise ableiten. An die Spitze stellen wir die Definition:

Zwei projektive Strahlbüschel erzeugen einen Kegelschnitt als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen. Diese Definition deckt sich zunächst nicht mit der in 258 aufgestellten Definition; doch haben wir nachgewiesen, daß die perspektiven Bilder des Kreises als Erzeugnisse von projektiven Strahlbüscheln erhalten werden können. Es erübrigt noch zu zeigen, daß sich die hier definierten Kegelschnitte auch stets als perspektive Bilder eines Kreises gewinnen lassen; daraus folgt dann die Identität beider Definitionen, der jetzigen und der früheren. Der hier geforderte Beweis findet sich gegen Ende dieses Abschnittes in 307 u. 308, da die zunächst folgenden Untersuchungen von der früheren Definition keinen Gebrauch machen und nur die neue Definition zur Grundlage haben.

294. Sind a und a_1, b und b_1, c und c_1, ... entsprechende Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel mit den Scheiteln S und T_1, so wird der Verbindungslinie ST_1 der beiden Scheitel, betrachtet als Strahl t des ersten Büschels, ein Strahl t_1 im zweiten und, betrachtet als Strahl s_1 des zweiten Büschels, ein Strahl s im ersten entsprechen (Fig. 191). Dann gehören dem Kegelschnitt die Punkte $A = a \times a_1$, $B = b \times b_1$, $C = c \times c_1$, $D = d \times d_1$, $S = s \times s_1$, $T_1 = t \times t_1$ an. Auf jedem Strahle durch S liegen zwei Punkte des Kegelschnittes, nämlich der Punkt S und der Schnittpunkt dieses Strahles mit dem entsprechenden des zweiten Büschels. Für den Strahl s fallen beide Punkte zusammen, so daß s zwei zusammenfallende Punkte mit dem

Kegelschnitt gemein hat, also ihn in S berührt. Der Kegelschnitt geht durch die Scheitel der beiden projektiven Strahlbüschel. Der Verbindungslinie der beiden Scheitel (t oder s_1) in dem einen Büschel entspricht die Tangente (t_1 oder s) des Kegelschnittes im andern.

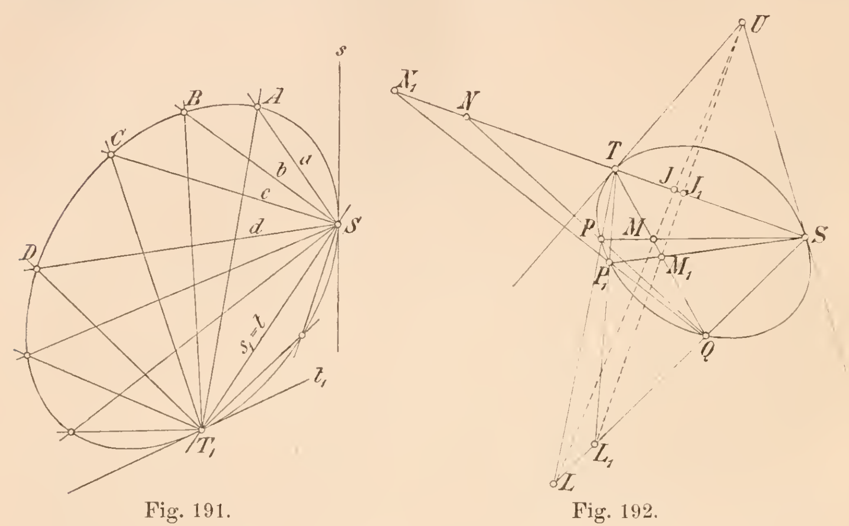


Fig. 191. Fig. 192.

295. Je zwei beliebige Punkte eines Kegelschnittes können als Scheitel projektiver Strahlbüschel dienen, welche ihn erzeugen. Wir nehmen an, der Kegelschnitt sei durch zwei projektive Büschel mit den Scheiteln S und T erzeugt worden, und $Q, P, P_1, P_2, \ldots$ seien irgend welche Punkte desselben (Fig. 192). Dann sind also die Strahlbüschel $S(STQPP_1P_2\ldots)$ und $T(STPP_1P_2\ldots)$ projektiv. Dabei bedeuten die vor der Klammer stehenden Buchstaben S und T die Scheitel der Büschel und die in der Klammer stehenden Buchstaben die einzelnen Punkte, durch welche ihre Strahlen gehen. Insbesondere bedeutet SS den in S tangierenden Strahl des ersten und TT den in T tangierenden Strahl des zweiten Büschels. Sind aber die vier Strahlen $S(STQP)$ projektiv zu den vier Strahlen $T(STQP)$, so sind sie nach 190 auch projektiv zu den Strahlen $T(TSPQ)$. Die erst- und letztgenannten Strahlen liegen sogar perspektiv, da sie den Strahl ST entsprechend gemein haben; folglich liegen $SS \times TT = U$, $SQ \times TP = L$ und $SP \times TQ = M$ in gerader Linie. Läßt man S, T, Q ungeändert, verändert aber die Lage von P in P_1, so liegen U, $SQ \times TP_1 = L_1$ und $SP_1 \times TQ = M_1$ in gerader Linie u. s. f.

Die vier Geraden SP, SQ, TP, TQ bilden die Seiten eines Vier-

seits, dessen Diagonalen LM, PQ und ST sind; deshalb werden S und T durch N und $J = ST \times LM$ harmonisch geteilt. In gleicher Weise teilen N_1 und $J_1 = ST \times L_1 M_1$ die Strecke ST harmonisch u. s. f. Nun ist der Büschel $S(P, P_1, P_2, \ldots)$ perspektiv zur Reihe $(M, M_1, M_2, \ldots)$; diese Reihe ist von U aus perspektiv zur Reihe $(J, J_1, J_2, \ldots)$ und diese letztere endlich ist nach 223 involutorisch zur Reihe $(N, N_1, N_2, \ldots)$, d. h. die beiden letztgenannten Reihen sind projektiv, nur ist das Entsprechen ihrer Punkte ein vertauschbares. Somit sind auch die Büschel $S(P, P_1, P_2, \ldots)$ und $Q(N, N_1, N_2, \ldots)$ oder $Q(P, P_1, P_2, \ldots)$ projektiv; unser Kegelschnitt kann also auch durch diese beiden projektiven Strahlbüschel erzeugt werden.

296. Schreibt man einem Kegelschnitt ein Viereck $ABCD$ ein und in den nämlichen Punkten ein Vierseit $PQRS$ um (Fig. 182), so sind nach dem letzten Satz die vier Strahlbüschel mit den Scheiteln A, B, C, D, deren entsprechende Strahlen sich in Punkten des Kegelschnittes schneiden, projektiv. So sind die vier Strahlen $A\,(A, B, C, D)$ projektiv zu $B\,(A, B, C, D)$, zu $C\,(A, B, C, D)$ und zu $D\,(A, B, C, D)$; wenn AA, BB, .. wieder als Verbindungslinien zweier zusammenfallender Kurvenpunkte die Tangenten in den bezüglichen Punkten bedeuten. Nach 190 sind auch die Büschel $A\,(A, B, C, D)$ und $B\,(B, A, D, C)$ projektiv und, da AB ein entsprechend gemeinsamer Strahl ist, sind sie perspektiv, also liegen P, M und N in gerader Linie. Aus der Perspektivität von $C\,(A, B, C, D)$ und $D\,(B, A, D, C)$ folgt, daß R, M und N in gerader Linie liegen. In gleicher Weise folgt aus der Perspektivität von $A\,(A, B, C, D)$ und $C\,(C, D, A, B)$ die geradlinige Lage der Punkte U, L und N, u. s. f. Wir gelangen so wiederum zu dem Satze (266): S c h r e i b t m a n e i n e m K e g e l s c h n i t t i n d e n n ä m l i c h e n v i e r b e l i e b i g g e w ä h l t e n P u n k t e n e i n v o l l s t ä n d i g e s V i e r e c k e i n u n d e i n V i e r s e i t u m, s o v e r b i n d e n d i e D i a g o n a l e n d e s l e t z t e r e n d i e D i a g o n a l p u n k t e d e s e r s t e r e n.

297. Hieran kann nun wieder, ganz wie im vorigen Abschnitt, die Theorie von Pol und Polare angeknüpft und entwickelt werden, so daß wir hier davon absehen können. Dagegen wollen wir die Figur des dem Kegelschnitte umgeschriebenen Vierseits benutzen, um seine Erzeugung durch projektive Punktreihen darzuthun. Seien A, B, C irgend welche feste Punkte eines Kegelschnittes und AP PQ, QC die zugehörigen Tangenten, während wir einem weiteren Punkte D verschiedene Lagen D, D_1, D_2, ... auf dem Kegelschnitt erteilen (Fig. 193). Die Tangenten in diesen Punkten schneiden auf PA eine Punktreihe S, S_1, S_2, ... und auf QC eine Punktreihe

$R, R_1, R_2, \ldots$ aus; beide Reihen sind unter sich und mit dem Strahlbüschel B $(D, D_1, D_2, \ldots)$ projektiv. Denn nach dem vorausgehenden Satze schneiden sich PR, QS, BD und AC in einem Punkte M, ebenso PR_1, QS_1, BD_1 und AC in einem Punkte M_1, u. s. f. Die Punkte $M, M_1, M_2, \ldots$ bilden eine auf AC liegende Punktreihe, die somit von P aus gesehen mit der Reihe $R, R_1, R_2, \ldots$ auf QC und von Q aus gesehen mit der Reihe $S, S_1, S_2, \ldots$ auf PA perspektiv liegt; zugleich gehen die Strahlen des Büschels B $(D, D_1, D_2, \ldots)$ durch die bezüglichen Punkte jener Reihe. Alle diese Reihen und Büschel sind projektiv. Daher der Satz: Legt man an einen Kegelschnitt eine Anzahl Tangenten, so schneiden sie auf irgend zwei festen Tangenten projektive Punktreihen aus. Zu diesen Reihen ist auch der Strahlbüschel projektiv, dessen Scheitel irgendwo auf dem Kegelschnitt liegt und dessen Strahlen durch die Berührungspunkte der bezüglichen Tangenten gehen.

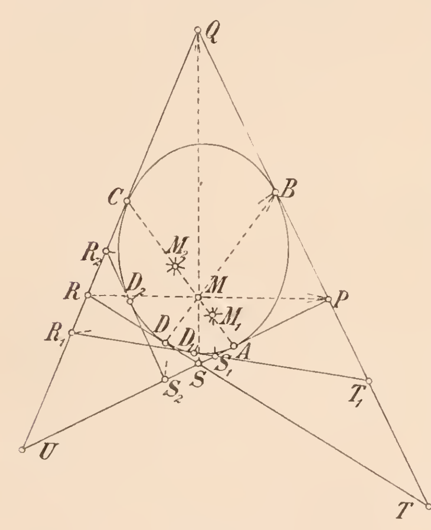


Fig. 193.

298. Wenn man die in 293 aufgestellte Definition des Kegelschnittes beachtet, so kann man den letzten Satz auch wie folgt aussprechen: Jeder Kegelschnitt, der durch zwei projektive Strahlbüschel erzeugt wird, kann auch durch zwei projektive Punktreihen erzeugt werden, d. h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen ihn. Insbesondere ist aus Fig. 193 und den voranstehenden Betrachtungen klar, daß der Kegelschnitt die Träger beider Punktreihen berührt und zwar in den Punkten, die ihrem Schnittpunkt (aufgefaßt als Punkt der einen Reihe, in der andern Reihe) entsprechen. Bewegt sich z. B. die Tangente R_1S_1 so, daß R_1 auf QC nach U rückt, so rückt S_1 auf PA in den Berührungspunkt A, der somit dem Punkt U entspricht.

299. Von dem letzten Satze gilt auch die Umkehrung: Jede Kurve, die von zwei projektiven Punktreihen erzeugt wird,

d. h. von den Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllt wird, läßt sich auch durch projektive Strahlbüschel erzeugen, ist also ein Kegelschnitt.

Zum Beweise dieses Satzes werden wir zunächst noch einige andere Eigenschaften unserer Kurve ableiten. In Fig. 193 seien PU und QU die Träger der projektiven Punktreihen $R, R_1, R_2, \ldots$ und $S, S_1, S_2, \ldots$; insbesondere mag dem Punkt U der ersten Reihe der Punkt A der zweiten und dem Punkt U der zweiten der Punkt C der ersten Reihe entsprechen. Die Träger berühren die Kurve als Verbindungslinien UA und CU von entsprechenden Punkten. Während aber durch R zwei Tangenten RQ und RS gehen, fallen sie für C — und ebenso für A — zusammen, d. h. A und C sind die Berührungspunkte der Träger. Ist dann QP irgend eine Tangente, welche beide Träger in den entsprechenden Punkten Q und P schneidet, so ist $(UCQR)$ projektiv zu $(AUPS)$ und nach 190 auch projektiv zu $(UASP)$. Die erste und letzte Reihe sind aber perspektiv, es schneiden sich also AC, QS und PR in einem Punkte M. Ganz ebenso schneiden sich AC, QS_1 und PR_1 in einem Punkte M_1 u. s. f. Die Strahlbüschel $P\,(R, R_1, R_2, \ldots)$ und $Q\,(S, S_1, S_2 \ldots)$ sind perspektiv, sie liefern auf AC die nämliche Punktreihe $(M, M_1, M_2, \ldots)$.

In dem Viereck $PQRS$ sind U, M und $T = PQ \times RS$ die Diagonalpunkte, so daß nach 203 die Träger UP und UQ durch die Strahlen UM und UT harmonisch geteilt werden. In gleicher Weise trennen auch die Strahlen UM_1 und UT_1 die beiden Träger harmonisch, wie sich aus dem Viereck PQR_1S_1 ergiebt, u. s. f. Nach 223 bilden somit UM und UT, UM_1 und UT_1, UM_2 und $UT_2, \ldots$ die Strahlenpaare einer Involution, deren Doppelstrahlen die beiden Träger sind. Demnach sind $U\,(M, M_1, M_2, \ldots)$ und $U\,(T, T_1, T_2, \ldots)$ projektive Strahlbüschel, deren Strahlen sich vertauschbar entsprechen. Die Punktreihe $(M, M_1, M_2, \ldots)$ auf AC ist folglich projektiv zur Punktreihe $(T, T_1, T_2, \ldots)$ auf PQ, und da die erstere zu den Reihen $R, R_1, R_2, \ldots)$ und $(S, S_1, S_2, \ldots)$ perspektiv ist, haben wir den Satz: Die Tangenten unserer Kurve schneiden auf jeder einzelnen Tangente und auf den gegebenen Trägern projektive Punktreihen aus. So sind also je zwei Tangenten unserer Kurve Träger projektiver Punktreihen, welche dieselbe erzeugen.

300. Sind B und D die Berührungspunkte der Tangenten PQ und RS, so ist nach diesem Satze die Reihe (T, B, P, Q) projektiv zur Reihe (D, T, S, R) und nach 190 auch projektiv zur Reihe (T, D, R, S); es schneiden sich also BD, PR und QS in einem Punkte.

Hiernach und nach dem Obigen haben die vier Geraden AC, BD, PR und QS den Punkt M gemein. In gleicher Weise folgt, daß sich die vier Geraden AC, BD_1, PR_1 und QS_1 in einem Punkte M_1 schneiden, wenn D_1 der Berührungspunkt der Tangente R_1S_1 ist, u. s. f. Es ist also der Strahlbüschel B $(D, D_1, D_2, \ldots)$ projektiv zu der Reihe $(M, M_1, M_2, \ldots)$ und somit projektiv zu den Reihen $(R, R_1, R_2, \ldots)$ und $(S, S_1, S_2, \ldots)$. Nun ist PQ eine beliebige Tangente und B ihr Berührungspunkt. Für jeden andern Punkt B_1 der Kurve gilt das Gleiche, so daß die genannten Reihen auch zu dem Büschel B_1 $(D, D_1, D_2, \ldots)$ projektiv sind. Damit ist der Satz in 299 bewiesen.

301. Die in diesem Abschnitt behandelte doppelte Erzeugungsweise der Kegelschnitte durch zwei projektive Punktreihen oder Strahlbüschel giebt uns die Mittel an die Hand, beliebig viele Tangenten und Punkte desselben in einfachster Weise zu zeichnen. Zunächst gilt der Satz: Fünf Punkte einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, bestimmen einen Kegelschnitt, der sie enthält. Die aus zweien der gegebenen Punkte, A und B, nach den übrigen C, D, E gezogenen Strahlen bestimmen nämlich zwei projektive Strahlbüschel und diese erzeugen einen durch die fünf Punkte verlaufenden Kegelschnitt. Den nämlichen Kegelschnitt erhält man nach 295 auch, wenn man irgend zwei andere unter den gegebenen Punkten als Scheitel zweier projektiver Strahlbüschel wählt, in denen sich wieder je zwei Strahlen durch den nämlichen Kurvenpunkt entsprechen.

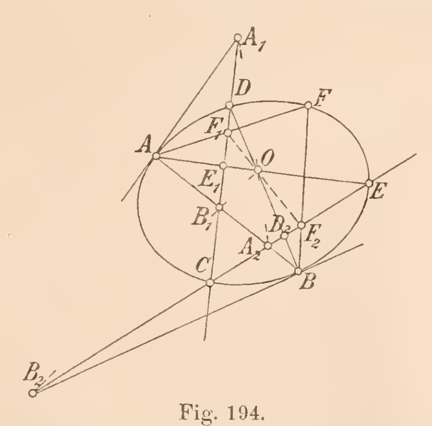


Fig. 194.

Ist F irgend ein Punkt des Kegelschnittes, so sind die Strahlbüschel $A\,(C, D, E, F, \ldots)$ und $B\,(C, D, E, F, \ldots)$ projektiv. Den ersteren schneiden wir mit CD, den letzteren mit CE, dann sind auch die Punktreihen $(C, D, E_1, F_1 \ldots)$ und $C, D_2, E, F_2, \ldots)$ projektiv (Fig. 194) und sogar perspektiv. Sonach geht F_1F_2 durch den Schnittpunkt $O = DD_2 \times E_1E$. Man erhält also jedesmal einen Punkt des Kegelschnittes, indem man eine beliebige Gerade durch O zieht, ihren Schnittpunkt auf CD mit A und ihren Schnittpunkt auf CE mit B verbindet; beide Verbindungslinien schneiden sich auf

der Kurve. Da insbesondere dem Strahl AB des ersten Büschels im zweiten die Tangente in B entspricht, so verbinde man $B_1 = AB \times CD$ mit O, dann geht die in B berührende Tangente durch $B_2 = B_1 O \times CE$.

302. Aus unserer Figur folgt auch wiederum der Pascal'sche Satz. Denn bei dem Sechseck $AFBDCE$ liegen die Punkte $AF \times DC = F_1$, $FB \times CE = F_2$ und $BD \times EA = O$ in gerader Linie. Der Pascal'sche Satz ist hiernach eine unmittelbare Folge der Erzeugungsweise eines Kegelschnittes durch zwei projektive Strahlbüschel. Während aber bei dieser zwei Punkte desselben als Scheitel der Büschel auftreten, sind beim Pascal'schen Satz alle sechs Punkte gleichberechtigt. Kennt man fünf Punkte $BDCEA$ des Kegelschnittes, so findet man einen weiteren, wenn man durch A irgend einen Strahl zieht, seinen Schnittpunkt auf CD mit O verbindet, diese Linie mit CE schneidet und dann von B aus einen Strahl durch diesen Schnittpunkt zieht. Die Strahlen durch A und B liefern einen neuen Punkt des Kegelschnittes.

Aus unserer Figur erkennt man auch, daß die Umkehrung des Pascal'schen Satzes Geltung hat. Die Ecken eines Sechsecks, dessen drei Paar Gegenseiten sich in drei Punkten einer Geraden schneiden, liegen stets auf einem Kegelschnitt.

303. Ein Kegelschnitt ist bestimmt durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben, oder durch drei Punkte und die Tangenten in zweien. Sind A, B, C, D und die Tangente in A gegeben, und ist F irgend ein Punkt des Kegelschnittes, so ist $B(A, C, D, F)$ projektiv zu $A(A, C, D, F)$, wenn AA die Tangente in A bedeutet (Fig. 194). Daraus folgt die Perspektivität der Reihen (A_2, C, D_2, F_2) und (A_1, C, D, F_1), und es ist $O = A_1 A_2 \times DD_2$ das Centrum dieser perspektiven Beziehung. Die Konstruktion von F geschieht dann wie vorher.

Sind drei Punkte A, B, C und die Tangenten PA und PB in A und B gegeben, so ziehe man durch P einen beliebigen Strahl, der AC und BC in M und N schneiden mag; dann ist $D = AN \times BM$ ein Punkt des Kegelschnittes (Fig. 195). Denn die Büschel $A(P, B, C, D)$ und $B(P, A, D, C)$ sind perspektiv, also sind die Büschel $A(P, B, C, D)$ und $B(A, P, C, D)$ projektiv, wie es für den gesuchten Kegelschnitt sein muß (294). Ist $L = AB \times CD$, so ist $\triangle LMN$ ein Polardreieck und die Tangenten in A, B, C, D schneiden sich paarweise auf seinen Seiten (vergl. 296).

304. Fünf Gerade einer Ebene, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, bestimmen einen Kegel-

schnitt, der sie berührt. Die auf zwei von den gegebenen Geraden, a und b, durch die übrigen c, d, e ausgeschnittenen Punkte bestimmen nämlich zwei projektive Punktreihen, und diese erzeugen einen die fünf Geraden berührenden Kegelschnitt. Ist f irgend eine von seinen weiteren Tangenten (Fig. 196), so sind die von $c, d, e, f, \ldots$ auf a und b ausgeschnittenen Punktreihen $(C_1, D_1, E_1, F_1, \ldots)$ und $(C_2, D_2, E_2, F_2, \ldots)$ projektiv und folglich die Strahlbüschel $P_1\ (C_1, D_1, E_1, F_1, \ldots)$ und $P_2\ (C_2, D_2, E_2, F_2, \ldots)$ perspektiv, wo $P_1 = c \times d$ und $P_2 = c \times e$ ist. Demnach liegt der Punkt $P_1F_1 \times P_2F_2 = F$ auf der Geraden D_2E_1. Man erhält also jedesmal eine Tangente des Kegelschnittes, indem man von P_1 und P_2 nach einem beliebigen Punkt von D_2E_1 Strahlen zieht und die Punkte, die sie auf a resp. b ausschneiden, miteinander verbindet. Da insbesondere dem Punkt $a \times b = B_1$ der ersten Reihe in der zweiten der Berührungspunkt B_2 entspricht, so geht die Verbindungslinie von P_2 mit $P_1B_1 \times D_2E_1$ durch B_2 hindurch.

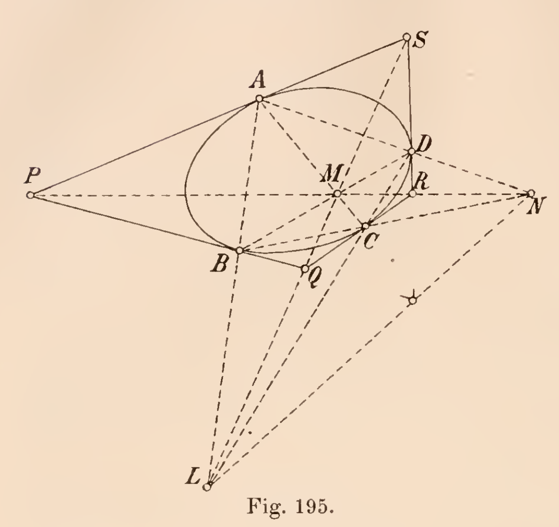


Fig. 195.

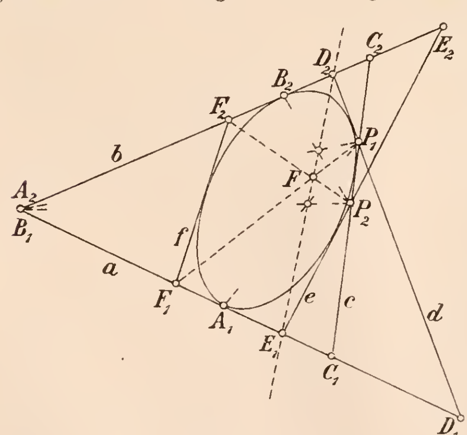


Fig. 196.

305. Unsere Figur liefert auch wiederum den Brianchon'schen Satz. In dem von den sechs Seiten $afbdce$ in der angeführten Reihenfolge gebildeten Sechseck sind $a \times f = F_1$ und $d \times c = P_1$, ferner $f \times b = F_2$ und $c \times e = P_2$, endlich $b \times d = D_2$ und $e \times a = E_1$ drei Paar Gegenecken, deren Verbindungslinien durch den nämlichen Punkt F gehen.

Kennt man also fünf Tangenten *bdcea* eines Kegelschnittes, so findet man eine weitere, indem man $b \times d$ mit $e \times a$ verbindet und ferner $c \times d$ mit demjenigen Punkte von a, durch den die gesuchte Tangente gehen soll. Ihr Schnittpunkt auf b liegt dann mit $c \times e$ und dem Schnittpunkt der genannten Verbindungslinien auf einer Geraden.

Aus der Figur erkennt man auch die Umkehrung des Brianchon'schen Satzes. Gehen die drei Verbindungslinien der Gegenecken eines Sechsecks durch einen Punkt, so berühren seine sechs Seiten einen Kegelschnitt.

306. Ein Kegelschnitt ist bestimmt durch vier Tangenten und den Berührungspunkt von einer derselben, oder durch drei Tangenten und die Berührungspunkte von zweien. Sind a, b, c, d und der Berührungspunkt A_1 von a gegeben, so sind die Reihen (A_1, C_1, D_1, F_1) und (A_2, C_2, D_2, F_2) auf a und b projektiv (Fig. 196) und die Strahlbüschel $P_1(A_1, C_1, D_1, F_1)$ und $P_2(A_2, C_2, D_2, F_2)$ perspektiv. Ihre entsprechenden Strahlen schneiden sich auf einer Geraden, die durch $P_1A_1 \times P_2A_2$ und $D_2 = P_1D_1 \times P_2D_2$ geht; die Konstruktion von f geschieht dann mit Hilfe dieser Geraden wie vorher.

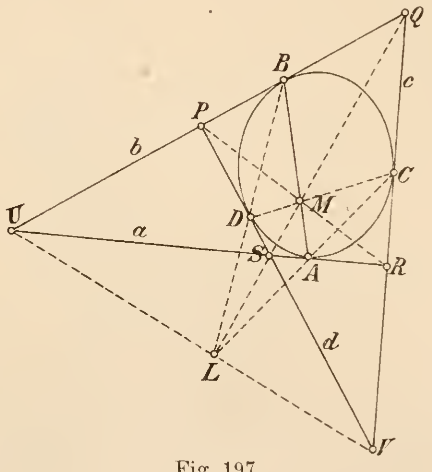


Fig. 197.

Sind die drei Tangenten a, b, c und die Berührungspunkte A und B von a und b gegeben (Fig. 197), so wähle man auf AB einen beliebigen Punkt M; dann schneidet QM auf a einen Punkt S und RM auf b einen Punkt P aus ($Q = b \times c$, $R = a \times c$) und es ist $PS = d$ eine neue Tangente unseres Kegelschnittes. Denn die Punktreihe (U, A, R, S) ist perspektiv zur Reihe (U, B, P, Q) und folglich nach 190 projektiv zur Reihe (B, U, Q, P), wie es nach 299 für den gesuchten Kegelschnitt sein muß. Verbindet man $U = a \times b$ mit $V = c \times d$ und schneidet diese Gerade mit QS in L, so gehen LA und LB durch die Berührungspunkte C resp. D der Tangenten c und d. Die Verbindungslinie beider Berührungspunkte läuft durch M (vergl. 296).

307. Wir hatten in diesem Abschnitt den Kegelschnitt als das Erzeugnis zweier projektiver Strahlbüschel definiert. Wir müssen

nun noch zeigen, daß diese Definition mit der früheren übereinstimmt, d. h. daß ein durch zwei projektive Strahlbüschel erzeugter Kegelschnitt sich immer als perspektives Bild eines Kreises ansehen läßt. Zu diesem Zwecke beweisen wir den Satz: Zwei projektive Strahlbüschel kann man durch perspektive Abbildung stets derart in zwei kongruente Strahlbüschel verwandeln, daß der eine von ihnen ungeändert bleibt. Dabei geht dann natürlich der von den ersteren Büscheln erzeugte Kegelschnitt in den von den letzteren erzeugten Kreis über.

Es seien a, b, c und a_1, b_1, c_1 je drei Strahlen der gegebenen projektiven Büschel mit den Scheiteln S und S_1 (Fig. 198). Dann geht der Kegelschnitt k durch die Punkte S, S_1, $A = a \times a_1$, $B = b \times b_1$, $C = c \times c_1$ und berührt in S die Gerade t, welche dem Strahl $S_1 S = t_1$ entspricht und nach 301 konstruiert wird (im Fünfeck SS_1ABC schneidet die Verbindungslinie von $SS_1 \times BC$ und $S_1A \times CS$ auf AB einen Punkt der gesuchten Tangente t aus). Zieht man nun einen beliebigen Kreis k_2, der t in S berührt, so ist er perspektiv zum Kegelschnitt k, und zwar ist S das Centrum der Perspektive. Das ergiebt sich, wie

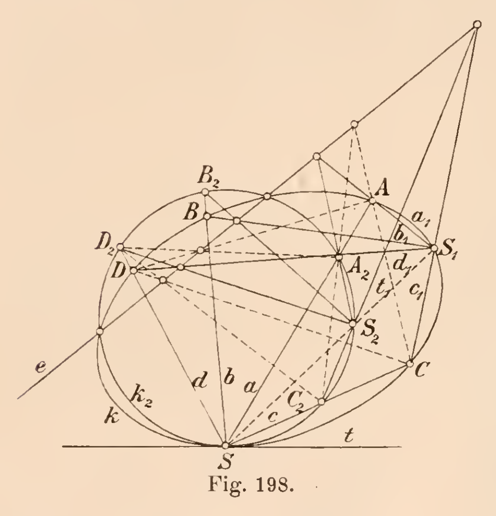


Fig. 198.

folgt. Der Kreis k_2 möge t_1, a, b, c in S_2, A_2, B_2, C_2 schneiden; ferner sei $D = d \times d_1$ ein beliebiger Punkt von k und D_2 der auf d liegende Punkt von k_2. Nach der Voraussetzung sind die Strahlbüschel (t, a, b, c, d) und (t_1, a_1, b_1, c_1, d_1) projektiv, und der erstere ist zu dem Büschel S_2 (S, A_2, B_2, C_2, D_2) kongruent. Demnach ist auch der zweite Büschel zu dem dritten projektiv und sogar perspektiv, da beide den Strahl t_1 entsprechend gemein haben. Es liegen also die Schnittpunkte von a_1 und S_2A_2, von b_1 und S_2B_2, von c_1 und S_2C_2, von d_1 und S_2D_2 auf einer Geraden e. Die perspektive Beziehung, für welche S das Centrum, e die Achse bildet und S_1, S_2 ein Paar entsprechender Punkte sind, läßt den Büschel mit dem Scheitel S ungeändert und verwandelt den Büschel S_1 in den Büschel S_2. Insbesondere bildet sie den Strahl d_1 in den

Strahl S_2D_2 und den beliebigen Punkt D von k in den Punkt D_2 von k_2 ab, w. z. b. w.

Ein Kegelschnitt läßt sich stets durch Perspektive in einen Kreis verwandeln, wobei man einen beliebigen Punkt auf ihm zum Centrum wählen kann. Diese perspektive Beziehung zwischen Kreis und Kegelschnitt läßt sich auch zur Konstruktion des letzteren verwenden. Sucht man insbesondere die Verschwindungslinie und ihren Pol in Bezug auf den Kreis auf, so erhält man als entsprechenden Punkt zu diesem Pole den Mittelpunkt des Kegelschnittes. Zwei konjugierte Polaren des Kreises, die durch den genannten Pol gehen, bilden sich als konjugierte Durchmesser des Kegelschnittes ab (vergl. 288).

308. Einen Kegelschnitt k durch fünf Punkte A, B, C, D, E kann man auch in folgender Weise in einen dazu perspektiven Kreis k_2 überführen. Man zeichne nach 301 die Tangenten AJ und BJ in A und B; dann lege man durch diese beiden Punkte einen beliebigen Kreis k_2 und ziehe seine Tangenten AJ_2 und BJ_2 (Fig. 199). Sollen k und k_2 perspektiv sein, so sind J und J_2 entsprechende Punkte und $e = AB$ ist die Achse der Perspektive. Zugleich entspricht dem Punkte C von k ein Punkt C_2 von k_2, und zwar liegt C_2 auf der Verbindungslinie von J_2 mit dem Punkte $e \times JC$. Die Geraden JJ_2 und CC_2 schneiden sich aber im Centrum O der Perspektive. In der That bildet die Perspektive, welche e zur Achse, O zum Centrum und C_2 und C zu entsprechenden Punkten hat, den Kreis k_2 in einen Kegelschnitt ab, der AJ in A, BJ in B berührt und durch C geht. Da es aber nur einen derartigen Kegelschnitt giebt, so muß er mit dem Kegelschnitt k durch die fünf gegebenen Punkte identisch sein.

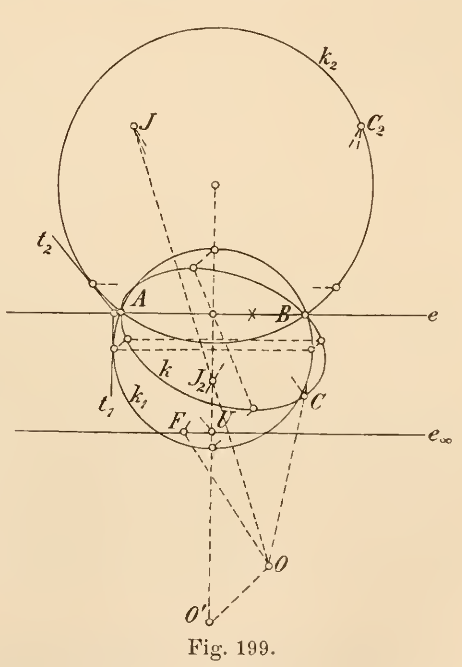


Fig. 199.

309. Dem unendlich fernen Punkt von CJ entspricht der

Fluchtpunkt F auf C_2J_2 ($OF \parallel CJ$) und der unendlich fernen Geraden die Fluchtlinie e_∞ durch F ($e_\infty \parallel e$). Ist k eine Ellipse, so schneidet e_∞ den Kreis k_2 nicht. Dann läßt sich eine neue perspektive Beziehung angeben, die den Kreis k_2 in einen neuen Kreis k_1 überführt, wobei e wiederum die Achse, aber e_∞ die Verschwindungslinie ist, während das neue Centrum O' auf der Mittelsenkrechten von AB liegen muß. Schneidet dieselbe e_∞ in U und legt man von U aus eine Tangente t_2 an k_2, so entspricht ihr bei der neuen Perspektive eine zu e normale Tangente t_1 von k_1 ($t_2 \times t_1$ auf e). Es läßt sich also k_1 als einer der beiden Kreise durch A und B zeichnen, die t_1 berühren, das Centrum O' ist ein Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise k_2 und k_1.

Nach 162 liegt nun der Kegelschnitt k auch zu dem Kreise k_1 perspektiv; hierbei ist e wieder die Achse und das Centrum liegt mit O und O' in gerader Linie. Aber die Perspektive, welche k in k_2 verwandelt, führt die unendlich ferne Gerade in e_∞ über, während die Perspektive, welche k_2 in k_1 verwandelt, die Gerade e_∞ wieder in die unendlich ferne Gerade überführt. Bei der perspektiven Beziehung zwischen k und k_1 gehen somit unendlich ferne Punkte wieder in unendlich ferne Punkte, also parallele Gerade immer wieder in parallele Gerade über. Das will sagen, daß k und k_1 affin sind; e ist die Achse und OO' die Richtung der Affinität. Der zu e normale Durchmesser von k_1 geht dabei in einen Durchmesser der Ellipse k über, dessen Verlängerung den Punkt J trägt. Jede Ellipse läßt sich als affines Bild eines Kreises darstellen.

Schon in 24 haben wir die Aufgabe gelöst: eine Ellipse durch fünf gegebene Punkte zu zeichnen, indem wir sie dort als eine zum Kreis affine Kurve definierten. Hier sind wir von der neuen Definition ausgegangen, wonach die Ellipse das perspektive Bild eines Kreises oder das Erzeugnis projektiver Strahlbüschel ist, und haben gezeigt, daß auch die so definierte Ellipse stets als Parallelprojektion eines Kreises gewonnen werden kann.

Einige Konstruktionsaufgaben bei Kegelschnitten. Metrische Eigenschaften.

310. Die Kegelschnitte — mag man sie als Erzeugnisse projektiver Strahlbüschel und Punktreihen, oder als perspektive Bilder eines Kreises auffassen — sind nach dem Früheren konstruierbar. Auf jedem Strahl, der durch einen seiner Punkte gezogen wird, kann man einen zweiten zeichnen (302), durch jeden Punkt, der auf einer seiner

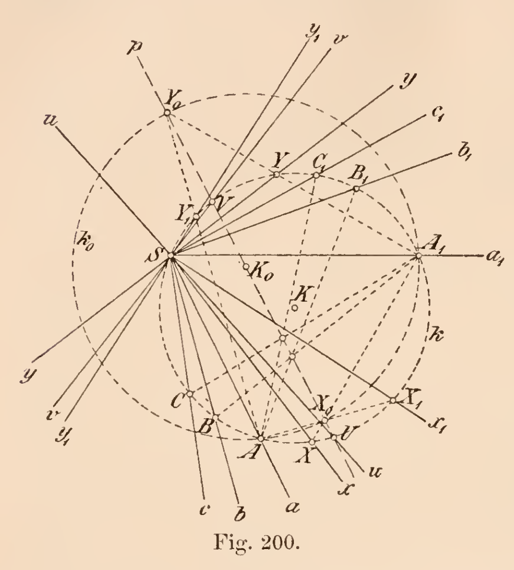
Tangenten liegt, kann man eine zweite ziehen (305). Aber die Frage nach den beiden Tangenten an einen Kegelschnitt aus einem beliebigen Punkt, oder nach den beiden Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden ist noch nicht gelöst, ebensowenig wie gewisse Fragen, die an die Polarentheorie anknüpfen. Solche Fragen sollen nun hier behandelt werden. Sie führen uns zu projektiven Strahlbüscheln mit dem nämlichen Scheitel, zu projektiven Punktreihen auf derselben Geraden, sowie zu involutorischen Punktreihen und Strahlbüscheln, und erfordern die Konstruktion von Doppelelementen, von entsprechenden rechten Winkeln, von Gegenpunkten. Diese Konstruktionen werden aber selbst am besten mit Hilfe eines Kegelschnittes und zwar eines Kreises durchgeführt und sollen zunächst ihre Erledigung im folgenden finden.

311. Zwei projektive Punktreihen auf einer Geraden haben entweder keinen, oder einen oder zwei Doppelpunkte, d. h. Punkte, die sich selbst entsprechen. Daß solche Punktreihen einen Doppelpunkt haben können, ist ersichtlich; denn durch Verschiebung der einen Reihe auf dem gemeinsamen Träger können zwei entsprechende Punkte zur Deckung gebracht werden. Daß ferner den beiden Reihen nicht drei oder mehr Doppelpunkte zukommen können, ohne daß sie sich Punkt für Punkt decken, folgt aus 180.

Zwei entgegenlaufende projektive Punktreihen auf derselben Geraden besitzen stets zwei Doppelpunkte; denn die sie durchlaufenden, entsprechenden Punkte müssen sich auf ihrem Wege zweimal begegnen. Aus gleichen Gründen besitzen zwei projektive, koncentrische Strahlbüschel keinen, einen oder zwei Doppelstrahlen. Sind diese Strahlbüschel entgegenlaufend, so sind stets zwei Doppelstrahlen vorhanden. Sind die genannten Punktreihen oder Strahlbüschel gleichlaufend, so können noch alle drei Fälle eintreten.

312. Zwei projektive Strahlbüschel mit demselben Scheitel S seien durch die sich entsprechenden Strahlen a, b, c und a_1, b_1, c_1 gegeben (Fig. 200). Man lege durch S einen beliebigen Hilfskreis k, der die gegebenen Strahlen in A, B, C resp. A_1, B_1, C_1 schneiden mag. Der Strahlbüschel mit dem Scheitel A_1 ist zu dem ersteren Büschel projektiv, wenn sich je zwei Strahlen entsprechen, die sich auf k schneiden. Ebenso ist der Strahlbüschel mit dem Scheitel A zu dem letzteren Büschel projektiv, wenn ihre entsprechenden Strahlen sich auf k schneiden. Demnach sind auch die Büschel A_1 $(A, B, C, \ldots)$ und A $(A_1, B_1, C_1, \ldots)$ projektiv und sogar perspektiv, weil sie A_1A entsprechend gemein haben. Ihre Perspektivitätsachse p verbindet die Punkte $AB_1 \times A_1B$ und $AC_1 \times A_1C$.

Entsprechende Strahlen der Büschel A und A_1 schneiden den Kreis k in Punkten, die mit S entsprechende Strahlen der gegebenen Büschel bestimmen. Schneidet daher die Achse p den Hilfskreis k in den Punkten U und V, so sind $u = SU$ und $v = SV$ die gesuchten Doppelstrahlen. Dieselben fallen in einen zusammen, wenn p den Hilfskreis k berührt; es existieren keine Doppelstrahlen, wenn p außerhalb k liegt.


Fig. 200.

Um die sich entsprechenden Rechtwinkelpaare x, y und x_1, y_1 zu finden, bestimme man in den perspektiven Strahlbüscheln A und A_1 die sich entsprechenden rechten Winkel (nach 183) mittels eines zweiten Hilfskreises k_0, der durch A und A_1 geht und dessen Centrum K_0 auf der Achse p liegt. Die fraglichen rechten Winkel sind $\angle X_0A_1Y_0$ und $\angle X_0AY_0$, wenn X_0 und Y_0 die Schnittpunkte von k_0 mit p bedeuten. Schneiden ihre Schenkel den Kreis k resp. in X, Y und X_1, Y_1, so sind $x = SX$, $y = SY$ und $x_1 = SX_1$, $y_1 = SY_1$ die entsprechenden Rechtwinkelpaare der gegebenen Strahlbüschel.

313. Sind zwei projektive Punktreihen auf derselben Geraden g durch die sich entsprechenden Punkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 festgelegt (Fig. 201), so wähle man einen Hilfskreis k, der den gemeinsamen Träger berührt und lege aus den gegebenen Punkten an ihn die Tangenten a, b, c und a_1, b_1, c_1. Die Punktreihen A', B', C', ... auf a_1 und A', B_1', C_1', ... auf a sind zu den gegebenen Reihen A, B, C, ... resp. A_1, B_1, C_1, ... projektiv, wenn je zwei Punkte sich entsprechen, die auf einer Kreistangente liegen. Die Reihen auf a_1 und a sind somit zu einander projektiv und, da A' beiden entsprechend gemein ist, auch perspektiv; das zugehörige Centrum ist $O = B'B_1' \times C'C_1'$. Die aus entsprechenden Punkten dieser perspektiven Reihen auf a und a_1 an k gelegten Tangenten schneiden auf g entsprechende Punkte der gegebenen Reihen aus. Die Koinzidenz tritt ein für die beiden aus O an den

Kreis k gelegten Tangenten u und v; diese schneiden also auf g die gesuchten Doppelpunkte aus. Dieselben fallen in einen einzigen zusammen, wenn O auf dem Hilfskreis k liegt; sie kommen in Wegfall, wenn O im Innern desselben liegt.

Man hätte die Aufgabe auch auf die vorhergehende zurückführen können, indem man die beiden Punktreihen auf g durch zwei Strahlbüschel aus einem Punkte S projiziert hätte. Die Doppelstrahlen dieser Büschel würden dann die Doppelpunkte der gegebenen Reihen ausgeschnitten haben.

Um die Gegenpunkte G_v und G_∞ der gegebenen Punktreihen zu finden, lege man an den Kreis k die zu g parallele Tangente w, bestimme zu ihren Schnittpunkten mit a und a_1 die perspektiven Punkte auf a_1 und a und ziehe aus den letzteren die Tangenten an k, welche g in G_v und G_∞ treffen.

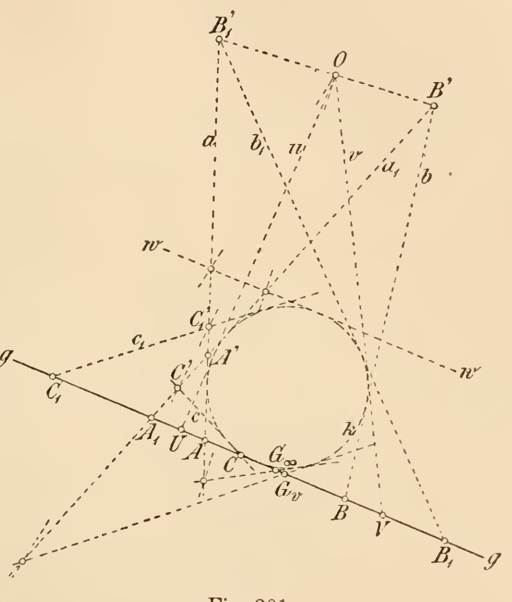


Fig. 201.

314. Der Punktreihe auf einer Geraden und dem Strahlbüschel durch einen Punkt stellt man die Punktreihe auf einem Kegelschnitt und den Tangentenbüschel an einem Kegelschnitt gegenüber. In den beiden letztgenannten Fällen bildet der Kegelschnitt den Träger.

Zwei Punktreihen auf einem Kegelschnitt heißen projektiv, wenn sie aus einem und folglich aus allen Punkten desselben durch projektive Strahlbüschel projiziert werden. Ebenso heißen zwei Tangentenbüschel an einem Kegelschnitt projektiv, wenn sie auf einer und mithin auf allen Tangenten desselben projektive Punktreihen ausschneiden. Ferner nennt man zwei Punktreihen oder zwei Tangentenbüschel eines Kegelschnittes involutorisch, wenn sie mit einem beliebigen Punkte resp. auf einer beliebigen Tangente desselben involutorische Strahlbüschel oder Punktreihen bestimmen.

Nach 297 gilt der Satz: Jede Punktreihe auf einem Kegelschnitt ist projektiv zu dem Tangentenbüschel, dessen Tangenten ihn in den entsprechenden Punkten der Reihe berühren. Beachtet man, daß hiernach zu zwei projektiven Punktreihen auf einem Kegelschnitt zwei projektive Tangentenbüschel gehören, und daß zwei projektive Reihen involutorisch liegen, wenn ein vertauschbares Entsprechen zwischen ihren Punkten stattfindet, so ergiebt sich ein neuer Satz: Bilden auf einem Kegelschnitt die Punktepaare AA_1, BB_1, CC_1, ... eine Involution, so gilt das Gleiche von den Tangentenpaaren aa_1, bb_1, cc_1, ..., deren Berührungspunkte jene sind.

315. Die Verbindungslinien der Punktepaare AA_1, BB_1, CC_1, ... einer auf einem Kegelschnitte liegenden Involution gehen durch einen Punkt M, den Mittelpunkt der Involution (Fig. 202). Zunächst ist aus 224 bekannt, daß zwei Paare entsprechender Punkte genügen, um die Involution festzulegen. Die vier Punkte A, B_1, C, C_1 des Kegelschnittes sind projektiv zu den ihnen involutorisch entsprechenden Punkten A_1, B, C_1, C. Folglich ist auch der Strahlbüschel $B(A, B_1, C, C_1)$ projektiv zu dem Büschel $A(A_1, B, C_1, C)$ und nach 190 projektiv zu dem Büschel $A(B, A_1, C, C_1)$. Der erste und dritte Büschel haben den Strahl BA entsprechend gemein, sie sind somit perspektiv; folglich liegen die Punkte $AA_1 \times BB_1 = M$, C und C_1 auf einer Geraden, oder die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 gehen durch einen Punkt M.

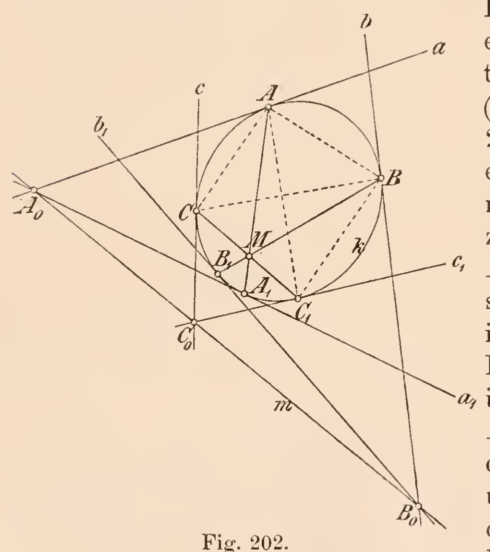


Fig. 202.

316. Sind nun a, a_1, b, b_1, c, c_1, ... die Tangenten des Kegelschnittes k in den Punkten A, A_1, B, B_1, C, C_1, ... der vorhin betrachteten Involution, so bilden sie die Paare einer Involution von Tangenten an demselben. Zugleich sind die Punkte $a \times a_1$, $b \times b_1$, $c \times c_1$, ... die Pole der Verbindungslinien AA_1, BB_1, CC_1, ... in Bezug auf den Kegelschnitt. Da letztere durch einen Punkt M gehen, liegen erstere auf seiner Polare m, daher gilt der Satz:

Sind aa_1, bb_1, cc_1, ... die Paare einer Involution von Tangenten an einem Kegelschnitt, so liegen ihre Schnittpunkte auf einer Geraden m, der Achse der Involution.

317. Eine Strahleninvolution mit dem Scheitel S sei durch zwei Paare a und a_1, b und b_1 sich vertauschbar entsprechender Strahlen gegeben. Man konstruiere: erstens zu einem gegebenen Strahle c den entsprechenden c_1, zweitens das Paar rechtwinkliger Strahlen, drittens die Doppelstrahlen der Involution.

Die gegebenen Strahlen schneiden einen beliebig durch S gelegten Kreis k in Punktepaaren A und A_1, B und B_1 einer Involution (Fig. 203). Man findet den Mittelpunkt M der Involution als $AA_1 \times BB_1$. Schneidet der Strahl c den Kreis in C, so trifft ihn der entsprechende Strahl c_1 in C_1, wo C_1 den zweiten Schnittpunkt der Linie MC mit k bedeutet. Schneidet ferner die Verbindungslinie von M mit dem Kreismittelpunkt K aus dem Kreis die Punkte X und X_1 aus, so sind $x = SX$ und $x_1 = SX_1$ die sich entsprechenden rechtwinkligen Strahlen. Sind endlich U und V die Berührungspunkte der aus M an den Kreis gelegten Tangenten (oder die Schnittpunkte mit der Polare m von M), so bilden $u = SU$ und $v = SV$ die Doppelstrahlen der Involution.

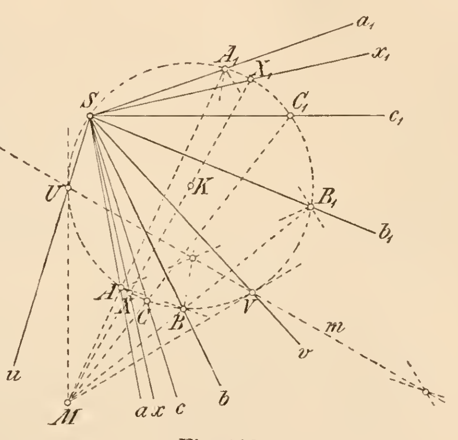


Fig. 203.

318. Eine Involution von Punkten auf einer Geraden g sei durch zwei Paare A und A_1, B und B_1 sich vertauschbar entsprechender Punkte gegeben. Man bestimme: erstens zu einem gegebenen Punkt C den entsprechenden C_1, zweitens den Mittelpunkt und drittens die Doppelpunkte der Involution.

Man lege an den Träger g der Involution einen berührenden Kreis k; seine durch die gegebenen Punkte verlaufenden Tangenten a und a_1, b und b_1 bestimmen eine Involution von Tangenten (Fig. 204). Die Achse p derselben ergiebt sich als Verbindungslinie von $A_0 = a \times a_1$ mit $B_0 = b \times b_1$. Je zwei Tangenten c und c_1 des Hilfskreises, die sich in einem Punkte C_0 von p treffen, schneiden

auf g entsprechende Punkte C und C_1 aus. Der zu g parallelen Tangente m_1 entspricht auf gleiche Weise die den Mittelpunkt M der Involution enthaltende Tangente m. Endlich entsprechen die

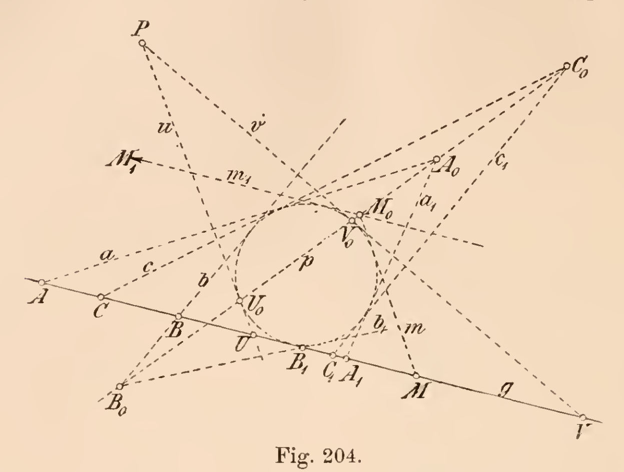


Fig. 204.

Tangenten u und v in den Schnittpunkten des Kreises mit der Achse p sich selbst und bestimmen daher auf g die Doppelpunkte U und V der Involution.

Man hätte auch die ganze Aufgabe auf die vorhergehende zurückführen können, indem man die Punktinvolution aus einem beliebigen Punkt durch eine Strahleninvolution projizierte.

319. Wir wenden uns jetzt zu den am Anfang dieses Abschnittes erwähnten Aufgaben über Kegelschnitte.

Es sollen die Schnittpunkte einer Geraden g mit einem Kegelschnitte k gefunden werden, von dem man fünf Punkte A, B, C, D, E kennt. Zwei den Kegelschnitt erzeugende projektive Strahlbüschel sind z. B. durch die von A und B nach den Punkten C, D, E laufenden Strahlen gegeben; sie schneiden auf der Geraden g zwei projektive Punktreihen C_1, D_1, E_1 und C_2, D_2, E_2 aus, deren Doppelpunkte U und V sich nach 313 bestimmen lassen. Dann sind AU und BU — und ebenso AV und BV — entsprechende Strahlen der vorher genannten projektiven

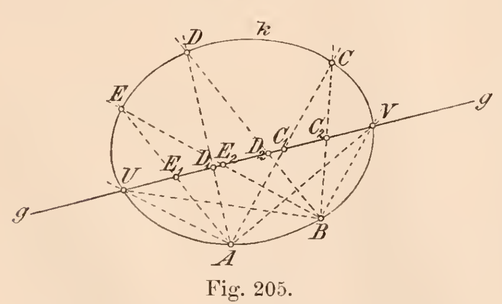


Fig. 205.

Strahlbüschel, ihre Schnittpunkte U und V liegen also auf dem Kegelschnitt und sind die gesuchten Schnittpunkte von g und k (Fig. 205). Zur Lösung unserer Aufgabe ist demnach ein Verzeichnen des Kegelschnittes selbst nicht erforderlich.

320. Analog wird die Aufgabe behandelt: Aus einem Punkte S die Tangenten an einen Kegelschnitt k zu ziehen, von dem man fünf Tangenten a, b, c, d, e kennt. Die Schnittpunkte zweier der gegebenen Tangenten, z. B. a und b, mit den drei übrigen,

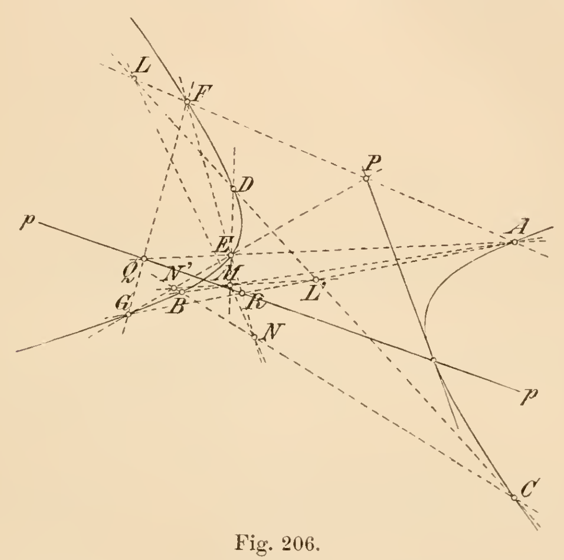


Fig. 206.

c, d und e, bilden die erzeugenden Punktreihen von k und bestimmen mit S als Scheitel zwei projektive Strahlbüschel, deren Doppelstrahlen u und v die gesuchten Tangenten sind. Hier wie dort können sich je nach der Lage von g und S gegen den Kegelschnitt zwei getrennte, zwei vereinte oder keine Doppelelemente als Lösung ergeben.

321. Die Polare eines Punktes P in Bezug auf einen durch fünf Punkte $ABCDE$ gegebenen Kegelschnitt k wird konstruiert, indem man P mit zweien der Punkte, etwa A und E, verbindet und auf den erhaltenen Strahlen die zweiten Schnittpunkte F und G mit k aufsucht. Letzteres geschieht mit Hilfe des Pascal'schen Satzes (vergl. 268). Dann verbindet die Polare p von P nach 275 a die beiden Punkte $AE \times FG = Q$ und $AG \times EF = R$ (Fig. 206).

322. Analog konstruiert man den Pol einer Geraden p in Bezug auf einen durch fünf Tangenten bestimmten

Kegelschnitt k. Man schneide nämlich p mit zweien der Tangenten, etwa a und e, und ziehe aus diesen beiden Schnittpunkten die noch fehlenden Tangenten f und g an k, was mit Hilfe des Brianchon'schen Satzes geschieht (Fig. 207). Dann gehen die Verbindungslinien q von $a \times e$ und $f \times g$, sowie r von $a \times g$ und $e \times f$ durch den gesuchten Pol P von p (pqr ist Polardreieck nach 276).

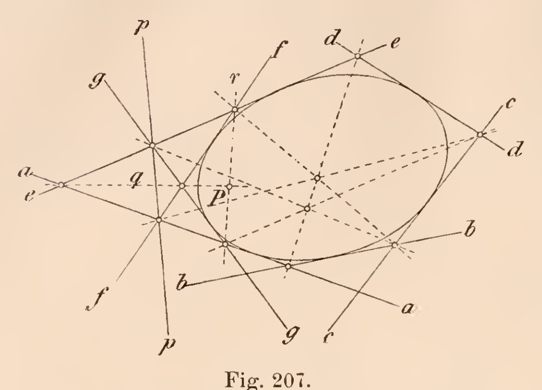


Fig. 207.

323. Wenn man zu einem in gegebener Richtung unendlich fern liegenden Punkte P die Polare p in Bezug auf den Kegelschnitt durch die fünf Punkte $ABCDE$ konstruiert, so bildet p einen Durchmesser desselben. Ist ferner P_1 der unendlich ferne Punkt des Durchmessers p und p_1 seine Polare, so bestimmen p und p_1 den Mittelpunkt M des Kegelschnittes und sind konjugierte Durchmesser (288). Zwei Paare konjugierter Durchmesser p und p_1, q und q_1 bilden im Mittelpunkt M zwei Strahlenpaare einer Involution, deren Doppelstrahlen u, v die Asymptoten und deren rechtwinkliges Strahlenpaar x, y die Achsen des Kegelschnittes ergeben (291). Hiernach können die genannten Elemente aus fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnittes konstruiert werden, ohne daß dieser vorher selbst verzeichnet werden müßte. Die Endpunkte der Achsen ergeben sich nach 328.

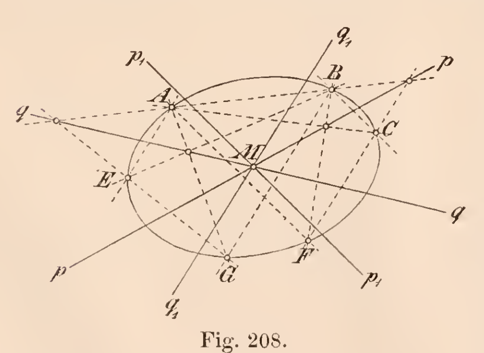


Fig. 208.

Die erforderlichen zwei Paare konjugierter Durchmesser werden am einfachsten folgendermaßen gefunden. Man konstruiere, ausgehend von den fünf gegebenen Punkten $ABCDE$ den zweiten Endpunkt F der Kegelschnittsehne $AF \parallel BC$ und ebenso den zweiten Endpunkt G der Sehne $BG \parallel AE$. (Diese Konstruktion, bei der man sich des Pascal'schen Satzes bedienen kann, ist in Fig. 208 als be-

reits vollzogen angenommen). Bei dem vollständigen Viereck $ABCF$ schneiden sich die zwei Paar nicht parallelen Gegenseiten in zwei Punkten eines Durchmessers p. Ebenso liefert das vollständige Viereck $ABGE$ einen Durchmesser q, der durch die Schnittpunkte der nicht parallelen Gegenseiten geht. Die zu p und q konjugierten Durchmesser p_1 und q_1 sind zu BC und AE resp. parallel (288).

324. Man kann die soeben behandelte Aufgabe auch in der Weise lösen, daß man nach 307 zu dem Kegelschnitt durch die fünf Punkte $ABCDE$ einen perspektiven Kreis zeichnet, Achse und Verschwindungslinie der Perspektive bestimmt und zu letzterer den Pol in Bezug auf den Kreis sucht. Diesem Pol entspricht der Mittelpunkt des zum Kreise perspektiven Kegelschnittes. Zugleich liefern je zwei Geraden durch den Pol, welche harmonische Polaren in Bezug auf den Kreis sind, als perspektive Bilder zwei konjugierte Durchmesser des Kegelschnittes samt ihren Endpunkten. Man hat nach 288 nur ein Polardreieck des Kreises zu suchen, dessen eine Seite die Verschwindungslinie ist und dasselbe perspektiv abzubilden.

325. Ist der Kegelschnitt durch fünf Tangenten $a\,b\,c\,d\,e$ gegeben, so findet man ein Paar konjugierter Durchmesser p und p_1 und damit den Mittelpunkt M, wie folgt. Man konstruiere mittels des Brianchon'schen Satzes zu zweien der gegebenen Tangenten die Paralleltangenten des Kegelschnittes, etwa $f \| a$, $g \| e$ (Fig. 209). (Beim Sechsseit $afedcb$ schneiden sich die Verbindungslinien von $e \times d$ und $a \times b$,

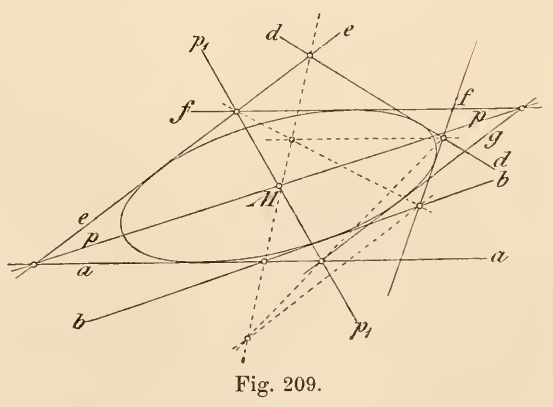


Fig. 209.

sowie von $f \times a$ und $c \times d$, d. h. die Parallele zu a durch $c \times d$. in einem Punkte, durch den auch die Verbindungslinie von $e \times f$ und $c \times b$ geht). Die Diagonalen des dem Kegelschnitt umgeschriebenen Parallelogramms $afge$ bilden ein Paar konjugierter Durchmesser p und p_1 (292). Aus zwei solchen Paaren können wiederum die Achsen des Kegelschnittes und — falls eine Hyperbel vorliegt — die Asymptoten abgeleitet werden. Auch kann man vermöge der Involution der konjugierten Durchmesser zu jedem Durchmesser den

konjugierten finden, und ist der erstere zu einer Tangente parallel, so geht der letztere durch ihren Berührungspunkt.

326. Um auf einer gegebenen Geraden g die Involution harmonischer Pole des Kegelschnittes $ABCDE$ zu konstruieren, hat man zu zwei beliebigen Punkten P und Q auf g die Polaren p und q nach 321 zu suchen. Diese schneiden g in den konjugierten Polen P_1 und Q_1 zu P und Q, sie schneiden sich außerdem gegenseitig in S, dem Pol von g (Fig. 210). Die Doppelstrahlen u und v der Involution harmonischer Polaren, die durch die Paare $SP = p_1$, $SP_1 = p$ und $SQ = q_1$, $SQ_1 = q$ bestimmt ist, sind die Tangenten des Kegelschnittes in seinen Schnittpunkten U und V mit der Geraden g. Zur Vereinfachung der Konstruktion wählt man etwa P auf dem Strahle CD und Q auf CB.

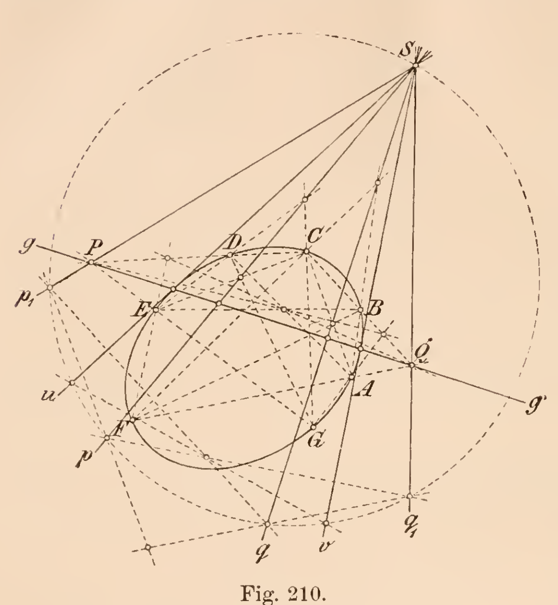


Fig. 210.

Analog kann man verfahren, um die Involution harmonischer Polaren des Kegelschnittes $abcde$ an einem gegebenen Scheitel S zu konstruieren. Man erhält zugleich auf der Polare g von S die Involution der konjugierten Pole. Die Doppelelemente bilden die Tangenten des Kegelschnittes aus dem Punkte S resp. die Schnittpunkte mit der Geraden g.

327. Eng verwandt mit diesen letzten Aufgaben sind auch die beiden folgenden. Von einem Punkte S sollen die beiden Tangenten an den Kegelschnitt $ABCDE$ gelegt werden. Man bestimme auf SA und SB die weiteren Kegelschnittpunkte F und H; dann liegen die Punkte $P = AH \times BF$ und $P_1 = AB \times FH$ auf der Polare g von S und bilden ein Paar harmonischer Pole. Ebenso schneiden CB und CH nach 283 ein Paar harmonischer Pole Q und Q_1 auf g aus (zugleich ist $BQ_1 \times HQ = J$ ein neuer Kurvenpunkt).

Die Punktepaare PP_1 und QQ_1 bestimmen eine Involution und ihre Doppelpunkte sind die Berührungspunkte der gesuchten Tangenten.

Eine Gerade g sei mit dem Kegelschnitt $abcde$ zu schneiden. Man lege aus den Punkten $g \times a$ und $g \times b$ die weiteren Tangenten f und h an den Kegelschnitt; dann schneiden sich die Geraden p und p_1, welche $a \times h$ und $b \times f$ resp. $a \times b$ und $f \times h$ verbinden, in dem Pol S von g und bilden ein Paar harmonischer Polaren. Ebenso erhält man ein Paar harmonischer Polaren q und q_1, wenn man S mit $c \times b$ und $c \times h$ verbindet. Die Strahlenpaare pp_1 und qq_1 bestimmen eine Involution, deren Doppelstrahlen den Kegelschnitt berühren und zwar in ihren Schnittpunkten mit g.

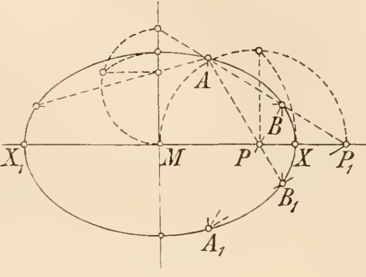


Fig. 211.

328. Auch die Endpunkte einer Achse bestimmt man mittels der Involution harmonischer Pole auf ihr. Der Mittelpunkt M des Kegelschnittes ist zugleich Mittelpunkt dieser Involution, da ihm die unendlich ferne Gerade als Polare zugehört. Sind A und B zwei Punkte des Kegelschnittes, so gehören ihm auch die in Bezug auf die Achse symmetrischen Punkte A_1 und B_1 an und es bilden $AB_1 \times BA_1 = P$ und $AB \times A_1B_1 = P_1$ ein Punktepaar der Involution, deren Doppelpunkte die Achsenendpunkte X und X_1 sind. Nach 226 gilt die Relation $(MX)^2 = MP \cdot MP_1$, und hiernach sind die Punkte X und X_1 in Fig. 211 konstruiert.

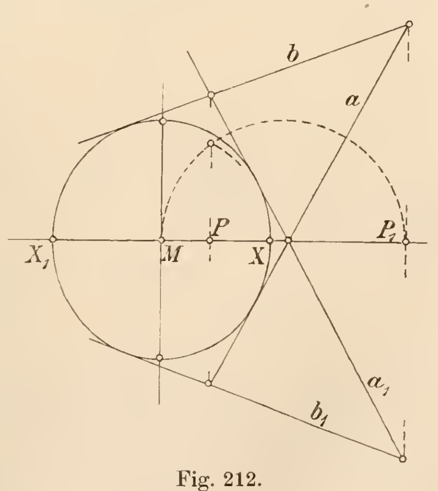


Fig. 212.

Sind vom Kegelschnitt zwei Tangenten a und b gegeben und sind a_1 und b_1 die in Bezug auf die Achse symmetrischen Tangenten, so schneiden die Verbindungslinien von $a \times b$ mit $a_1 \times b_1$ und von $a \times b_1$ mit $a_1 \times b$ zwei harmonische Pole P und P_1 auf der Achse aus. Denn die Achse bildet mit den genannten Verbindungslinien ein Polardreieck des Kegelschnittes nach 276. Die weitere Konstruktion der Achsenendpunkte ist dann wieder wie vorher (Fig. 212).

329. Um zu entscheiden, welche Art von Kegelschnitt zwei projektive Strahlbüschel erzeugen, beachte man, daß ein unendlich ferner Punkt desselben nur erhalten wird, wenn zwei entsprechende Strahlen der erzeugenden Büschel zu einander parallel laufen. Verschiebt man den einen Strahlbüschel parallel mit sich selbst, bis sich sein Scheitel mit dem des andern deckt, so kommen auch die sich entsprechenden Parallelstrahlen zur Deckung. Daher folgt: Zwei projektive Strahlbüschel in schiefer Lage erzeugen eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem sie, durch Parallelverschiebung an einem Scheitel vereinigt, zwei getrennte, zwei vereinte oder keine Doppelstrahlen bestimmen. Die Anwendung dieses Kriteriums ist nur bei gleichlaufenden Büscheln erforderlich, zwei entgegenlaufende Büschel erzeugen offenbar stets eine Hyperbel.

330. Zwei projektive Punktreihen erzeugen eine Parabel, wenn sich ihre unendlich fernen Punkte entsprechen, oder wenn sie ähn-

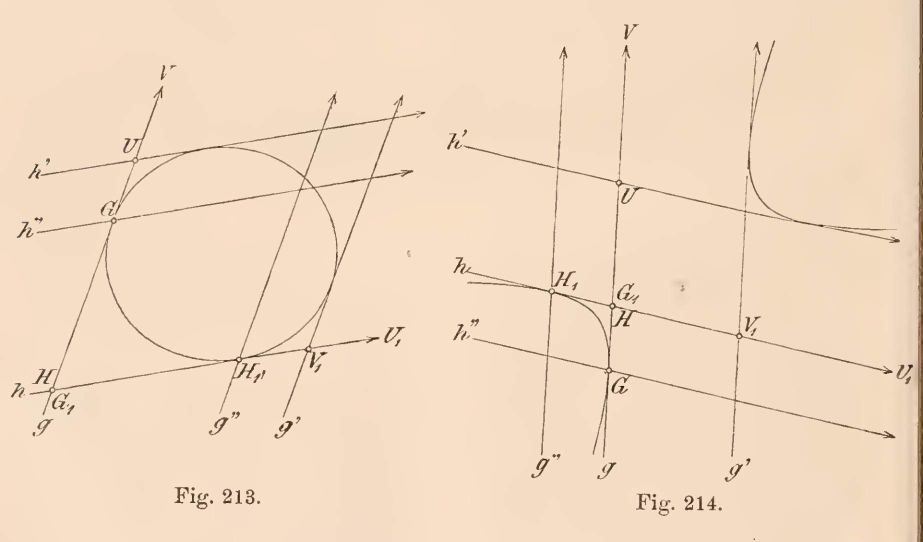


Fig. 213.

Fig. 214.

lich sind, denn alsdann ist die unendlich ferne Gerade als Verbindungslinie entsprechender Punkte eine Tangente des entstehenden Kegelschnittes.

Zur Bestimmung eines Kegelschnittes seien zwei (nicht ähnliche) Punktreihen g und h gegeben; ihre unendlich fernen Punkte seien U_1 und V. Man konstruiere die Gegenpunkte U und V_1, sowie die dem Schnittpunkte ($G_1 = H$) der Träger entsprechenden Berührungspunkte G und H_1 und ziehe die Parallelen h' und h'', g' und g'' resp.

zu h und g (Figg. 213 und 214). Zwei parallele Tangenten des Kegelschnittes begrenzen in der Ebene einen Flächenstreifen, und der Kegelschnitt liegt entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb desselben, je nachdem er eine Ellipse oder Hyperbel vorstellt. Denn beide Kurven sind geschlossen, sie müssen also entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb liegen, sonst würden sie den Rand des Streifens überschneiden. Daß wir es im ersten Fall mit der Ellipse, im zweiten Fall mit der Hyperbel — die aus zwei Ästen besteht — zu thun haben, ist evident. Die Tangenten $g g' h h'$ bilden ein Parallelogramm, das die Ellipse umschließt, ihre Berührungspunkte liegen auf seinen Seiten. Bei der Hyperbel schließt das Parallelogramm der Tangenten $g g' h h'$ die Kurve aus; ihre Berührungspunkte liegen auf den verlängerten Seiten desselben.

Zwei projektive Punktreihen in schiefer Lage erzeugen eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem in einer der Reihen der Berührungspunkt zwischen ihrem Gegenpunkt und ihrem Schnittpunkt mit der andern Reihe liegt oder nicht. Eine Parabel entsteht, wenn der Gegenpunkt unendlich fern liegt.

331. Die Abschnitte, welche auf zwei parallelen Tangenten t und u eines Kegelschnittes zwischen ihren Berührunngspunkten T und U und ihren Schnittpunkten P und Q mit irgend einer dritten Tangente v liegen, haben ein konstantes Produkt:

$$PT \,.\, QU = \text{konst.}$$

Werden nämlich S auf t und R auf u durch irgend eine vierte Tangente w ausgeschnitten, so schneiden sich PR und QS in einem Punkte N von TU nach 266, und man hat (Fig. 215): $PT : UR = TS : QU$, oder:

$$PT \,.\, QU = ST \,.\, RU.$$

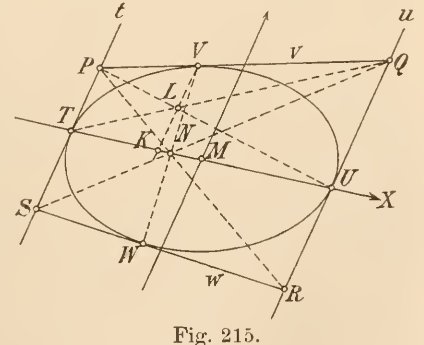


Fig. 215.

Bei der Ellipse liegen die Schnittpunkte jeder weiteren Tangente mit den parallelen Tangenten t und u auf der nämlichen Seite von TU, bei der Hyperbel aber nicht, wie aus der vorigen Nummer hervorgeht.

Läßt man bei einer Ellipse die Gerade v parallel zu TU werden, so findet man den konstanten Wert des Produktes:

$$PT \,.\, QU = b^2,$$

wo $2b$ den zu $TU = 2a$ konjugierten Durchmesser bezeichnet. Gehen t, u, v, w in die vier Scheiteltangenten der Ellipse über (Fig. 216a), so bedeuten a und b die Halbachsen.

Läßt man dagegen bei der Hyperbel die Gerade v in eine Asymptote übergehen, so ergiebt sich, da jetzt PT und QU entgegengesetzte Richtung haben:

$$PT \, . \, QU = -b^2,$$

wo $2b$ das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers $TU = 2a$ bezeichnet. Gehen speziell t, u, v, w in die Scheiteltangenten und Asymptoten über

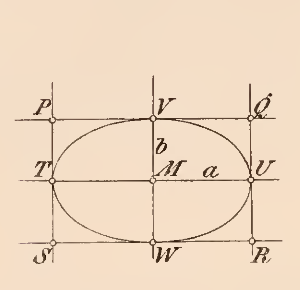


Fig. 216a.

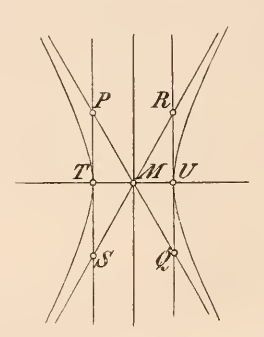


Fig. 216b.

(Fig. 216b), so bedeutet a die reelle Halbachse der Hyperbel, während man b als imaginäre Halbachse bezeichnet.

332. Es seien MX und MY konjugierte Durchmesser des Kegelschnittes, und zwar sei MY parallel zu den Tangenten t und u, während MX durch ihre Berührungspunkte T und U geht. Wir legen ihnen (wie in Fig. 215 durch Pfeile angedeutet) einen bestimmten Durchlaufungssinn bei. Die parallel zu MX und MY gemessenen Abstände irgend eines Punktes der Ebene von MY resp. MX nennen wir seine Koordinaten x, y und geben ihnen das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem sie mit MX und MY von gleichem Sinne sind, oder nicht. X und Y seien die unendlich fernen Punkte der betrachteten konjugierten Durchmesser. Letztere würden in der Sprache der analytischen Geometrie als Achsen des schiefwinkligen Koordinatensystems zu bezeichnen sein und ihr Schnittpunkt M als Koordinatenanfangspunkt.

Das Dreieck PQY ist dem Kegelschnitt umschrieben; die Verbindungslinien seiner Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten: PU, QT, YV schneiden sich daher in einem Punkte L (273).

Ist also noch: $K = MX \times VY$, d. h. $VK \parallel MY$, so ergeben sich die Beziehungen:

$$KL : TP = KU : TU = VQ : PQ = LV : TP, \text{ also } KL = LV;$$
$$KL : UQ = KT : UT, \text{ also } (KL . TU)^2 = KU . TK . TP . UQ.$$

Setzt man x, y als die Koordinaten des Kegelschnittpunktes V ein, so hat man $MK = x$ (in der Figur ist x negativ), $KV = y = 2\,KL$, $KU = a - x$, $TK = a + x$ und überdies $TP . UQ = \pm b^2$, je nachdem eine Ellipse oder Hyperbel vorliegt. Demnach erhält man:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

als Gleichung der Ellipse und:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

als Gleichung der Hyperbel, beide bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser (oder speziell die Achsen) als Koordinatenachsen.

333. Der Satz über das einem Kegelschnitt umschriebene Viereck, wonach seine Diagonalen und die Verbindungslinien der Berührungspunkte seiner Gegenseiten durch den nämlichen Punkt gehen (266), läßt noch eine sehr wertvolle Anwendung auf die Hyperbel zu, wenn man zwei Gegenseiten dieses Vierecks mit den Asymptoten zusammenfallen läßt. In Fig. 217 stellt $PQRS$ ein solches Viereck dar, und es müssen sich seine Diagonalen PR und QS auf der unendlich fernen Geraden schneiden, da die letztere die Berührungspunkte der Asymptoten verbindet. Aus dem Parallelismus von PR und QS folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke MPR und MQS, und diese liefert die Relation:

$$MP . MS = MQ . MR = \text{konst.}$$

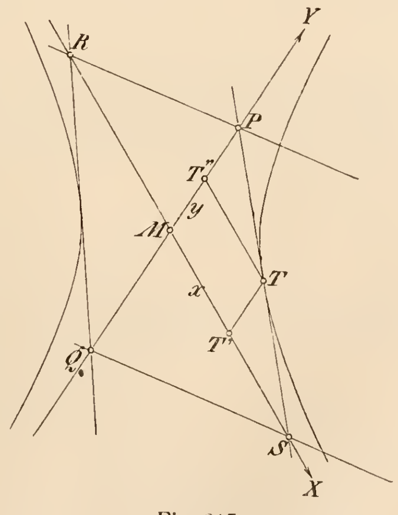


Fig. 217.

Denn wenn das Produkt für zwei beliebige Tangenten gleich ist, so muß es konstant für alle Tangenten sein. Die Hyperbeltangenten schneiden auf den Asymptoten Strecken ab, deren Produkt konstant ist. Oder mit anderen Worten: Das von einer beliebigen Tangente der

Hyperbel und ihren Asymptoten begrenzte Dreieck hat konstanten Flächeninhalt.

Faßt man PMS als ein der Hyperbel umschriebenes Dreieck auf, so müssen sich die Verbindungslinien seiner Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten in einem Punkte schneiden. Ist also T der Berührungspunkt der Tangente PS, so geht MT durch den Schnittpunkt der Geraden, die man durch P und S resp. zu MS und MP parallel ziehen kann. T ist demnach der Mittelpunkt des Parallelogramms mit den Seiten MP und MS und halbiert die Strecke PS. Die von den Asymptoten auf einer beliebigen Hyperbeltangente begrenzte Strecke wird vom Berührungspunkt halbiert.

334. Nimmt man die Asymptoten als Koordinatenachsen und setzt für den Hyperbelpunkt T die Koordinaten:

$$x = MT' = \tfrac{1}{2} MS, \quad y = MT'' = \tfrac{1}{2} MP$$

an, so folgt als Gleichung der Hyperbel:

$$xy = \text{konst.}$$

Das Produkt der Abstände eines Hyperbelpunktes von den Asymptoten ist konstant, wenn diese Abstände jedesmal in der Parallelen zur andern Asymptote gemessen werden. Oder auch: Das Produkt der Abstände eines Hyperbelpunktes von den Asymptoten ist konstant, wenn alle Abstände in der gleichen Richtung gemessen werden. Denn sind P und Q zwei Hyperbelpunkte und MP', MP'', MQ', MQ'' die zugehörigen Koordinaten (Fig. 218), so ist: $MP' : MQ' = MQ'' : MP''$. Schneiden nun zwei Parallelen durch P und Q die Asymptoten in A_1, A_2, resp. B_1, B_2, so folgt:

$$MP' : MQ' = PA_1 : QB_1$$

und:

$$MP'' : MQ'' = PA_2 : QB_2.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen stimmen überein, also auch die rechten; so ergiebt sich die gewünschte Relation:

$$PA_2 . PA_1 = QB_2 . QB_1.$$

Stehen die Asymptoten einer Hyperbel aufeinander senkrecht, so heißt sie gleichseitig. In diesem Falle folgt nämlich aus 331 : $b = a$.

335. Die konjugierten Durchmesser eines Kegelschnittes bilden eine Involution und bei der Hyperbel sind die Asymptoten die Doppelstrahlen dieser Involution (290). Demnach liegen die Asymptoten der Hyperbel zu jedem Paare konjugierter Durchmesser harmonisch. Zieht man also (Fig. 219) zu irgend einem Durchmesser

eine Parallele DE, so halbiert der konjugierte Durchmesser die Strecke DE, welche von den Asymptoten auf ihr abgeschnitten wird ($CD = CE$). Andererseits wird aber jede zu einem Durchmesser parallele Sehne vom konjugierten Durchmesser halbiert, so daß $CA = CB$ ist. Die Strecken, welche auf einer Sekante

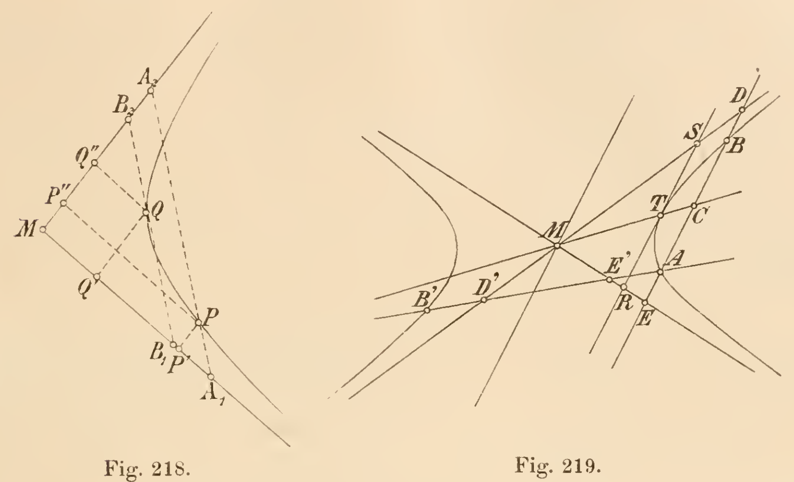


Fig. 218. Fig. 219.

zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten liegen, sind einander gleich ($AE = BD$).

Daraus ergiebt sich auch wieder das obige Resultat für die Tangente, nämlich $TR = TS$. Aus dem Gesagten kann man die Hyperbel leicht konstruieren, wenn man ihre Asymptoten und einen ihrer Punkte A kennt. Auf einem Strahl durch A, der die Asymptoten in D und E trifft, erhält man den zweiten Hyperbelpunkt B durch die Relation $BD = AE$.

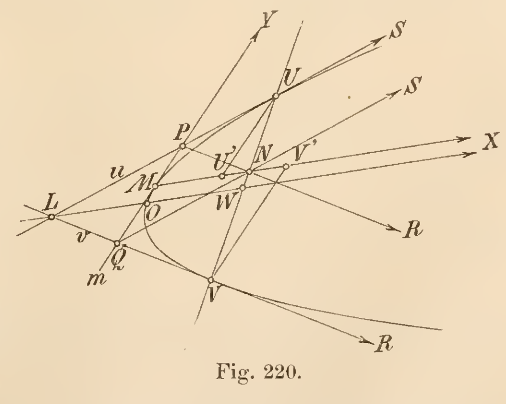


Fig. 220.

336. Verbindet man die Mitte W der Sehne UV eines Kegelschnittes mit dem Schnittpunkt L der in U und V gezogenen Tangenten, so ist WL ein Durchmesser. Führen wir diese Konstruktion insbesondere bei der Parabel aus (Fig. 220), so geht dieselbe durch die Mitte O der

Strecke LW, da L und UV als Pol und Polare den genannten Durchmesser, dessen einer Endpunkt unendlich fern ist, harmonisch teilen. Es besteht also der Satz: Die Strecke zwischen dem Mittelpunkt einer Parabelsehne und ihrem Pole wird von der Parabel halbiert.

Wie in 333 der Hyperbel, so wollen wir jetzt der Parabel ein Viereck umschreiben, und zwar wählen wir als dessen Seiten drei beliebige Tangenten u, v, m und die unendlich ferne Gerade. Sind U, V und M die Berührungspunkte von u, v und m, sind ferner P und Q die Schnittpunkte von u und v mit m, endlich S und R die auf u und v liegenden unendlich fernen Punkte, so schneiden sich $PR(\parallel v)$ und $QS(\parallel u)$ in einem Punkte N, durch den sowohl die Sehne UV als auch der durch M gezogene Durchmesser gehen. Daraus folgt:

$$PU : PL = NU : NV = QL : QV.$$

Auf zwei Parabeltangenten werden die Strecken zwischen ihrem Schnittpunkt und ihren Berührungspunkten von jeder weiteren Tangente nach demselben Verhältnis geteilt.

337. Ziehen wir in unserer Figur noch $UU' \parallel VV' \parallel m$ (U' und V' auf MN), so können wir

$$x = MU',\ y = U'U \text{ als Koordinaten von } U$$

und

$$x_1 = MV',\ y_1 = V'V \text{ als Koordinaten von } V$$

ansehen. Dabei spielen die Tangente in M und der durch M gehende Parabeldurchmesser die Rolle der Koordinatenachsen. Nun verhalten sich zwei parallele Strecken PU und QN ebenso wie ihre Parallelprojektionen MU' und MN auf die Gerade MX, also:

$$MU' : MN = PU : QN = NU : VN = UU' : VV';$$

ferner

$$MN : MV' = PN : QV = NU : VN = UU' : VV'.$$

Durch Multiplikation folgt hieraus als Gleichung der Parabel:

$$x : x_1 = y^2 : y_1^2, \quad \text{oder} \quad y^2 : x = y_1^2 : x_1 = \text{konst.}$$

Wählt man irgend einen Durchmesser der Parabel zur Abscissenachse und die Tangente in seinem Endpunkte zur Ordinatenachse, so verhalten sich die Abscissen der Parabelpunkte wie die Quadrate ihrer Ordinaten. Insbesondere verhalten sich die senkrechten Abstände der Parabelpunkte von der Scheiteltangente, wie die Quadrate ihrer Abstände von der Achse der Parabel.

338. Schon im vorigen Abschnitt (307 und 308) sind perspektive Beziehungen zwischen einem beliebigen Kegelschnitt und einem Kreise hergestellt worden. Von der dort behandelten ebenen Per-

spektive kann man leicht zur räumlichen Perspektive übergehen, indem man den Kegelschnitt um die Perspektivitätsachse aus der gemeinsamen Ebene herausdreht. Hier erscheint dann der Kegelschnitt als Kurve auf einem schiefen Kreiskegel. Es läßt sich aber zeigen, daß man durch jeden Kegelschnitt auch Rotationskegel legen kann und zwar unendlich viele. Umgekehrt lassen sich aus einem gegebenen Rotationskegel alle möglichen Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln (die letzteren nur innerhalb gewisser Grenzen) ausschneiden, und dieser Frage wollen wir jetzt näher treten.

Man soll aus einem gegebenen Rotationskegel eine Ellipse mit den vorgegebenen Halbachsen a und b ausschneiden ($a > b$).

Wir legen durch die Kegelachse l eine Ebene Π, Meridianebene, die den Kegelmantel in zwei Erzeugenden m und m_1 schneidet (Fig. 221 a), dabei sei der am Scheitel S gelegene Winkel $\angle mm_1 = \alpha$. Alle zur Meridianebene Π normalen Sehnen des Kegels werden von dieser aus Gründen der Symmetrie halbiert. Es gilt nun der Satz: Die Mittelpunkte aller zu einer Meridianebene normalen Sehnen des Rotationskegels, welche eine vorgeschriebene Länge $2b$ besitzen, liegen auf einer Hyperbel. Die Asymptoten sind die in der Meridianebene liegenden Erzeugenden m und m_1, sie schneiden auf der Scheiteltangente die Strecke $2b$ ab. Es möge O ein beliebiger Punkt von Π sein, in dem die normale Sehne die Länge $2b$ aufweist, und ebenso sei L ein Punkt der Kegelachse l mit einer normalen Sehne von der Länge $2b$. Zieht man ferner durch O und L Senkrechte zur Kegelachse und schneiden diese die Erzeugenden in M und M_1 resp. in J und J_1, so gelten die Relationen $OM \cdot OM_1 = b^2$ und $LJ \cdot LJ_1 = b^2$; da ja die normalen Kegelsehnen in O und L zugleich Sehnen der über den Durchmessern MM_1 und JJ_1 beschriebenen Kreise sind. Nach 334 liegt somit O auf einer Hyperbel

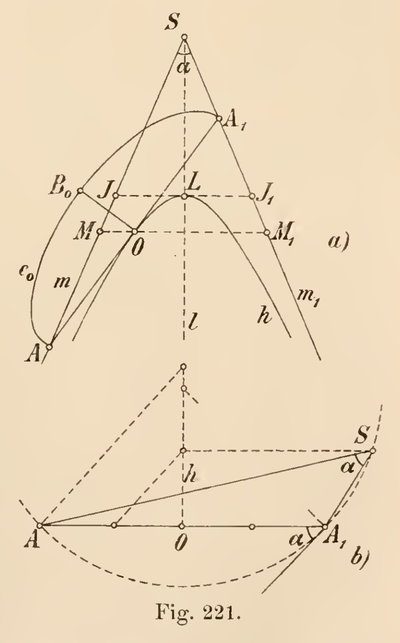


Fig. 221.

h mit den Asymptoten m und m_1 und dem Scheitel L. (Die Endpunkte aller zu Π normalen Sehnen von der Länge $2b$ liegen auf zwei zu h parallelen Hyperbeln.)

Soll nun die in O auf Π senkrechte Kegelsehne $BB_1 (= 2b)$ die kleine Achse einer Ellipse sein, so ist O der Mittelpunkt ihrer großen Achse AA_1, die von den Erzeugenden m und m_1 begrenzt wird. Demnach muß AA_1 die Hyperbel h in O berühren. Die großen Achsen aller auf dem Rotationskegel liegender Ellipsen, deren kleine Achsen zur Meridianebene Π normal und von der Länge $2b$ sind, tangieren die genannte Hyperbel h in ihren Mittelpunkten.

339. Diese Hyperbel h hat nach 333 die Eigenschaft, daß $SA \,.\, SA_1 = SJ \,.\, SJ_1$ ist, oder daß die Dreiecke SAA_1 und SJJ_1 gleichen Flächeninhalt besitzen. Richtet man es insbesondere so ein, daß AA_1 die vorgeschriebene Länge $2a$ hat, so stellt AA_1 die große Achse einer auf dem Kegel liegenden Ellipse e mit den vorgegebenen Halbachsen a und b dar. Diese Aufgabe erfordert die Konstruktion des Dreiecks SAA_1, von dem man die Länge der Seite AA_1, den gegenüberliegenden Winkel α und den Inhalt $(= \triangle SJJ_1)$ kennt. In Fig. 221 b ist diese Konstruktion ausgeführt. Es ist AA_1 mit dem Mittelpunkt O angenommen, dann ist die Höhe h des $\triangle SAA_1$ aus der Proportion $h : SL = LJ : OA$ abgeleitet (in den Dreiecken JJ_1S und AA_1S verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen). Die Ecke S liegt also auf einer Parallelen zu AA_1 im Abstande h und auf einem Kreise, der über der Sehne AA_1 beschrieben ist und $\angle\, \alpha$ als zugehörigen Peripheriewinkel faßt. Trägt man nun noch die Strecken SA und SA_1 von S aus auf m und m_1 auf, so ist AA_1 die große Achse der gesuchten Ellipse e, deren Ebene auf Π senkrecht steht. In der Figur 221 a ist sie um AA_1 in Π als e_0 umgelegt.

340. Ein Rotationskegel soll in einer vorgegebenen Parabel geschnitten werden.

Wir nehmen wie vorher eine Meridianebene Π an, die aus dem Kegel zwei Mantellinien m und m_1 ausschneidet. Dann schneiden alle zu Π senkrechten Ebenen, deren Spurlinien in Π zu m (resp. m_1) parallel sind, aus dem Kegel Parabeln aus. Die vorgegebene Parabel p ist durch die Richtung ihrer Achse a, den Scheitel A auf ihr und einen ihrer Punkte B völlig bestimmt (Fig. 222 b). Man ziehe also (Fig. 222 a) zu m eine Parallele n, die auf m_1 die Strecke $SP = AO$ abschneidet, errichte in S auf l die Normale, welche n in Q trifft, und trage an Q die Strecke $QR = OB$ senkrecht zu QS an. Dann bestimme man K auf SQ so, daß $\angle\, SRK = 90^0$ ist, und M_1 auf m_1

durch die Gerade $KM_1 \parallel m$; hierauf ziehe man senkrecht zu l die Gerade MM_1, welche n in O begegnet. Die zu Π senkrechte Ebene, deren Spur a durch O und parallel zu m_1 geht, schneidet aus dem Kegel die verlangte Parabel p aus. Ihr Scheitel A liegt nämlich in $m \times a$ und sie besitzt im Abstand AO eine zu a normale Sehne BB_1 von der vorgeschriebenen Länge. Denn das Quadrat der halben Sehne ist gleich $OM \cdot OM_1 = QS \cdot QK = (QR)^2$, wie verlangt. In der Figur ist die Parabel um a als p_0 umgelegt.

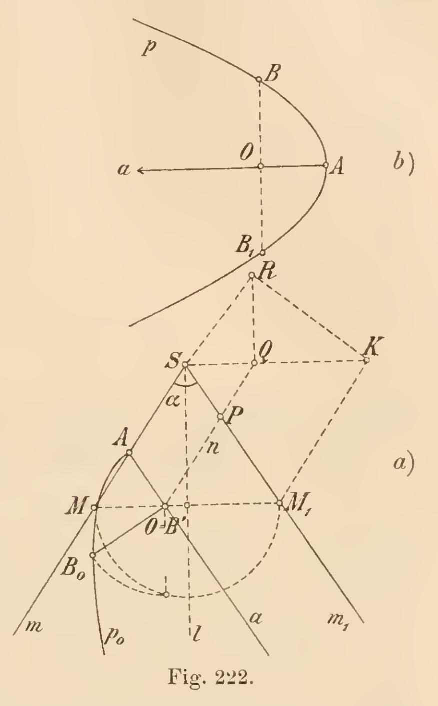


Fig. 222.

341. Einen Rotationskegel in einer vorgeschriebenen Hyperbel zu schneiden.

Die Hyperbel h ist durch den Winkel ε ihrer Asymptoten und die Größe $2a$ ihrer reellen Achse der Gestalt nach völlig bestimmt. Man gehe nun wieder von einer Meridianebene Π aus und den beiden Erzeugenden m und m_1 in ihr ($\angle\, mm_1 = \alpha$) (Fig. 223). Schneidet eine zu Π normale Ebene E den Kegel in einer Hyperbel, so schneidet eine zu ihr parallele Ebene durch die Kegelspitze S ein Paar Mantellinien u und v aus. Auf ihnen liegen die unendlich fernen Punkte der Hyperbel, d. h. sie sind zu deren Asymptoten parallel. Soll also E die verlangte Hyperbel h ausschneiden, so müssen u und v den Winkel ε miteinander einschließen. Das ist aber nur dann möglich, wenn $\varepsilon \leqq \alpha$ ist. Um u und v zu finden, lege man einen Normalschnitt zur Kegelachse l,

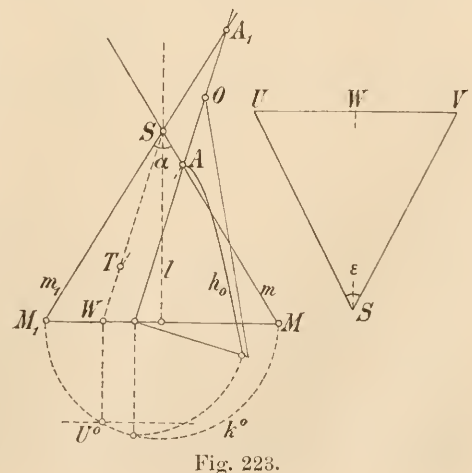


Fig. 223.

der m, m_1, u, v resp. in den Punkten M, M_1, U, V schneiden mag ($SM = SM_1 = SU = SV$). Dieser schneidet den Kegel in einem Kreis k, für welchen MM_1 ein Durchmesser und UV eine Sehne ist, und es gilt die Relation $WM \cdot WM_1 = (WU)^2$, ($W = UV \times MM_1$). WU ist aber die halbe Basis des gleichschenkligen Dreiecks SUV, das sich aus der Länge seiner Schenkel ($= SM$) und dem Winkel ε an seiner Spitze zeichnen läßt, so daß sich daraus auch der Punkt U auf k ergiebt (in der Figur sind k und U in der Umlegung k^0 und U^0 gezeichnet) und dann der Punkt W auf MM_1. Trägt man noch auf SW die Strecke $ST = 2a$ auf und zeichnet das Parallelogramm $STAA_1$, dessen Ecken A und A_1 auf m resp. m_1 liegen, so ist AA_1 der Lage und der Länge nach die reelle Achse der gesuchten Hyperbel h. In der Figur ist die um AA_1 umgelegte Hyperbel h_0 angegeben.

Gesetz der Dualität. Reciprokalfiguren in Bezug auf einen Kegelschnitt. Aufgaben zweiten Grades. Imaginäre Lösungen.

342. In den vorausgehenden Entwicklungen weist die öfters bemerkbare paarweise Gegenüberstellung von Sätzen auf ein allgemeines geometrisches Gesetz hin, welches sowohl die ebenen wie die räumlichen Figuren beherrscht: das Gesetz der Dualität. Seine Bedeutung besteht darin, daß aus jedem synthetisch-geometrischen Satze sofort ein anderer abgeleitet werden kann, indem man gewisse sich entsprechende Begriffe durcheinander ersetzt. Es nimmt zwei verschiedene Formen an, je nachdem man Figuren in der Ebene oder im Raume betrachtet.

343. In der Ebene bilden der Punkt und die Gerade die sich dual entgegenstehenden Begriffe, weil beide für die Zusammensetzung der ebenen Gebilde als Elemente betrachtet werden können und weil die hierbei allein zur Geltung kommenden Grundgesetze:

Zwei Punkte bestimmen eine Gerade;	Zwei Gerade bestimmen einen Punkt;

durch Vertauschung beider Begriffe auseinander hervorgehen. Demnach entsprechen allen Punkten einer Geraden (einer Punktreihe) alle Gerade durch einen Punkt (ein Strahlbüschel), einem vollständigen Viereck mit seinen sechs Seiten ein vollständiges Vierseit mit seinen sechs Ecken, also vier harmonischen Punkten vier harmonische Strahlen, perspektiven resp. projektiven Punktreihen perspektive resp. projektive Strahlbüschel, dem Kegelschnitt als Erzeugnis

projektiver Strahlbüschel ein Kegelschnitt als Erzeugnis projektiver Punktreihen, den Punkten des ersteren also die Tangenten des letzteren, einem Pascal'schen Sechseck ein Brianchon'sches Sechsseit u. s. f.

344. Im Raume bilden der Punkt und die Ebene dual entgegengesetzte Begriffe, der geraden Linie entspricht wieder eine gerade Linie. In der That lassen die für die Zusetzung der Raumgebilde aus diesen Elementen geltenden Grundgesetze die Vertauschung der als dual bezeichneten Begriffe zu. Es sind diese:

Zwei Punkte bestimmen eine Gerade;	Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade;
Drei Punkte bestimmen eine Ebene, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen;	Drei Ebenen bestimmen einen Punkt, wenn sie nicht durch eine Gerade gehen.

Einfache Beispiele dualer Sätze sind die folgenden:

Beliebig viele Gerade liegen in einer Ebene, wenn je zwei einen, aber nicht alle denselben Punkt gemein haben.	Beliebig viele Gerade gehen durch einen Punkt, wenn je zwei eine, aber nicht alle dieselbe Verbindungsebene haben.
Eine gemeinsame Sekante dreier windschiefer Geraden ist die Schnittlinie der Verbindungsebenen, die ein Punkt der ersten mit jeder der beiden andern bestimmt.	Eine gemeinsame Sekante dreier windschiefer Geraden ist Verbindungslinie der Schnittpunkte, die eine Ebene durch die erste mit jeder der beiden andern bestimmt.

345. Dem Gesetz der Dualität sind nur die Eigenschaften der Figuren unterworfen, die reine Lagebeziehungen ihrer Elemente ausdrücken und folglich durch Projektion nicht zerstört werden (projektive Eigenschaften). Die an den Figuren stattfindenden metrischen Relationen unterliegen jenem Gesetz nicht, weil sie Begriffe enthalten, für die wir dual entgegengesetzte nicht haben, nämlich den Begriff der Strecke und den des Winkels. Beispielsweise entspricht zwar der Konstruktion der Doppelstrahlen zweier involutorischer Büschel (317) durch Dualität die Konstruktion der Doppelpunkte zweier involutorischer Reihen (318), aber dieses Entsprechen erstreckt sich nicht auf die Bestimmung des Rechtwinkelpaares der Strahleninvolution und die des Mittelpunktes der Punktinvolution.

346. Duale Figuren in der Ebene können insbesondere, die eine aus der andern, nach einem bestimmten Gesetz abgeleitet werden; man bezeichnet es als das Gesetz der Reciprozität in Bezug auf einen Kegelschnitt und nennt letzteren die Direktrix (den Leitkegelschnitt) der Reciprozität. Denkt man sich nämlich zu allen Punkten und Geraden einer ebenen Figur $\mathfrak{F}_1$ die Polaren und Pole in Bezug auf einen gegebenen Leitkegelschnitt k konstruiert, so bilden diese eine duale Figur $\mathfrak{F}_2$, von der man rückwärts auf die gleiche Art wieder zu der Anfangsfigur $\mathfrak{F}_1$ gelangt. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ heißen polarverwandte oder Reciprokalfiguren in Bezug auf die Direktrix k. Jeder Punktreihe der einen Figur entspricht ein mit ihr projektiver Strahlbüschel der andern und umgekehrt (281); projektiven und speziell involutorischen Reihen der einen Figur entsprechen projektive, bezw. involutorische Büschel der andern u. s. f.

347. Als Beispiel führen wir an, daß man die drei Kegelschnittgattungen als Reciprokalfiguren eines Kreises k_1 in Bezug auf einen andern Kreis k als Direktrix erhält. Indem man sich k_1 durch zwei projektive (kongruente) Strahlbüschel erzeugt denkt, ergiebt sich für die Reciprokalkurve eine Erzeugung durch zwei projektive Punktreihen; sie ist daher jedenfalls ein Kegelschnitt k_2. Den Punkten und Tangenten von k_1 entsprechen die Tangenten und Punkte von k_2. Nun gehört zu dem Centrum M des Leitkreises k als Polare in Bezug auf

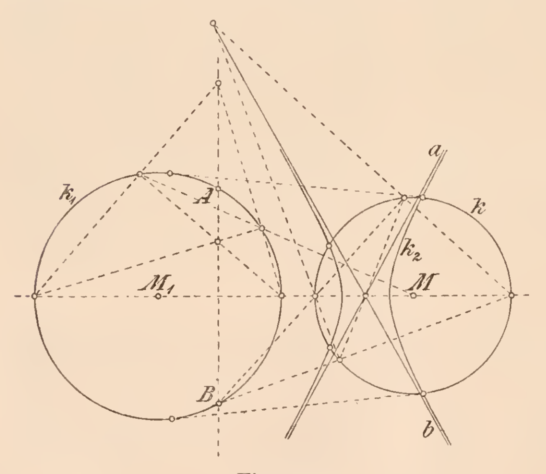


Fig. 224.

k die unendlich ferne Gerade, ferner gehören zu den Punkten A und B von k_1, deren Tangenten durch M gehen, als Polaren in Bezug auf k zwei Gerade a und b ($a \perp AM$, $b \perp BM$). Da A und B auf k_1 liegen, so sind a und b Tangenten von k_2, und da die zu A und B gehörigen Tangenten durch M gehen, so liegen die Berührungspunkte von a und b mit k_2 unendlich fern; d. h. a und b sind die Asymptoten von k_2 (Fig. 224). Einer gemeinsamen

Tangente von k_1 und k gehört als Polare ihr Berührungspunkt mit k zu; durch diesen Punkt geht also k_2 hindurch. Nach dem Gesagten ist ersichtlich, daß die Reciprokalkurve eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist, je nachdem das Centrum M des Leitkreises k außerhalb, auf oder innerhalb der Peripherie des gegebenen Kreises k_1 liegt.

348. Eine Konstruktion, die nur gerade Linien benutzt, heißt linear; ihr Resultat ist unzweideutig bestimmt. Bei allen Aufgaben, die nur eine bestimmte Lösung zulassen, darf man umgekehrt stets eine lineare Konstruktion erwarten; sie heißen Aufgaben ersten Grades. Probleme dagegen, zu deren Lösung ein Kegelschnitt erforderlich ist, besitzen im allgemeinen zwei Lösungen und heißen Aufgaben zweiten Grades; zu ihrer Konstruktion bedient man sich in der Regel eines Kreises. Da die Gerade und der Kreis die einzigen Gebilde sind, die sich unmittelbar zeichnen lassen, so ist klar, daß man jede kompliziertere Aufgabe, soweit thunlich, auf solche vom ersten und zweiten Grade zurückzuführen suchen muß. Wir haben uns hier nur mit den letzteren zu beschäftigen.

349. Für alle Probleme zweiten Grades bilden die folgenden zwei die Grundlage:

die Schnittpunkte eines Kegelschnittes (Kreises) mit einer gegebenen Geraden zu bestimmen;

die Tangenten an einen Kegelschnitt (Kreis) aus einem gegebenen Punkte zu bestimmen;

sie stehen einander dual gegenüber und lassen sich unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte betrachten. Ihre Lösungen bilden nämlich bezw.

die Doppelpunkte der Involution harmonischer Pole, welche der Kegelschnitt auf der gegebenen Geraden bestimmt;

die Doppelstrahlen der Involution harmonischer Polaren, welche der Kegelschnitt an dem gegebenen Punkte bestimmt.

Die Fundamentalaufgabe lautet daher in allgemeinster Fassung so:

Gegeben sind zwei projektive Punktreihen oder Strahlbüschel mit demselben Träger; man soll ihre sich selbst entsprechenden Elemente konstruieren.

350. Denkt man sich die gegebenen Gebilde nach analytischer Methode durch Gleichungen zwischen den Koordinaten ihrer Punkte

oder Geraden dargestellt, so wird jedes geometrische Problem abhängig sein von der Auflösung gewisser Gleichungen. Die uns vorliegenden Aufgaben zweiten Grades im besonderen führen auf algebraische Gleichungen zweiten Grades mit reellen Koëffizienten. Die drei möglichen Fälle, daß die betreffende Gleichung zweiten Grades, zwei reelle verschiedene, zwei reelle gleiche oder zwei konjugiert imaginäre Wurzeln hat, entsprechen genau denen, wo sich auf konstruktivem Wege zwei getrennte, vereinte oder keine die Aufgabe befriedigenden Elemente finden lassen. Die nicht konstruierbaren, sondern nur analytisch definierten Lösungen werden aus Zweckmäßigkeitsgründen auch in der synthetischen Geometrie mitgezählt als imaginäre geometrische Elemente.

Indem wir es als selbstverständlich ansehen, daß die beiden Lösungen einer Aufgabe zweiten Grades reell oder konjugiert magimär sein, bezw. durch Koincidenz eine besondere reelle Lösung bestimmen können, wird es überflüssig, dies bei den einzelnen Sätzen ausdrücklich hervorzuheben. Wir sagen also z. B.:

Je zwei projektive Grundgebilde (Ebenen-, Strahlbüschel oder Punktreihen) mit einerlei Träger bestimmen zwei Doppelelemente (sich selbst entsprechende Elemente).

Auf jeder Geraden der Ebene liegen zwei Punkte eines gegebenen Kegelschnittes.

Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Tangenten eines gegebenen Kegelschnittes.

351. Konstruktiv sind nur reelle geometrische Elemente verwendbar; wenn trotzdem von einer Konstruktion aus imaginären Elementen gesprochen wird, so ist dies nur eine abgekürzte Ausdrucksweise. Man sieht dann nur reelle Elemente als gegeben an, die durch ihre Beziehung zu einander die imaginären ersetzen.

Zwei konjugiert imaginäre Punkte werden durch hinreichend viele reelle Punktepaare gegeben, die auf der reellen Verbindungslinie zwei projektive (involutorische) Punktreihen mit den gedachten Punkten als Doppelelementen bestimmen.

Zwei konjugiert imaginäre Strahlen werden durch hinreichend viele reelle Strahlenpaare gegeben, die an dem reellen Schnittpunkt zwei projektive (involutorische) Strahlbüschel mit den gedachten Strahlen als Doppelelementen bestimmen.

Zwei konjugiert imaginäre Punkte liegen also stets auf einer reellen Geraden und können auf dieser durch zwei Punktepaare

einer gleichlaufenden Involution als deren Doppelpunkte definiert werden. Sie liegen also zu beiden Punktepaaren harmonisch (232). Ein Punktepaar, das gleichzeitig zu zwei gegebenen Punktepaaren einer Geraden harmonisch liegt, ist konjugiert imaginär, wenn die gegebenen Paare sich gegenseitig trennen; in allen übrigen Fällen ist es reell. Ein gleicher Satz gilt infolge der Dualität für konjugiert imaginäre Strahlen.

Die auf die vorstehenden Definitionen sich gründende Ausdrucksweise bietet außer ihrer Kürze den weiteren Vorteil, daß der Zusammenhang gewisser Sätze untereinander deutlicher erkennbar wird. Im folgenden sollen einige Konstruktionen und Sätze nebst ihren dualen als Beispiele hierfür behandelt werden.

352. Zwei Punktepaare, die harmonisch liegen, sind entweder beide reell, oder die Punkte des einen sind reell, die des andern konjugiert imaginär; dagegen können nicht beide Paare aus konjugiert imaginären Punkten bestehen. Bildet das erste Paar — mag es nun reell oder imaginär sein — die Doppelpunkte einer Involution, so stellt das zweite Paar zwei sich entsprechende Punkte dieser Involution dar (223). Nehmen wir die Involution auf einem Kreise k an (317) (falls sie auf einer Geraden liegt, projizieren wir sie aus einem Punkte durch eine Strahleninvolution und schneiden diese mit einem Kreise durch den Scheitel), so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte alle in einem Punkte M, dem Mittelpunkt der Involution. Liegt M außerhalb k, so sind die Doppelpunkte der Involution reell und werden aus k durch die Polare m von M ausgeschnitten. Jeder Strahl durch M schneidet den Kreis in zwei zu den reellen Doppelpunkten harmonisch liegenden Punkten. Diese letzteren können reell oder konjugiert imaginär sein; denn durch M gehen auch Strahlen, die den Kreis nicht in reellen Punkten schneiden. Liegt M innerhalb k, so sind die Doppelpunkte der Involution konjugiert imaginär, denn die Polare m von M hat mit k keine reellen Punkte gemein. Jetzt schneidet jeder Strahl durch M den Kreis in zwei reellen Punkten, die zu den imaginären Doppelpunkten harmonisch liegen. Hieraus erkennt man auch, daß zwei Punktepaare auf einem Kegelschnitt harmonisch liegen, wenn von ihren beiden Verbindungslinien jede durch den Pol der andern geht.

353. Sind drei Punktepaare so beschaffen, daß je zwei harmonisch liegen, so sind zwei von ihnen reell, die Punkte des dritten sind konjugiert imaginär. Denn nach dem voranstehenden Satze müssen ihre drei Verbindungslinien, wenn die Punkte-

paare auf einem Kegelschnitt liegen, ein Polardreieck bilden, da jede von ihnen die Pole der beiden andern enthalten muß. Eine Ecke eines Polardreiecks liegt aber immer innerhalb, die beiden andern liegen außerhalb des Kegelschnittes; zwei Seiten des Polardreiecks schneiden ihn deshalb in reellen, die dritte in konjugiert imaginären Punkten.

Es seien zwei Involutionen von Punkten (oder Tangenten) auf einem Kegelschnitte k gegeben. Sind M und N ihre Mittelpunkte (315), m und n deren Polaren, also die Achsen der Involutionen, so bestimmt m auf k die Doppelpunkte der einen, n die der andern Involution und MN das gemeinsame Punktepaar. Letzteres wird imaginär, wenn die Gerade MN den Kegelschnitt nicht schneidet, also wenn ihr Pol $m \times n$ innerhalb liegt. In diesem Falle aber hat jede der Involutionen ein reelles Doppelpunktepaar und die Punkte des einen trennen die des andern. Dieses Ergebnis überträgt sich auf Paare von Punktinvolutionen auf einer Geraden, oder Strahleninvolutionen an einem Scheitel; denn um an ihnen die entsprechenden Konstruktionen auszuführen, muß man, wie oben (317, 318) angegeben wurde, zu Involutionen auf einem Hilfskegelschnitt übergehen. Daher gilt allgemein der Satz:

Zwei Involutionen auf demselben Träger haben ein Elementepaar gemeinsam, welches reell ist, sobald nicht beide Involutionen reelle Doppelelemente besitzen, die einander wechselseitig trennen; in letzterem Falle ist das gemeinsame Paar imaginär. Das gemeinsame Paar liegt zu den Doppelelementen beider Involutionen harmonisch. Im besonderen können beide Involutionen ein Doppelelement gemein haben, das dann zugleich das gemeinsame Elementepaar darstellt.

354. Zwei Punktinvolutionen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ auf zwei Geraden g und g' können in doppelter Weise durch die nämliche Strahleninvolution ausgeschnitten werden. Dazu ist nur nötig, daß zwei Strahlenpaare der Strahleninvolution aus den Geraden g und g' je zwei Punktepaare der gegebenen Involutionen $\mathfrak{J}$ resp. $\mathfrak{J}'$ ausschneiden. Denn sowohl die Strahleninvolution als auch die Punktinvolutionen sind durch je zwei Elementepaare völlig bestimmt. Ist $\mathfrak{J}$ durch die Punktepaare A, A_1 und B, B_1 gegeben und $\mathfrak{J}'$ durch die Punktepaare C', C_1' und D', D_1', so kann man zunächst zu dem Punkte $S = g \times g'$ den entsprechenden Punkt S_1 in der Involution $\mathfrak{J}$ und den entsprechenden Punkt S_1' in der Involution $\mathfrak{J}'$ zeichnen (224, Fig. 225). Nun sind auf g' die Punkt-

reihen $S, S_1', C', C_1', \ldots$ und $S_1', S, C_1', C', \ldots$ projektiv, folglich sind es auch die Strahlbüschel, die sie aus den Punkten A resp. A_1 projizieren. Schneiden wir beide Büschel mit der Geraden S_1S_1', so erhalten wir die projektiven Punktreihen $S_1, S_1', P, Q, \ldots$ und $S_1', S_1, P_1, Q_1, \ldots$. In ihnen entsprechen sich die Punkte S_1 und S_1' vertauschbar; deshalb liegen sie involutorisch und es sind S_1S_1', PP_1, QQ_1 Punktepaare einer Involution $\mathfrak{J}''$. Zwei Strahlen durch A und A_1, welche g' in entsprechenden Punkten von $\mathfrak{J}'$ schneiden, liefern auch entsprechende Punkte von $\mathfrak{J}''$ und umgekehrt. Ist also O ein Doppelpunkt der Involution $\mathfrak{J}''$, so schneiden die Strahlenpaare OS, OS_1, OA, OA_1 sowohl auf g Punktepaare von $\mathfrak{J}$ als auch auf g' Punktepaare von $\mathfrak{J}'$ aus. O ist somit der Scheitel einer Strahleninvolution, die aus g und g' die gegebenen Involutionen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ ausschneidet. Gleiches gilt für den andern Doppelpunkt O' von $\mathfrak{J}''$.

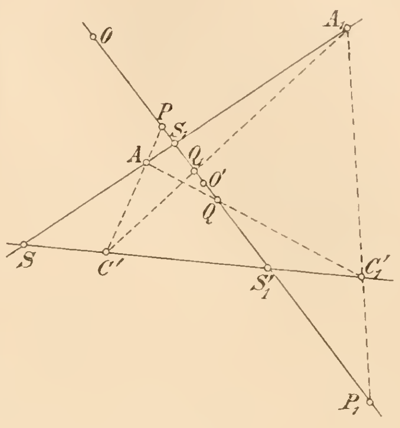


Fig. 225.

355. Besitzen beide Involutionen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ reelle Doppelpunkte, so gehen ersichtlich je zwei ihrer Verbindungslinien durch O resp. O'. Besitzen dagegen beide Involutionen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ konjugiert imaginäre Doppelpunkte, so enthält die Strecke SS_1 einen Punkt des Paares AA_1 etwa A und die Strecke SS_1' einen Punkt des Paares $C'C_1'$ etwa C' Dann liegen die Schnittpunkte Q und Q_1 von S_1S_1' mit AC_1' resp. A_1C' beide auf der Strecke S_1S_1' und die Involution $\mathfrak{J}''$ hat wiederum reelle Doppelpunkte O und O'. Nur wenn eine der gegebenen Involutionen reelle und die andere imaginäre Doppelpunkte aufweist, wird das Punktepaar QQ_1 durch einen der beiden Punkte S_1 resp. S_1' getrennt und die Doppelpunkte von $\mathfrak{J}''$ werden konjugiert imaginär.

Zwei Punktinvolutionen auf verschiedenen Trägern werden dann (und zwar in doppelter Weise) durch die nämliche Strahleninvolution projiziert, wenn sie entweder beide reelle, oder beide imaginäre Doppelpunkte besitzen.

Das Prinzip der Dualität liefert noch den dualen Satz: Zwei Strahleninvolutionen mit verschiedenen Scheiteln werden dann (und zwar in doppelter Weise) von einer Geraden in der nämlichen Punktinvolution geschnitten, wenn sie ent-

weder beide reelle, oder beide imaginäre Doppelstrahlen aufweisen. Auch die Konstruktion dieser Geraden geht aus der Dualität hervor.

356. Ein Kegelschnitt ist konstruierbar aus drei reellen Punkten A, B, C und zwei konjugiert imaginären (d. h. der gleichlaufenden Involution seiner harmonischen Pole D_1, D_2 und E_1, E_2 auf einer Geraden g).

Man suche zunächst einen Punkt S so, daß $SD_1 \perp SD_2$ und $SE_1 \perp SE_2$ wird, was mit Hilfe zweier Halbkreise über den Durchmessern DD_1 und EE_1 geschieht. Dann ist S der Scheitel für eine Involution rechter Winkel, deren Schenkel auf g die Involution harmonischer Pole ausschneiden (Fig. 226). Sind ferner B_1 resp. C_1 die Schnittpunkte der Strahlen AB und AC mit g, sind endlich B_2 resp. C_2 die zu diesen Punkten gehörigen harmonischen Pole, so bestimmen die Strahlen B_2B und C_2C den zweiten Schnittpunkt A' der durch A gehenden harmonischen Polare h zu g (vergl. 283). Die Verbindungslinien irgend zweier harmonischer Pole (D_1 und D_2, E_1 und E_2, . . .) mit A und A' (oder mit A' und A) ergeben neue Punkte (D und D', E und E', . . .) des gesuchten Kegelschnittes. Die Punkte A, B, C, D, E, . . . bilden mit A', B', C', D', E' . . . eine Involution auf dem Kegelschnitt, deren Achse g und deren Mittelpunkt ihr Pol G ist (315, 316).

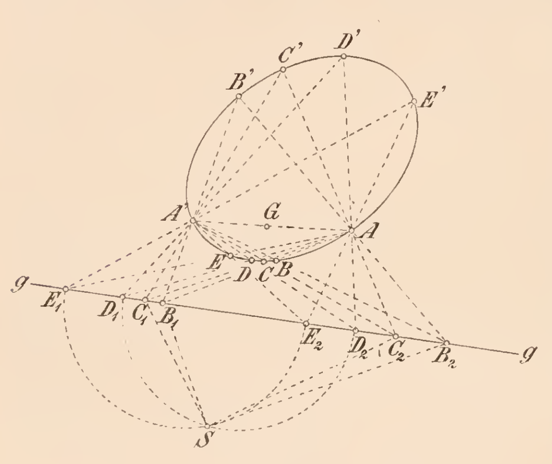


Fig. 226.

Das Prinzip der Dualität ergiebt unmittelbar die Lösung des Problems: Aus drei reellen Tangenten a, b, c und zwei konjugiert imaginären (d. h. der gleichlaufenden Involution seiner harmonischen Polaren an einem gegebenen Scheitel S) einen Kegelschnitt zu konstruieren.

357. Ein Kegelschnitt ist bestimmt durch einen reellen und zwei Paare konjugiert imaginärer Punkte (die durch

die gleichlaufenden Involutionen harmonischer Pole auf zwei Geraden g und h vertreten werden).

Auf jeder der beiden Geraden g und h müssen zwei Paare harmonischer Pole gegeben sein. Man kann dann zu $P = g \times h$ sowohl auf g den harmonischen Pol Q_1, als auch auf h den harmonischen Pol R_1 konstruieren und erhält so in $p = Q_1 R_1$ die Polare von P (Fig. 227). P liegt außerhalb des gesuchten Kegelschnittes, da die Geraden g und h ihn nicht schneiden; demnach muß seine Polare p zwei reelle Punkte Q und R mit demselben gemein haben. Ist nun A der gegebene reelle Punkt des Kegelschnittes, so schneiden die Strahlen $AQ = q$ und $AR = r$ nach 283 sowohl auf g als auf h harmonische Pole aus, da ja g und h beide harmonische Polaren zu p sind. Projiziert man also die Punktinvolutionen auf g und h von A aus, so erhält man zwei Strahleninvolutionen, deren gemeinsames Strahlenpaar die gesuchten Strahlen q und r sind. Zur Konstruktion lege man durch A einen Hilfskreis, auf diesem schneiden die genannten Strahleninvolutionen zwei Punktinvolutionen aus; das gemeinsame Punktepaar der letzteren liegt auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte (353) und bestimmt die Strahlen q und r. Sind so auf p die Punkte Q und R des Kegelschnittes gefunden, so sind QP und RP die zugehörigen Tangenten. Sind B_1 und B_2 harmonische Pole auf g, so sind nach 283 $B' = QB_1 \times RB_2$ und $B = QB_2 \times RB_1$ zwei Punkte des Kegelschnittes u. s. f.

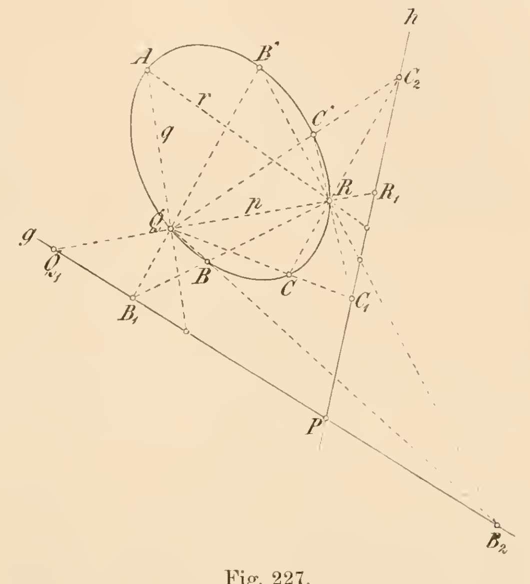


Fig. 227.

Durch das Dualitätsprinzip ergiebt sich hieraus der Satz:

Ein Kegelschnitt ist konstruierbar aus einer reellen und zwei Paaren konjugiert imaginärer Tangenten (die durch

die gleichlaufenden Involutionen harmonischer Polaren an zwei Scheiteln S und T vertreten werden).

358. Ein Kegelschnitt ist bestimmt durch einen reellen Punkt A und zwei konjugiert imaginäre Punkte mit den zugehörigen konjugiert imaginären Tangenten. Zur Bestimmung der imaginären Elemente denke man sich eine reelle Gerade g (als Verbindungslinie der Berührungspunkte) und ihren Pol G (als Schnittpunkt der Tangenten) gegeben und überdies entweder die gleichlaufende Involution der harmonischen Pole des Kegelschnittes auf g oder die seiner Polaren am Scheitel G. Von dieser Involution liefert eine die andere, weil sie perspektiv sind.

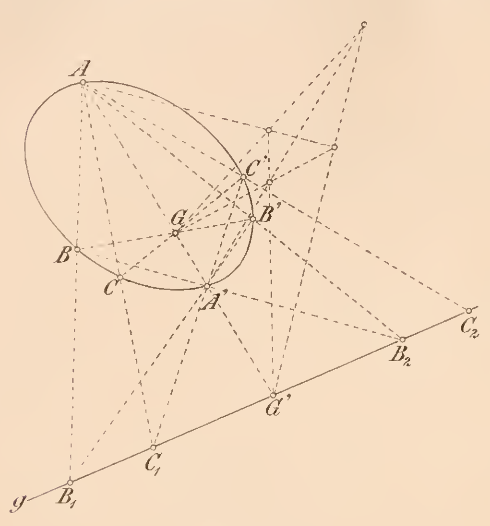


Fig. 228.

Ist G' der Schnittpunkt der Geraden AG mit g (Fig. 228), so findet man ihren zweiten Schnittpunkt A' mit dem Kegelschnitt als denjenigen, der zu A in Bezug auf G und G' harmonisch liegt. Sind ferner B_1 und B_2, C_1 und C_2, ... Punktepaare der Involution auf g, so sind $B = AB_1 \times A'B_2$, $B' = AB_2 \times A'B_1$, $C = AC_1 \times A'C_2$, $C' = AC_2 \times A'C_1$, ... neue Punkte des gesuchten Kegelschnittes.

359. Wenn eine Strahleninvolution zwei Paare rechtwinkliger Strahlen enthält, so ist sie eine Involution rechter Winkel. Denn schneidet man die gegebenen Strahlen mit einem durch den Scheitel gelegten Hilfskreis, so erhält man Paare einer Punktinvolution und als Mittelpunkt der letzteren den Kreismittelpunkt. Jeder Durchmesser bestimmt ein neues Punktepaar auf dem Kreise und das zugehörige Strahlenpaar schließt wieder einen rechten Winkel ein.

Betrachtet man irgend zwei Rechtwinkelinvolutionen in derselben Ebene, so liegt zu jedem Strahlenpaar der einen ein Strahlenpaar der andern parallel, oder beide bestimmen auf der unendlich fernen Geraden dieselbe gleichlaufende Punktinvolution. Die imaginären Doppelstrahlen zweier Rechtwinkelinvolutionen sind daher parallel,

sie gehen durch dieselben beiden imaginären Punkte der unendlich fernen Geraden, die Doppelpunkte der gedachten Punktinvolution. Man bezeichnet sie als die imaginären Kreispunkte der Ebene und zwar deshalb, weil sie allen Kreisen der Ebene angehören. In der That bilden alle rechten Winkel mit gemeinsamem Scheitel die Involution der konjugierten Durchmesser für jeden um den Scheitel als Centrum beschriebenen Kreis und ihre imaginären Doppelstrahlen sind die Tangenten des Kreises, deren Berührungspunkte unendlich fern liegen.

360. Wenn man beachtet, daß alle Kreise einer Ebene durch die imaginären Kreispunkte gehen, so erscheinen die beiden nachfolgenden Sätze als Spezialfälle des Satzes in 301.

Drei reelle Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, oder ein reeller Punkt und zwei konjugiert imaginäre bestimmen einen Kreis. Wir geben für den zweiten Fall noch kurz die Konstruktion des Kreises an. Es sei A der gegebene reelle Punkt, B_1 und B_2, C_1 und C_2 Paare harmonischer Pole des Kreises auf der reellen Geraden g (Fig. 229). Zieht man durch den Schnittpunkt S der beiden über den Durchmessern B_1B_2 und C_1C_2 geschlagenen Kreise die Senkrechte zu g, so schneidet sie den Mittelpunkt M der Involution auf g aus und stellt als Polare des unendlich fernen Punktes von g einen Durchmesser des gesuchten Kreises dar. Sind D und E die Endpunkte dieses Durchmessers, so schneiden ihre Verbindungslinien mit dem Punkte A nach 283 auf g ein Paar harmonischer Pole aus, da g und ED konjugierte Polaren sind. Zieht man umgekehrt von A aus Strahlen nach den harmonischen Polen auf g, so entsteht eine Strahleninvolution, deren rechtwinklige Strahlen durch D und E respektive gehen. Ein Hilfskreis k durch A schneidet aber die Strahleninvolution in einer Punktinvolution mit dem Mittelpunkt N; die Endpunkte X, Y seines durch N gezogenen Durchmessers liegen dann auf den gesuchten Rechtwinkelstrahlen.

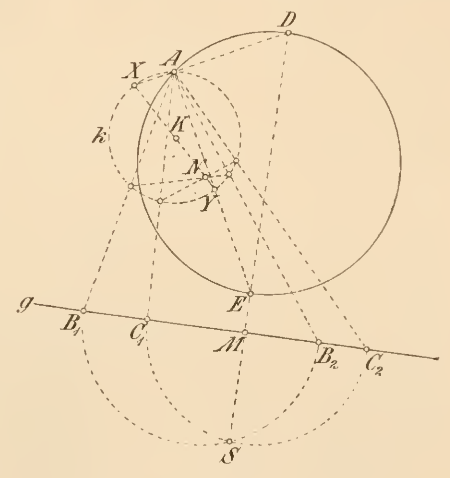


Fig. 229.

Man kann auch einen Kreis durch S und A zeichnen, dessen Mittelpunkt auf g liegt; er schneidet auf g zwei harmonische Pole aus, deren Verbindungslinien mit A zu einander rechtwinklig sind, also durch D und E resp. gehen.

Brennpunkte und Leitlinien eines Kegelschnittes.

361. Wir haben früher den Kegelschnitt als perspektives Bild eines Kreises definiert und später gezeigt (308), wie ein Kegelschnitt zu jedem Kreise seiner Ebene, der ihn in zwei Punkten schneidet, in perspektiver Beziehung steht. Wir haben aber auch gesehen, daß jeder Kegelschnitt aus einem Rotationskegel ausgeschnitten werden kann (338—341). Aus beiden Erzeugungsweisen des Kegelschnittes können die Eigenschaften seiner Brennpunkte und Leitlinien leicht gewonnen werden, wie das im Folgenden dargelegt werden soll.[11])

Wir gehen zunächst vom Rotationskegel mit dem Scheitel S aus und legen durch seine Achse senkrecht zur Ebene des Kegelschnittes c die Aufrißebene, während wir jene als Grundrißebene benutzen. In den Figg. 230a), b) und c) sind dann der elliptische, der hyperbolische und der parabolische Schnitt dargestellt. Im ersten Falle enthält die x-Achse die große Achse AB der Ellipse, im zweiten die Hauptachse AB der Hyperbel und im dritten die Parabelachse mit dem Scheitel A. Jeder Punkt der Kegelachse kann als Mittelpunkt einer Kugel gewählt werden, welche den Kegelmantel längs eines Kreises mit zur Achse normaler Ebene berührt. Unter diesen berührenden Kugeln giebt es zwei (beim Parabelschnitt nur eine), die außerdem die Ebene des Kegelschnittes c berühren. Sie schneiden die Aufrißebene in Kreisen, die außer den Mantelinien SA und SB auch noch die x-Achse tangieren.

Es seien nun K_1 und K_2 die Mittelpunkte dieser Kugeln und zugleich der ebengenannten Kreise. Sie mögen die Ebene des Kegelschnittes c in den Punkten F_1 resp. F_2 (auf x) berühren und den Kegelmantel in den Kreisen k_1 und k_2, deren Aufrisse mit den Durchmessern T_1U_1 resp. T_2U_2 zusammenfallen. Die Ebenen dieser Kreise k_1 und k_2 haben zwei auf x senkrecht stehende Gerade d_1 resp. d_2 zu Grundrißspuren und T_1U_1 resp. T_2U_2 zu Aufrißspuren. Eine beliebige Mantellinie des Kegels mag k, k_1 und k_2 in P, P_1 und P_2 respektive schneiden und der durch P gehende Kegelkreis k mag sich als Durchmesser TU im Aufriß projizieren. Dann gelten die Beziehungen:

$$PF_1 = PP_1 \quad \text{und} \quad PF_2 = PP_2,$$

da alle Kugeltangenten aus einem Punkte gleich lang sind.

Daher ist bei der Ellipse (Fig. 230a) die Summe:

$$PF_1 + PF_2 = PP_1 + PP_2 = P_1P_2 = T_1T_2,$$

also konstant und zwar $= AF_1 + AF_2 = AB$.

Analog ist bei der Hyperbel (Fig. 230b) die Differenz:

$$PF_1 - PF_2 = PP_1 - PP_2 = P_1P_2 = T_1T_2,$$

also konstant und zwar $= BF_1 - BF_2 = AB$.

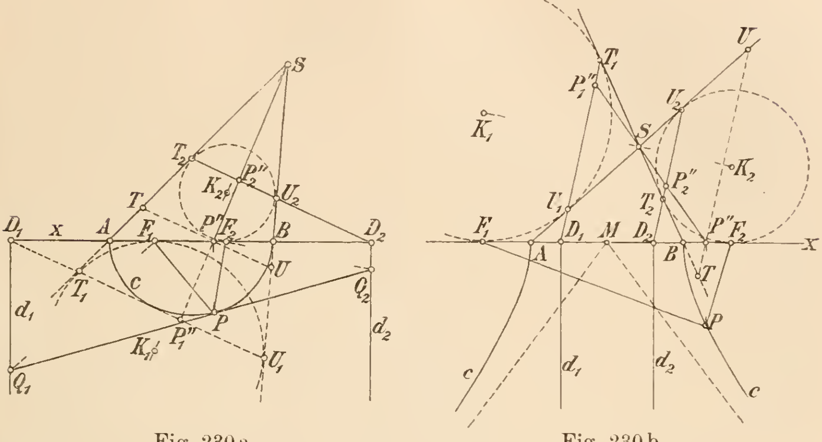


Fig. 230a. Fig. 230b.

Ferner haben wir bei beiden Kurven:

$$PF_2 = PP_2 = TT_2 \quad \text{und} \quad TT_2 : AT_2 = P''D_2 : AD_2,$$

mithin: $PF_2 : P''D_2 = AT_2 : AD_2$, also konstant. Ebenso ergiebt sich: $PF_1 : P''D_1 = AT_1 : AD_1$, also konstant.

Für die Parabel (Fig. 230c) folgt insbesondere: $PP_1 = TT_1 = P''D_1$.

Die Punkte F_1 und F_2 bezeichnet man als die Brennpunkte des Kegelschnittes c und die Geraden d_1 und d_2 als seine Leitlinien. Nach dem letzten Resultat ist: $AF_1 : AD_1 = BF_1 : BD_1$ (wenn wir statt P einmal den Punkt A und einmal den Punkt B setzen). Die vier Punkte liegen also harmonisch (218), und es ist jeder Brennpunkt der Pol einer Leitlinie in Bezug auf den Kegelschnitt c. Hiernach gilt der Satz:

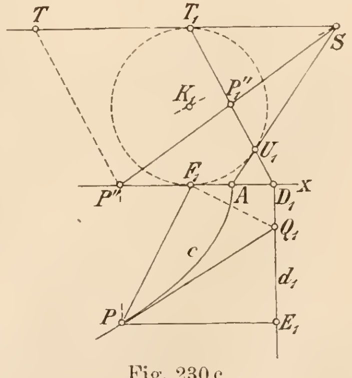


Fig. 230c.

Ellipse und Hyperbel besitzen auf der großen, resp. auf der reellen Achse je zwei Brennpunkte F_1 und F_2 und deren Polaren als Leitlinien

d_1 und d_2. Die Parabel hat auf ihrer Achse nur einen Brennpunkt D_1 und eine zugehörige Leitlinie d_1. Für jeden Punkt P einer Ellipse ist die Summe der Brennstrahlen $PF_1 + PF_2$, für jeden Punkt einer Hyperbel ihre Differenz $PF_1 - PF_2$ konstant, nämlich gleich der Hauptachse AB.

Für jeden Punkt eines beliebigen Kegelschnittes ist das Verhältnis seiner Entfernungen von einem Brennpunkte (Fokus) und von der zugehörigen Leitlinie (Direktrix) konstant. Dieses Verhältnis hat bei der Parabel den Wert 1 und ist bei der Ellipse < 1 und bei der Hyperbel > 1.

362. Aus diesem Satze können wir leicht noch eine weitere charakteristische Eigenschaft der Brennpunkte ableiten. Ziehen wir durch einen Brennpunkt F_1 eine Sehne JK parallel zu der zugehörigen Leitlinie d_1 (d_1 Polare von F_1) und eine beliebige andere Sehne GH, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte paarweise in zwei harmonischen Polen P und Q, die auf der Leitlinie d_1 liegen (Fig. 231). Offenbar halbiert die Gerade GH die Strecke PQ in R, da sie die dazu parallele Strecke JK in F_1 halbiert. Nun ist $\triangle JGF_1 \sim \triangle PGR$, also $F_1G : F_1J = RG : RP$, und nach dem voranstehenden Satz: $F_1G : F_1J = GG' : JJ' = GG' : F_1D_1 = RG : RF_1$. Aus beiden Relationen folgt $RP = RF_1$; d. h.

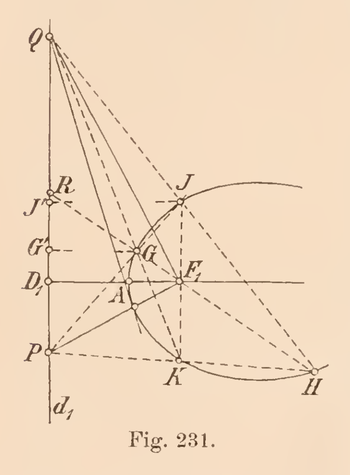


Fig. 231.

schlägt man um einen beliebigen Punkt R der Leitlinie d_1 als Centrum einen Kreis, dessen Peripherie den zugehörigen Brennpunkt F_1 enthält, so schneidet er die Leitlinie in harmonischen Polen P und Q. Die Polare von P geht durch Q und F_1 und die Polare von Q durch P und F_1, und da nach dem soeben Gesagten $F_1Q \perp F_1P$ ist, haben wir den Satz: Je zwei harmonische Polaren durch einen Brennpunkt sind zu einander rechtwinklig und umgekehrt. Diesem Satze kann man auch noch eine andere Form geben, wenn man bedenkt, daß der Berührungspunkt einer von Q an den Kegelschnitt gezogenen Tangente auf der Polare PF_1 von Q liegt. Auf jeder Tangente eines Kegelschnittes wird das vom Berührungspunkt und einer Leitlinie begrenzte Stück aus dem zugehörigen Brennpunkt durch einen rechten Winkel projiziert.

Dieses Resultat ist auch aus Fig. 230a zu erkennen, wenn man die Tangentialebene längs der Mantellinie SP in Betracht zieht. Dieselbe hat die Tangente im Punkte P des Kegelschnittes c zur ersten Spur und mag d_1 und d_2 in Q_1 und Q_2 schneiden. Dann sind die Dreiecke PF_2Q_2 und PP_2Q_2 kongruent, da $PF_2 = PP_2$ und $Q_2F_2 = Q_2P_2$ Kugeltangenten sind; da $\angle PP_2Q_2 = 90^0$ ist, folgt auch $\angle PF_2Q_2 = 90^0$.

363. Wir haben gesehen, daß einerseits: $PF_1 : P''D_1 =$ konst. und andererseits auch $PF_2 : P''D_2 =$ konst. ist; wegen der Symmetrieverhältnisse müssen aber beide Quotienten gleich sein. Somit ergiebt sich: $PF_1 : PF_2 = P''D_1 : P''D_2 = PQ_1 : PQ_2$, und daraus folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke PF_1Q_1 und PF_2Q_2, die ja bei F_1 und F_2 rechte Winkel aufweisen, und die Gleichung: $\angle F_1PQ_1 = \angle F_2PQ_2$. Das giebt den Satz: Die Brennstrahlen nach einem Punkte des Kegelschnittes bilden mit seiner Tangente (und seiner Normale) gleiche Winkel. Bei der Parabel bildet jede Tangente mit der Achse und dem Brennstrahl nach ihrem Berührungspunkt gleiche Winkel. Denn in Fig. 230c sind die Dreiecke PF_1Q_1 und PE_1Q_1 kongruent.

364. Nimmt man die perspektive Beziehung zwischen Kegelschnitt k und Kreis k_1 zum Ausgangspunkt und legt das Centrum der Perspektive in das Centrum F des Kreises, so wird F zum Brennpunkt des Kegelschnittes (Fig. 232). Denn die Strahlen durch das Centrum F entsprechen sich selbst; rechtwinklige Durchmesser des Kreises sind aber harmonische Polaren desselben, sie sind also auch rechtwinklige harmonische Polaren des Kegelschnittes und F ist somit Brennpunkt. Zugleich wird die Verschwindungslinie e_v zur Leitlinie, denn sie entspricht der unendlich fernen Geraden, d. h. der Polare von F in Bezug auf den Kreis k_1.

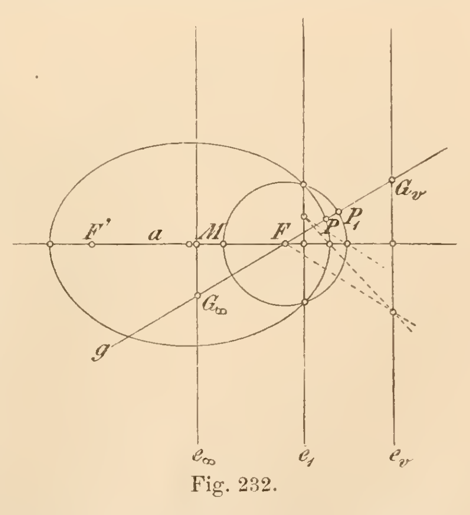


Fig. 232.

Beschreibt man umgekehrt um einen Brennpunkt F des Kegelschnittes k einen beliebigen Kreis k_1, so ist F das Centrum einer Perspektive für beide Kegelschnitte, deren Verschwindungslinie e_v

die zugehörige Leitlinie ist. Läßt man nämlich die Punkte P und P_1 die ein beliebiger Strahl g aus k und k_1 ausschneidet, einander entsprechen, so ist einerseits die Perspektive festgelegt und andererseits ist der Kegelschnitt k durch Brennpunkt, Leitlinie und den Punkt P völlig bestimmt. Zu jedem Strahl durch F hat man ja den Pol in Bezug auf k als Schnittpunkt von e_v mit dem zu ersterem rechtwinkligen Strahl, so daß man aus P beliebig viele Punkte von k gewinnen kann.

Es ist klar, daß ein Brennpunkt nur auf einer Achse des Kegelschnittes liegen kann. Denn der durch ihn gehende Durchmesser und die durch ihn gezogene Parallele zum konjugierten Durchmesser sind harmonische Polaren und müssen deshalb zu einander senkrecht sein. Es giebt aber auch nur auf einer Achse Brennpunkte, denn die Verbindungslinie zweier Brennpunkte muß stets eine Achse sein. Zu dieser Verbindungslinie bilden nämlich die auf ihr in den Brennpunkten errichteten Normalen harmonische Polaren. Der Schnittpunkt der letzteren liegt in der zur Verbindungslinie senkrechten Richtung unendlich fern und ist der Pol von ihr; also ist sie eine Achse.

365. Die perspektive Beziehung zwischen k und k_1 kann wiederum zur Herleitung der hauptsächlichsten Brennpunktseigen-

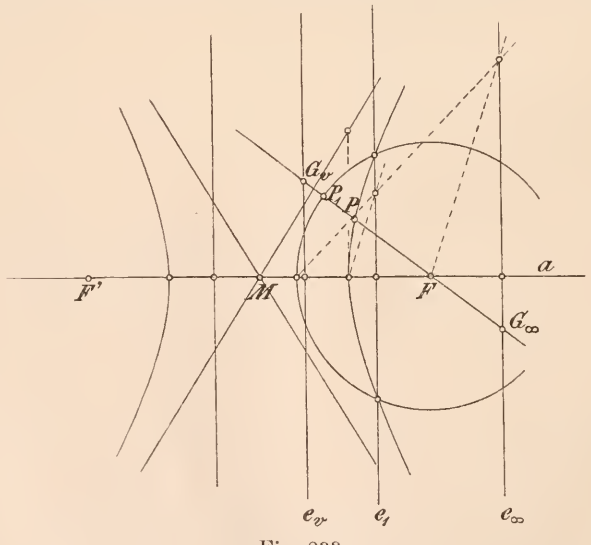


Fig. 233.

schaften benutzt werden. Fügt man in Fig. 232 noch die Fluchtlinie e_∞ hinzu und schneiden e_v und e_∞ die Gerade g in G_v und

G_∞, so entsprechen den Punkten F, P_1, G_∞, U, wo U den unendlich fernen Punkt von g bezeichnet, die Punkte F, P, U, G_v. Demnach ist

$$\frac{FP_1}{FG_\infty} : \frac{UP_1}{UG_\infty} = \frac{FP}{FU} : \frac{G_vP}{G_vU}, \quad \text{oder} \quad FP_1 : FG_\infty = FP : G_vP.$$

Ist m der senkrechte Abstand der Brennpunkte von der Fluchtlinie e_∞, r der Radius des Kreises k_1, d der Abstand des Punktes P von der Leitlinie e_v und f sein Abstand vom Brennpunkt, so hat man $FG_\infty : G_vP = m : d$ und $FP_1 = r$, $FP = f$, mithin die Relation $f : d = r : m$. Da aber r und m unveränderlich sind, ergiebt sich wieder der Satz in 361.

In den Figuren 232, 233, 234 sind die drei Fälle dargestellt, wo die Fluchtlinie den Kreis k_1 nicht schneidet, schneidet oder berührt, also der Kegelschnitt k zur Ellipse, Hyperbel oder Parabel wird.

Die soeben besprochene perspektive Beziehung zwischen Kreis und Kegelschnitt gestattet auch den in 265 bewiesenen Satz am Kreis unmittelbar auf den Kegelschnitt zu übertragen. Die auf einer beweglichen Tangente eines Kegelschnittes von zwei festen Tangenten begrenzte Strecke erscheint vom Brennpunkte aus unter konstantem Winkel.

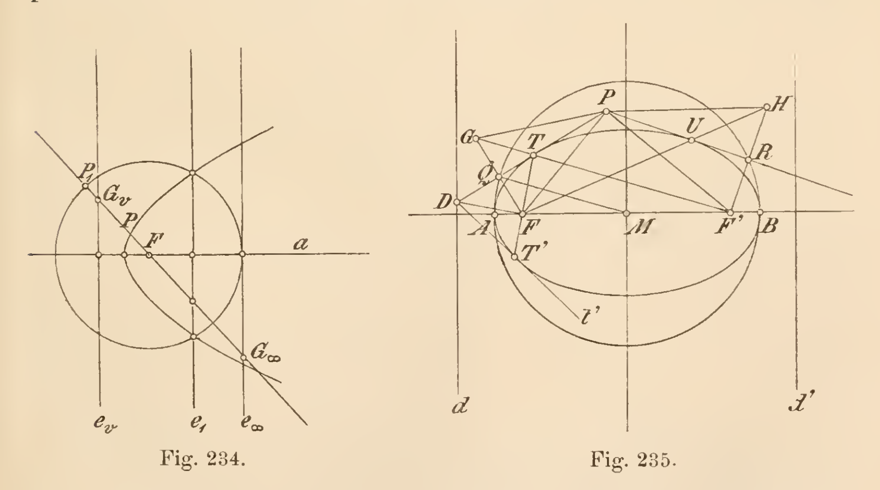


Fig. 234. Fig. 235.

366. Es seien t und u (Fig. 235) die aus einem Punkte P an eine Ellipse gezogenen Tangenten mit den Berührungspunkten T und U. Die auf sie aus den Brennpunkten F und F' gefällten Lote FQ und $F'R$ mögen um ihre eigene Länge resp. bis G und H verlängert werden. Dann ist $TG = TF$ und $\angle GTQ = \angle FTQ = \angle F'TP$, also (nach 361) $F'G = AB$ und, da M und Q die Strecken

FF' und FG halbieren, folgt weiter: $MQ = MA$. Fällt man von den Brennpunkten Lote auf die Tangenten einer Ellipse, so liegen ihre Fußpunkte auf einem Kreise, der ihre Hauptachse (große Achse) zum Durchmesser hat.

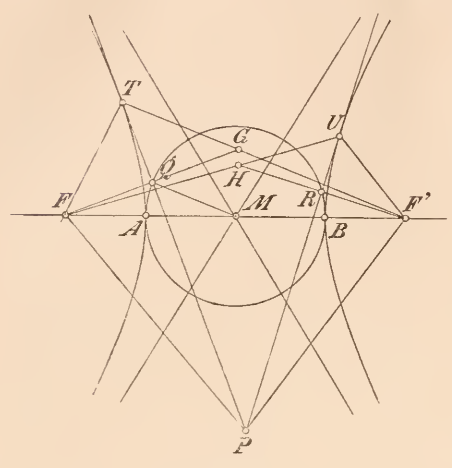


Fig. 236.

Der gleiche Satz gilt für die Hyperbel, wie Fig. 236 zeigt.

367. Bei der Parabel liegen die Fußpunkte der aus dem Brennpunkte auf die Tangenten gefällten Lote auf der Scheiteltangente. Ist nämlich T ein Punkt der Parabel, s ihre Scheiteltangente und S der zugehörige Scheitel, so sind die Abstände des Punktes T von Brennpunkt F und Leitlinie d einander gleich ($TG = TF$) und S halbiert den Abstand zwischen F und d (Fig. 237). Die Scheiteltangente halbiert infolgedessen die Strecke FG in Q und TQ steht auf dieser Strecke in ihrem Mittelpunkt senkrecht; somit halbiert TQ den Winkel GTF und fällt nach 363 mit der Parabeltangente t in T zusammen.

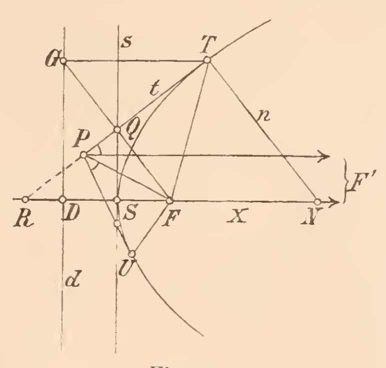


Fig. 237.

368. Die zuletzt bewiesenen Sätze gestatten die Konstruktion der beiden Kegelschnitttangenten aus einem beliebigen Punkte P. In den Figuren 235 und 236 ergiebt sich der Punkt Q der gesuchten Tangente PT als Schnitt zweier Kreise, die über den Durchmessern AB und PF resp. beschrieben sind. Durch den andern Schnittpunkt dieser Kreise geht die Tangente PU. Bei der Parabel schneiden die Tangenten aus P die Scheiteltangente in Punkten, die auf einem Kreise mit dem Durchmesser PF liegen.

369. Aus den Figuren 235 und 236 können wir noch erkennen, daß $\triangle GPF' \cong \triangle FPH$ ist ($PG = PF$, $PH = PF'$ und $GF' = HF = AB$);

mithin haben wir $\angle GPF' = \angle FPH$, also $\angle GPF = \angle HPF'$ und auch $\angle TPF = \angle UPF'$, denn diese sind halb so groß wie die vorangehenden. Das giebt den Satz: Die eine Tangente aus dem beliebigen Punkt P an den Kegelschnitt schließt mit dem von ihm ausgehenden Strahl nach dem einen Brennpunkt den gleichen Winkel ein, wie die andere Tangente mit dem Strahl nach dem andern Brennpunkt.

Dieser Satz gilt in gleicher Weise für die Parabel, wenn man ihren zweiten Brennpunkt auf ihrer Achse unendlich fern annimmt, so daß der Strahl nach diesem Brennpunkt zur Achse parallel wird (Fig. 237).

370. Wir wollen zuletzt noch die Brennpunkte als Doppelpunkte einer bestimmten Involution auf der bezüglichen Achse nachweisen, indem wir zunächst den Satz aufstellen: Die Punkte einer jeden Achse eines Kegelschnittes gehören paarweise in der Art zusammen, daß je zwei rechtwinklige Strahlen, deren jeder einen Punkt des Paares enthält, harmonische Polaren sind.

Es mögen die beiden rechtwinkligen harmonischen Polaren s und s_1 auf einer Achse a die Punkte P und P_1 ausschneiden (Fig. 238). Der Strahlbüschel mit dem Scheitel P ist projektiv zu der Punktreihe der zu den Strahlen gehörigen Pole. Projiziert man diese Punktreihe aus P_1, so erhält man zwei projektive Strahlbüschel mit den Scheiteln P und P_1, deren entsprechende Strahlen harmonische Polaren sind. Nun sind drei Strahlen des zweiten Büschels normal zu den entsprechenden Strahlen des ersten. Sind nämlich n und n_1 die auf der Achse a in P und P_1 errichteten Senkrechten, so entsprechen den Strahlen n, a und s des ersten Büschels die Strahlen a, n und s_1 im zweiten, denn die Pole von n und n_1 liegen auf a. Beide Büschel sind somit kongruent (184) und jeder Strahl steht auf seinem entsprechenden senkrecht.

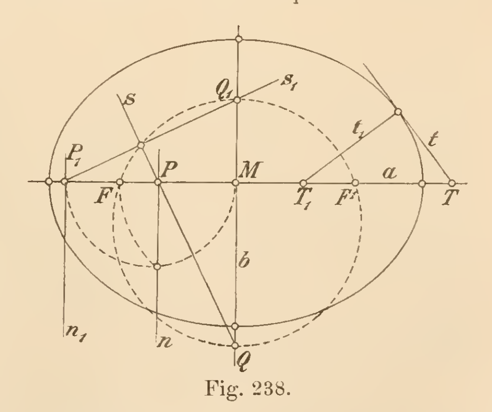


Fig. 238.

Schneiden s und s_1 die andere Achse, sie sei b, in den Punkten Q und Q_1, so gilt auch für dieses Punktepaar unser Satz. Je zwei

rechtwinklige Strahlen durch Q und Q_1 liefern also auf der Achse a ein Punktepaar von der im Satze ausgesprochenen Beschaffenheit; ebenso liefern je zwei rechtwinklige Strahlen durch P und P_1 ein solches Punktepaar auf b. Die Punktepaare auf a können somit durch entsprechende Strahlen zweier kongruenter Strahlbüschel mit den Scheiteln Q und Q_1 ausgeschnitten werden. Insbesondere bildet der Mittelpunkt M des Kegelschnittes mit dem unendlich fernen Punkt U von a ein solches Paar, dessen Punkte sich vertauschbar entsprechen, da sowohl $QM \perp Q_1U$ als auch $Q_1M \perp QU$ ist. Die Punktepaare auf der Achse a (und ebenso auf der Achse b) bilden hiernach eine Involution, deren Mittelpunkt M ist.

371. Die Brennpunkte auf der Achse eines Kegelschnittes sind die Doppelpunkte einer Involution, deren Mittelpunkt mit seinem Mittelpunkt zusammenfällt. Je zwei rechtwinklige harmonische Polaren, so auch jede Tangente mit der zugehörigen Normalen, schneiden ein Punktepaar dieser Involution aus. In der That hat jeder Doppelpunkt dieser Involution die Eigenschaft, daß je zwei rechtwinklige Strahlen durch ihn harmonische Polaren sind.

Aus Fig. 238 erkennt man auch, daß nur die Involution auf der einen Achse reelle Doppelpunkte besitzen kann. Denn wenn P und P_1 auf derselben Seite von M aus liegen, werden Q und Q_1 notwendigerweise durch M getrennt. Die Achse mit den reellen Brennpunkten heißt Brennpunkts- oder Hauptachse, die andere Nebenachse. Zur Konstruktion der Brennpunkte kann man etwa die Relation $MP \cdot MP_1 = (MF)^2$ benutzen (Fig. 238). Auch der Kreis über dem Durchmesser QQ_1 schneidet auf der Hauptachse die Brennpunkte aus, denn die Verbindungslinien eines solchen Punktes mit Q und Q_1 sind zu einander rechtwinklig und zugleich harmonische Polaren. Die Relation $BF = BF' = MA$ dient ebenfalls zur Konstruktion der Brennpunkte.

372. Bei der Parabel ist die Involution der Punktepaare, die von rechtwinkligen harmonischen Polaren aus der Achse ausgeschnitten werden, von spezieller Art. Eine Gerade s parallel zur Achse hat hier einen unendlich fernen Pol; sie stellt ja einen Durchmesser vor, der ein System paralleler Sehnen halbiert. Die rechtwinklige harmonische Polare s_1 zu s liegt deshalb unendlich fern, so daß der unendlich ferne Punkt der Achse selbst ein Doppelpunkt der genannten Involution ist, da er zugleich auf s und s_1 liegt. Jedes Punktepaar einer Involution liegt aber zu seinen Doppelpunkten harmonisch. Der Brennpunkt F einer Parabel halbiert also

alle auf der Achse von zwei rechtwinkligen harmonischen Polaren begrenzten Strecken.

Zu den rechtwinkligen harmonischen Polaren gehören insbesondere Tangente und Normale in den einzelnen Kurvenpunkten. Tangente und Normale in jedem Punkt einer Parabel schneiden ihre Achse in Punkten, die vom Brennpunkt gleich weit abstehen. Dieses Resultat ist auch aus Fig. 237 leicht abzuleiten. Es ist nämlich $QT = QR$, also auch $FR = FN$.

373. Zieht man in einem beliebigen Punkte P die rechtwinkligen harmonischen Polaren x und y in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt, so schneiden sie seine Achse a in dem Punktepaar X, Y einer Involution (Fig. 239), deren Doppelpunkte die Brennpunkte F und F' sind. Es liegen also F, F' und X, Y harmonisch, und ebenso $PF = f, PF' = f'$ und x, y; d. h. x und y halbieren die beiden Winkel der Strahlen f und f'.

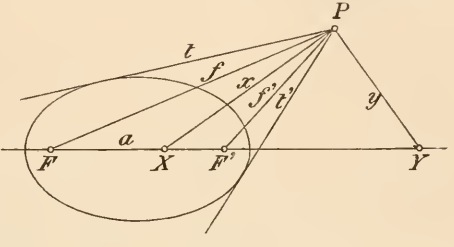


Fig. 239.

Die harmonischen Polaren durch P bilden ebenfalls eine Involution; x, y ist ein Strahlenpaar derselben, während die Tangenten t und t' ihre Doppelstrahlen sind. Aus der harmonischen Lage von t, t' und x, y folgt weiter, daß x und y die beiden Winkel der Tangenten t und t' halbieren. Die von einem Punkte P in der Ebene eines Kegelschnittes an diesen gezogenen Tangenten und seine Verbindungslinien mit den Brennpunkten bilden Winkel, deren Halbierungslinien zusammenfallen und rechtwinklige harmonische Polaren sind. (Das ist der Satz in 369.)

374. Der Satz am Ende von 365 hat für die Parabel einen speziellen Satz zur Folge. Die Schnittpunkte dreier Parabeltangenten liegen mit dem Brennpunkt auf einem Kreise.

Sind nämlich a und b zwei Parabeltangenten mit dem Schnittpunkt C, sind ferner A und B ihre Schnittpunkte mit einer dritten Tangente c sowie A_∞ und B_∞ ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden, die ebenfalls Tangente ist, so werden die Strecken AA_∞ und BB_∞ aus dem Brennpunkte F unter gleichem Winkel gesehen. Man hat daher: $\angle AFB = \angle A_\infty FB_\infty = \angle ACB$, woraus die Behauptung folgt (Fig. 240).

Sind A und B die Schnittpunkte einer Tangente der Hyperbel

mit ihren Asymptoten, so gelten infolge des Satzes in 365 die Gleichungen: $\angle AFB = \angle MFU$ und $\angle AF'B = \angle MF'U$, wenn U der unendlich ferne Punkt auf einer Asymptote ist (Fig. 241). Die

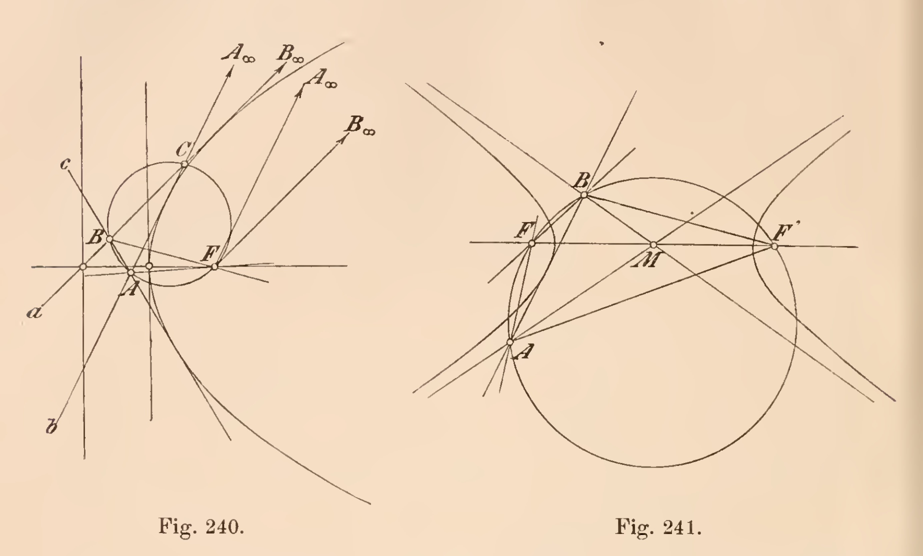


Fig. 240. Fig. 241.

Summe der Winkel AFB und $AF'B$ beträgt sonach 180^0, und es gilt der Satz:

Die beiden Schnittpunkte einer Tangente der Hyperbel mit ihren Asymptoten liegen mit den beiden Brennpunkten auf einem Kreise.

375. Haben zwei Kegelschnitte beide reellen und folglich auch alle imaginären Brennpunkte gemein, so heißen sie konfokal. Die Schenkel der rechten Winkel in einem reellen Brennpunkt F schneiden ja die Nebenachse in den Punktepaaren einer Involution, deren konjugiert imaginäre Doppelpunkte nach der Definition ebenfalls als Brennpunkte zu gelten haben. Auch auf der unendlich fernen Geraden bestimmen die genannten Rechtwinkelstrahlen eine Involution, deren konjugiert imaginäre Doppelpunkte als Brennpunkte anzusehen sind. Die nämliche Involution wird von den rechtwinkligen Durchmessern eines jeden Kreises auf der unendlich fernen Geraden ausgeschnitten; ihre Doppelpunkte sind deshalb die allen Kreisen gemeinsamen konjugiert, imaginären, unendlich fernen Punkte.

Die Gesamtheit aller Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten bezeichnet man als konfokale Kegelschnittschar.

Liegen beide Brennpunkte F und F' im Endlichen (Fig. 242), so besteht die konfokale Schar aus Ellipsen und Hyperbeln, deren Achsen zusammenfallen. Durch jeden Punkt P der Ebene geht eine Ellipse und eine Hyperbel dieser Schar, die sich rechtwinklig schneiden. Denn die Tangente der Ellipse halbiert den $\angle\, FPF'$, die Tangente der Hyperbel aber dessen Nebenwinkel (Fig. 230). Aus den Achsen, einem Punkt und der zugehörigen Tangente lassen sich aber von der Ellipse und der Hyperbel leicht beliebig viele Punkte und Tangenten zeichnen.

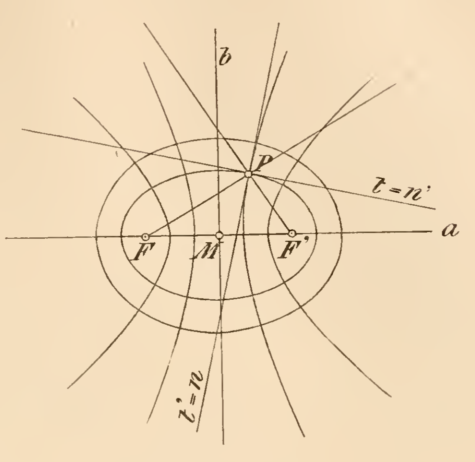


Fig. 242.

Legt man um die Brennpunkte F und F' Systeme konzentrischer Kreise, deren Radien Vielfache einer und derselben Strecke sind, so gehören die Schnittpunkte solcher Kreise der beiden Systeme, für welche die Summe oder Differenz der Radien gleich groß ist, je einer Kurve der konfokalen Schar an.

376. Liegt ein Brennpunkt F im Endlichen, der andere F' unendlich fern (Fig. 243), so enthält die konfokale Schar nur Parabeln, deren Achsen zusammenfallen und deren Scheitel auf beiden Seiten des Brennpunktes liegen. Durch jeden Punkt P der Ebene gehen zwei Parabeln der Schar, die sich rechtwinklig schneiden und deren Scheitel durch F getrennt werden. Die Tangente der einen Parabel halbiert den Winkel FPF', die der andern seinen Nebenwinkel. Legt man um F ein System konzentrischer

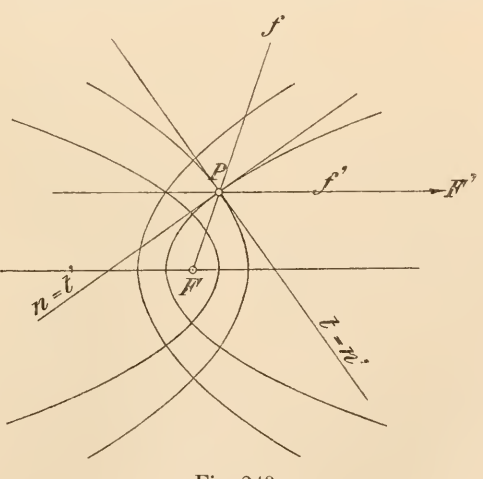


Fig. 243.

Kreise, deren Radien Vielfache derselben Strecke sind, und zieht ein System von Parallelen senkrecht zur Achse, deren Abstände von F ebenfalls Vielfache der nämlichen Strecke sind, so kann jede von diesen Parallelen einer Parabel als Leitlinie dienen. Die Schnittpunkte der konzentrischen Kreise mit den Parallelen, deren Abstand von der gewählten Leitlinie dem betreffenden Kreisradius gleich ist, liegen jedesmal auf einer Kurve der Schar.

377. In beiden konfokalen Kegelschnittscharen schneiden sich die Kurven der gleichen Art nicht, die Kurven verschiedener Art aber unter rechten Winkeln.

Aus 371 folgt noch, daß je zwei rechtwinklige Strahlen, welche harmonische Polaren für einen Kegelschnitt der konfokalen Schar sind, die gleiche Eigenschaft in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schar besitzen. Denn die von solchen Strahlen auf einer Achse ausgeschnittene Involution ist durch die gegebenen Brennpunkte bestimmt. Insbesondere folgt:

Die Winkel der Tangentenpaare aus einem beliebigen Punkte der Ebene an die Kegelschnitte einer konfokalen Schar haben dieselben Halbierungslinien.

Krümmungskreise der Kegelschnitte.

378. Es giebt unendlich viele Kreise, die einen Kegelschnitt k in einem gegebenen Punkte O berühren; sie berühren alle die Tangente t im Punkte O von k und ihre Mittelpunkte liegen auf der zugehörigen Normalen n des Kegelschnittes. Man wähle nun einen Kreis, der den Kegelschnitt k noch in einem Punkte P schneidet und lasse P sich allmählich dem Berührungspunkte O nähern. Dann ändert sich auch der Kreis, der k in O berührt und in P schneidet. Läßt man schließlich P nach O rücken, so wird der bezügliche Kreis den Kegelschnitt in O gleichzeitig berühren und schneiden, d. h. er wird k in O berühren und dort zugleich von der einen Seite von k auf die andere übertreten. Ein solches Verhalten eines Kreises gegen einen Kegelschnitt wird als Oskulation bezeichnet, der Kreis selbst heißt Oskulations- oder Krümmungskreis. Während also die Berührung zweier Kurven durch Zusammenrücken zweier Schnittpunkte entsteht, entsteht die Oskulation durch Zusammenrücken eines Berührungs- und eines Schnittpunktes, oder dreier Schnittpunkte. Der Krümmungskreis schmiegt sich also im Punkte O enger an den Kegelschnitt an, als die andern berührenden Kreise.[12]) Berührt insbesondere der Kreis den Kegelschnitt in einem

Scheitel, so schneidet er ihn noch in zwei zur Achse symmetrischen Punkten; diese rücken gleichzeitig in den Scheitel, wenn der Kreis in den Krümmungskreis übergeht.

379. Es seien jetzt k_1 und k_2 irgend zwei Kreise, welche k in O berühren. Nach den Ausführungen in 307 bestehen dann sowohl zwischen k und k_1, als zwischen k und k_2 perspektive Beziehungen, deren Centren in O liegen. Sei $\mathfrak{P}'$ die Perspektive zwischen k und k_1, a' ihre Achse und P, P_1 ein Paar entsprechender Punkte; sei ferner $\mathfrak{P}''$ die Perspektive zwischen k und k_2, a'' ihre Achse und P, P_2 ein Paar entsprechender Punkte. Die Punkte P, P_1, P_2 liegen auf einem Strahl durch O, dem Centrum von $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$. Es ist aber offenbar O auch ein Ähnlichkeitscentrum für die beiden Kreise k_1 und k_2, und es sind P_1 und P_2 entsprechende Punkte einer zwischen ihnen bestehenden Ähnlichkeitsbeziehung $\mathfrak{A}$.

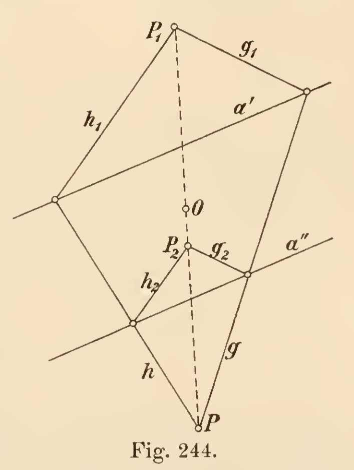


Fig. 244.

Wendet man auf k zunächst die Perspektive $\mathfrak{P}''$ an, so erhält man k_2, und von k_2 gelangt man zu k_1 durch $\mathfrak{A}$. Dabei geht P zunächst in P_2 und dieser Punkt dann in P_1 über; ebenso gehen zwei durch P gelegte Gerade g und h vermöge $\mathfrak{P}''$ in die Geraden g_2 und h_2 durch P_2 und die letzteren vermöge $\mathfrak{A}$ in g_1 und h_1 durch P_1 über (Fig. 244) ($g_1 \parallel g_2$, $h_1 \parallel h_2$). Durch die Perspektive $\mathfrak{P}'$ wird aber k direkt in k_1 und ebenso werden P, g, h direkt in P_1, g_1, h_1 übergeführt; deshalb müssen die Punkte $g \times g_2$ und $h \times h_2$ auf a'', die Punkte $g \times g_1$ und $h \times h_1$ auf a' liegen. Daraus folgt, daß a' und a'' parallel sind und daß a' die Strecke PP_1 in dem gleichen Verhältnis teilt, wie a'' die Strecke PP_2.

Die Perspektivitätsachse a'' schneidet k und k_2 in denselben beiden reellen oder konjugiert imaginären Punkten, in gleicher Weise verhält sich a' zu k und k_1. Wir erkennen also, daß alle Kreise, die einen Kegelschnitt in dem nämlichen Punkte berühren, ihn noch in je zwei weiteren (reellen oder konjugiert imaginären) Punkten schneiden, deren Verbindungslinien parallel laufen.

380. Ist im besonderen k_1 der Krümmungskreis des Kegelschnittes k im Punkte O, so muß die Achse a' der zwischen k und k_1 bestehenden perspektiven Beziehung $\mathfrak{P}'$ durch O hindurchgehen. Denn die Achse schneidet k in zwei Punkten, durch die auch k_1

geht, und der Krümmungskreis ist nach obigem dadurch definiert, daß einer dieser Schnittpunkte mit dem Berührungspunkt O zusammenfällt. Wir können hiernach die Aufgabe lösen:

Den Krümmungskreis k_1 in einem Punkte O eines Kegelschnittes k zu bestimmen, wenn von demselben fünf Punkte O, P, Q, R, S gegeben sind.

Zunächst zeichnen wir nach 270 die Tangente t im Punkte O von k und die zugehörige Normale n, ferner einen beliebigen Kreis k_2, der t in O berührt. Die Strahlen OP, OQ, OR werden k_2 in P_2, Q_2, R_2 respektive schneiden, und es sind QR und Q_2R_2, sowie PQ und P_2Q_2 entsprechende Gerade der Perspektive $\mathfrak{P}''$, so daß ihre Schnittpunkte auf der zugehörigen Achse a'' liegen (Fig. 245). Nun ziehe man durch O zu a'' die Parallele a', dann ist nach obigem $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2$ und schneidet sich mit PQ auf a'.

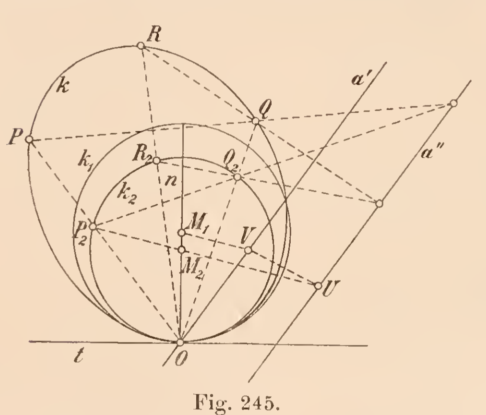


Fig. 245.

Um den Mittelpunkt M_1 des Krümmungskreises k_1 zu finden, verbinde man P_2 mit dem Mittelpunkt M_2 von k_2, schneide diese Gerade mit a'' in U, ziehe PU und durch $a \times PU = V$ die Parallele VM_1 zu P_2M_2. In der That müssen der Geraden PU vermöge der perspektiven Beziehungen $\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{P}'$ zwei Parallele P_2U und P_1V entsprechen, von denen die erstere durch M_2 und folglich die letztere durch M_1 geht.

381. Die zwischen dem Kegelschnitt k und den Kreisen k_2 und k_1 (Krümmungskreis) bestehenden perspektiven Beziehungen $\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{P}'$ können dazu verwendet werden die Krümmungskreise auch in den Fällen zu konstruieren, wo die Achsen oder ein Paar konjugierte Durchmesser des Kegelschnittes k gegeben sind. Dabei lassen sich jedoch bedeutende Vereinfachungen der Konstruktion erzielen, die wir noch eingehender verfolgen wollen. Ist der Krümmungskreis im Scheitel O einer Ellipse k mit den Achsen OP und QR zu finden, so ziehe man (Fig. 246) den Kreis k_2 über OP als Durchmesser, dann stehen a'' und a' (die Achsen der Perspektiven $\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{P}'$) in P resp. O auf OP senkrecht. Der Strahl OQ schneidet k_2 in Q_2 und es entsprechen sich in $\mathfrak{P}''$ die Geraden PQ und PQ_2. Der

Geraden PQ entspricht vermöge $\mathfrak{P}'$ die Gerade $P_1 G$, die sich mit PQ im Punkte G von a' schneidet und zu PQ_2 parallel, also zu OQ normal ist.

P_1 und P sind entsprechende Punkte der ähnlich liegenden Kreise k_1 und k_2; OP_1 ist also der auf der Achse von k liegende Durchmesser des Krümmungskreises k_1. Für seinen Mittelpunkt M_1, den zu O gehörigen Krümmungsmittelpunkt, ergiebt sich folgende Konstruktion. Man ziehe in den Scheiteln O und Q die Parallelen zu den Achsen der Ellipse und fälle von ihrem Schnittpunkt J ein Lot auf OQ; dieses schneidet auf beiden Achsen die Krümmungsmittelpunkte aus. Denn J ist der Mittelpunkt von OG und folglich M_1 der von OP_1.

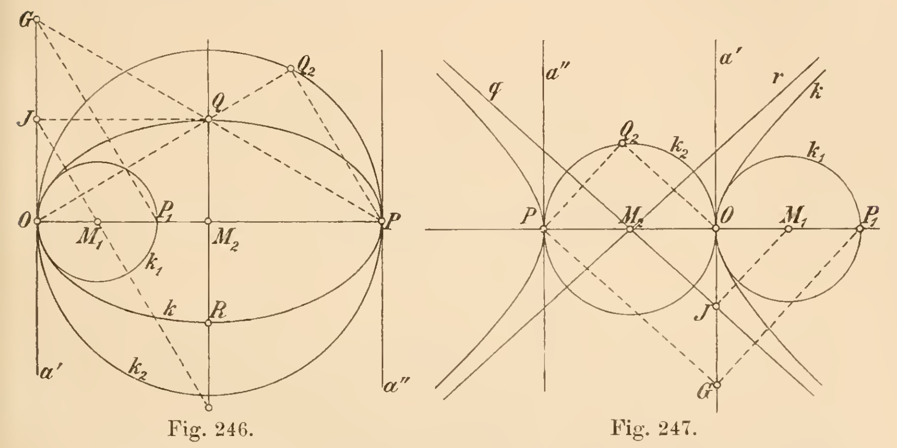


Fig. 246. Fig. 247.

382. Ist OP die Achse einer Hyperbel k mit den Asymptoten q und r, so ziehe man wieder (Fig. 247) den Kreis k_2 über OP als Durchmesser, dann stehen a'' und a' wieder auf OP in P resp. O senkrecht. Der zu q parallele Strahl durch O schneide k_2 in Q_2, der zu q parallele Strahl durch P schneide a' in G. Ziehen wir noch durch G eine Parallele zu PQ_2, so schneidet sie auf der Hyperbelachse den Durchmesser OP_1 des Krümmungskreises k_1 ab. In der That entspricht dem unendlich fernen Punkt von q vermöge $\mathfrak{P}''$ der Punkt Q_2 von k_2, also der Geraden PG die Gerade PQ_2. Ferner entspricht der Geraden PG vermöge $\mathfrak{P}'$ die zu PQ_2 parallele Gerade GP_1. Hieraus folgt die Konstruktion. Im Schnittpunkt J der Scheiteltangente a' mit einer Asymptote q errichte man eine Senkrechte auf der letzteren, so geht sie durch den Krümmungsmittelpunkt M_1. Denn J halbiert OG und M_1 ebenso die Strecke OP_1.

383. Kennt man von einem Kegelschnitt k (Ellipse oder Hyperbel) die Lage zweier konjugierter Durchmesser x und y, sowie

(einen Punkt O mit seiner Tangente t und seiner Normalen n Fig. 248), so findet man den Krümmungskreis k_1 in O und sein Centrum M_1 durch folgende Überlegung. Es seien T und U die Schnittpunkte von t mit y und x, dann ziehe man durch T eine Senkrechte zu x, die n in M_2 schneiden mag. M_2 ist das Centrum eines Kreises k_2, der k in O berührt, und T besitzt in Bezug auf k und k_2 dieselbe Polare, nämlich eine Parallele zu x durch O. In der Perspektive $\mathfrak{P}''$, die zwischen k und k_2 besteht, entspricht aber diese Parallele sich selbst, folglich entsprechen sich auch ihre Pole, die hier in T zusammenfallen; somit ist T ein Punkt der Achse a'' von $\mathfrak{P}''$. Ferner ziehe man durch O eine Parallele zu y; ihr Pol

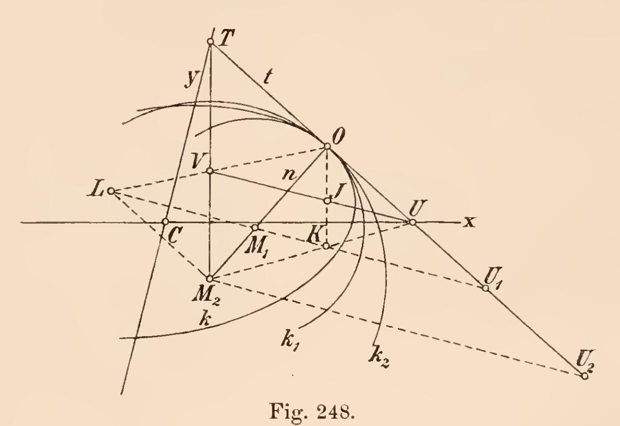


Fig. 248.

in Bezug auf k ist U, ihre Pole bezüglich k_2 und k_1 seien U_2 und U_1, sie liegen auf t und es müssen M_2U_2 und M_1U_1 auf y senkrecht stehen. Die perspektiven Beziehungen $\mathfrak{P}''$ zwischen k und k_2 und $\mathfrak{P}'$ zwischen k und k_1 lassen aber die Strahlen durch O ungeändert, folglich sind U und U_2 entsprechende Punkte von $\mathfrak{P}''$ und U und U_1 solche von $\mathfrak{P}'$. Da a'' und a' respektive durch T und O gehen, so haben wir nach 379 die Relation $TU : TU_2 = OU : OU_1$. Liegt V auf TM_2 und ist $VU \parallel M_2U_2$, schneidet ferner das von O auf x gefällte Lot die Geraden UV und UM_2 in J und K respektive, so ist $TU : TU_2 = TV : TM_2 = OJ : OK = OU : OU_1$. Demnach ist $U_1K \parallel UJ$, oder $U_1K \perp y$, d. h. U_1K geht durch M_1. Das liefert eine Konstruktion für M_1. Man ziehe durch T und O Senkrechte zu x, schneide die erstere mit n in M_2 und die letztere mit M_2U in K, dann schneidet das von K auf y gefällte Lot auf n den Krümmungsmittelpunkt M_1 aus.

Ziehen wir noch die Gerade OV und bestimmen auf ihr den Punkt L so, daß $LM_2 \parallel t$ wird, so ist $TU : TU_2 = TV : TM_2 = OV : OL =$

$OU : OU_1$; demnach ist $U_1 L \parallel UV$ und geht durch M_1. Das führt zu folgender Konstruktion. Man fälle von T und U bezw. die Lote auf x und y, die sich in V schneiden, und schneide das erstere mit n in M_2. Jetzt ziehe man durch M_2 eine Parallele zu t und schneide sie mit OV in L, dann geht die durch L senkrecht zu y gezogene Gerade durch M_1.

In den Figuren 249 und 250 sind statt zweier konjugierter Durchmesser die Achsen x und y angenommen, was die angegebenen

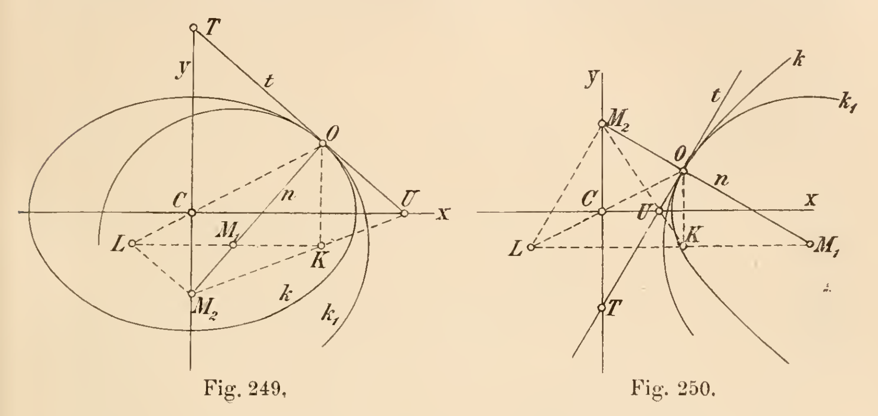


Fig. 249. Fig. 250.

Konstruktionen noch etwas vereinfacht. Man verbinde $M_2 = y \times n$ mit $U = x \times t$, ziehe durch O eine Parallele zu y und schneide sie mit $M_2 U$ in K, dann liegt M_1 auf einer Parallelen zu x durch K. Oder man ziehe den Durchmesser durch O und schneide ihn mit einer Parallelen zu t durch M_2 in L, dann ist $LM_1 \parallel x$.

384. Wir behandeln jetzt den Fall, daß von einer Ellipse k zwei konjugierte Durchmesser OP und QR gegeben sind, die sich im Mittelpunkte C schneiden (Fig. 251) und suchen den Krümmungsradius im Endpunkt eines Durchmessers. Dazu ziehen wir die Tangente t und die Normale n in O und außerdem die Tangenten in Q und R, welche t in T resp. U schneiden. Dann fällen wir von T auf OQ ein Lot und machen seinen Schnittpunkt M_2 mit n zum Mittelpunkt des Kreises k_2. In der Perspektive $\mathfrak{P}''$, die

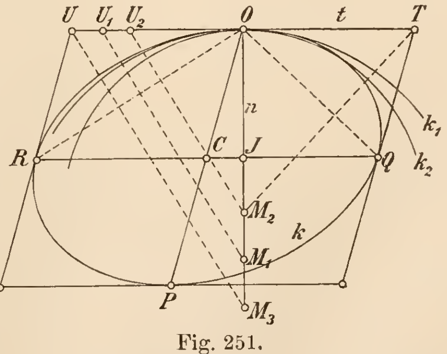


Fig. 251.

k in k_2 überführt, entspricht der Strahl OQ und auch der Punkt T sich selbst, da dem Strahl OQ sowohl in Bezug auf k als in Bezug auf k_2 der nämliche Pol T zugehört. Demnach ist T ein Punkt der Achse a'' von $\mathfrak{P}''$, während die Achse a' der perspektiven Beziehung $\mathfrak{P}'$ zwischen Ellipse k und Krümmungskreis k_1 durch O hindurchgeht. Sind nun U, U_2 und U_1 die Pole von OR bezüglich k, k_2 und k_1, so lassen $\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{P}'$ den Strahl OR ungeändert, sie führen also den Punkt U bezw. in die Punkte U_2 und U_1 über (U, U_1 und U_2 auf t). Nach 379 besteht deshalb die Relation: $OU : OU_1 = TU : TU_2$, und da $OU = \frac{1}{2} TU$ ist, folgt weiter: $OU_1 = \frac{1}{2} TU_2 = \frac{1}{2}(OU + OU_2)$, d. h. $UU_1 = U_1 U_2$. Da U_2 und U_1 die Pole von OR in Bezug auf k_2 und k_1 sind, stehen $M_2 U_2$ und $M_1 U_1$ auf OR senkrecht. Zieht man noch durch U eine Senkrechte zu OR, so schneidet sie n in einem Punkte M_3 und es ist $M_1 M_2 = M_1 M_3$. Schreibt man also der Ellipse k in den Endpunkten zweier konjugierter Durchmesser ein Parallelogramm um, errichtet im Mittelpunkt O der einen Seite die Normale n und fällt von den Endpunkten dieser Seite die Lote auf die Diagonalen des Parallelogramms, so schneiden sie auf n eine Strecke aus, deren Mittelpunkt das Centrum des Krümmungskreises ist.

385. Hieraus ergiebt sich noch eine einfachere Konstruktion, wenn man bedenkt, daß $JQ : JO = OM_2 : OT$ und $JR : JO = OM_3 : OU$ ist. Denn bildet man die halbe Summe dieser Relationen, so erhält man: $CQ : JO = OM_1 : OU$ oder $OJ \,.\, OM_1 = (OU)^2$. Das besagt aber, daß UM_1 auf TJ senkrecht steht (Fig. 252). Man ziehe also in O die Tangente t und die Normale n, trage auf t die Strecken $OT = OU = CQ$ auf und fälle von U das Lot auf die Verbindungslinie von T mit J, dem Schnittpunkt von n und QR; dieses Lot schneidet dann auf n den Krümmungsmittelpunkt M_1 von k_1 aus.

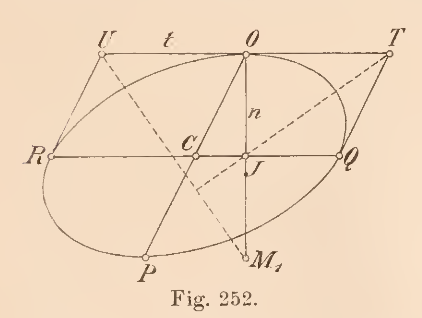


Fig. 252.

Diese Resultate lassen sich auch aus Nummer 383 einfach ableiten, wenn man dort CT und CU als konjugierte Durchmesser x und y benutzt.

386. Ganz analog zu den letzten Darlegungen gestalten sich die Verhältnisse bei einer H y p e r b e l k mit dem Mittelpunkt C, wenn ihre b e i d e n A s y m p t o t e n q und r und der Punkt O gegeben sind (Fig. 253). Man ziehe in O die Tangente t und die Normale n;

erstere schneide q und r respektive in T und U, dann ist bekanntlich $OT = OU$, woraus sich die Lage von t ergiebt. Hierauf errichte man in T eine Normale auf q und mache seinen Schnittpunkt M_2 mit n zum Mittelpunkte des Kreises k_2. Bedeutet Q_∞ den unendlich fernen Punkt der Asymptote q, so ist T der Pol von OQ_∞ sowohl in Bezug auf k als in Bezug auf k_2. Bei der perspektiven Beziehung $\mathfrak{P}''$ zwischen k und k_2 entspricht demnach T sich selbst und liegt somit auf der Achse a''. Sind ferner U, U_2 und U_1 die Pole von OR_∞ (R_∞ unendlich ferner Punkt von r) bezüglich k, k_2 und k_1, so entsprechen dem Punkte U vermöge $\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{P}'$ die

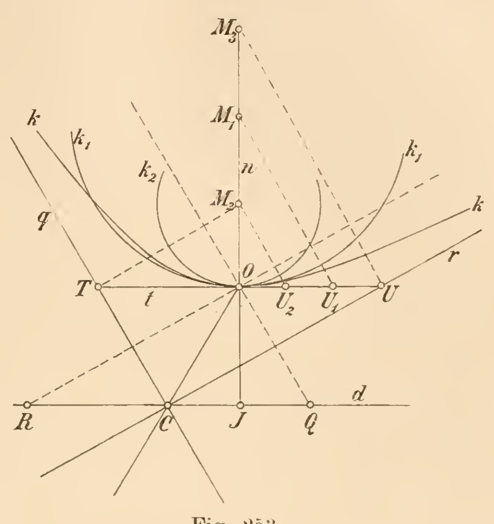


Fig. 253.

Punkte U_2 und U_1 und es besteht nach 379 wieder die Relation $OU : OU_1 = TU : TU_2$, aus der wiederum $UU_1 = U_1U_2$ folgt. Da U_1 und U_2 die Pole von OR_∞ in Bezug auf k_1 und k_2 sind, stehen M_1U_1 und M_2U_2 auf OR_∞ senkrecht. Zieht man noch durch U eine Senkrechte zu OR_∞, so schneidet sie n in einem Punkte M_3 und es ist $M_1M_2 = M_1M_3$. Errichtet man also in den Schnittpunkten einer Hyperbeltangente t mit den Asymptoten auf diesen die Normalen, so schneiden sie auf der zugehörigen Normalen n eine Strecke aus, die vom Krümmungsmittelpunkt halbiert wird.

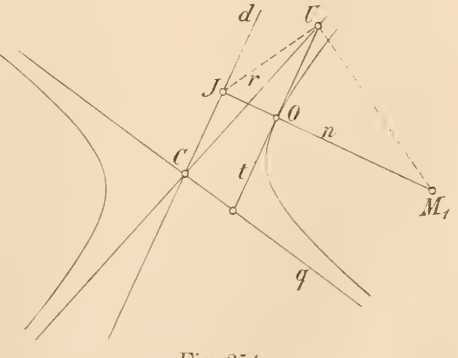


Fig. 254.

387. Hieraus leitet man eine noch einfachere Konstruktion ab durch Benutzung der Relationen $OM_2 : OT = JQ : JO$ und $OM_3 : OU = JR : JO$. Dabei bedeuten J, Q und R die Schnittpunkte des zu OC konjugierten

Durchmessers d mit den Geraden n, OQ_∞ und OR_∞. Die halbe Summe der Seiten beider Gleichungen ergiebt wieder: $OM_1 : OU = CQ : JO$, oder $OM_1 . OJ = (OU)^2$. Man ziehe also im Punkte O der Hyperbel die Tangente t und die Normale n und schneide letztere mit dem zu t parallelen Durchmesser in J und erstere mit einer Asymptote in U, dann ist UM_1 senkrecht zu UJ (Fig. 254).

388. Die Krümmungskreise der Parabel. Es sei d ein Durchmesser, S sein Endpunkt, s die zugehörige Tangente und O ein beliebiger Punkt der Parabel k (Fig. 255). Die Parabeltangente t in O schneidet d in einem Punkte T und dieser ist der Pol von OP in Bezug auf k ($OP \| s$, $QO = QP$, Q auf d, $ST = SQ$). T ist

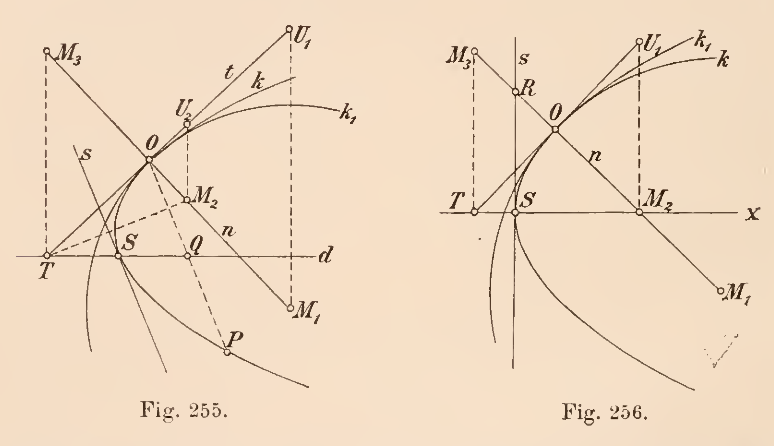


Fig. 255. Fig. 256.

auch der Pol von OP in Bezug auf einen Kreis k_2, dessen Mittelpunkt M_2 aus n durch das von T auf OP gefällte Lot ausgeschnitten wird und dessen Peripherie durch O geht. In der zwischen k und k_2 bestehenden Perspektive $\mathfrak{P}''$ entspricht OP sich selbst und folglich ist das Gleiche bei T der Fall, so daß T auf der Achse a'' von $\mathfrak{P}''$ liegt. Nun ziehe man durch O eine Parallele u zu d und bezeichne mit U, U_2 und U_1 ihre Pole in Bezug auf k, k_2 und den Krümmungskreis k_1. Dann liegen U, U_2 und U_1 auf t und zwar ist U unendlich fern, während $M_2 U_2$ und $M_1 U_1$ auf d senkrecht stehen. In den perspektiven Beziehungen $\mathfrak{P}''$ zwischen k und k_2, sowie $\mathfrak{P}'$ zwischen k und k_1 entspricht u sich selbst, sonach sind U und U_2 entsprechende Punkte von $\mathfrak{P}''$ und U und U_1 solche von $\mathfrak{P}'$. Da a'' durch T und a' durch O geht, gilt die Relation $TU : TU_2 = OU : OU_1$ oder, da $TU : OU = 1$ ist: $TU_2 = OU_1$ und $TO = U_2 U_1$. Daraus folgt weiter: $M_2 M_1 = OM_3$, wenn eine in T auf d errichtete Normale durch M_3 auf n geht, und schließlich $OM_1 = M_2 M_3$.

Daher folgende Konstruktion. Ist d ein beliebiger Durchmesser der Parabel und s seine Tangente im Endpunkt, sind ferner t und n Tangente und Normale in einem Punkte O, so errichte man in $T = t \times d$ eine Normale auf d und fälle von T ein Lot auf s, dann schneiden diese beiden Geraden auf n die Länge des Krümmungsradius ab.

Ist insbesondere d die Achse und s die Scheiteltangente (Fig. 256), so liegt M_2 auf d und es ist $OM_3 = 2\,OR$ $(R = s \times n)$. Auf jeder Parabelnormalen giebt die vom Parabelpunkt und der Achse begrenzte Strecke, vermehrt um die doppelte vom Parabelpunkt und der Scheiteltangente begrenzte Strecke, die Länge des betreffenden Krümmungsradius.

Gemeinsame Elemente zweier Kegelschnitte. Büschel und Scharen von Kegelschnitten. Perspektive Lage zweier beliebiger Kegelschnitte.

389. Vier Punkte einer Ebene bestimmen mit jedem beliebigen fünften Punkte einen Kegelschnitt.

Vier Gerade einer Ebene bestimmen mit jeder beliebigen fünften Geraden einen Kegelschnitt.

Daher gelten die dualen Sätze:

Durch vier Grundpunkte A, B, C, D einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, gehen unendlich viele Kegelschnitte; ihre Gesamtheit heißt Kegelschnittbüschel. Durch jeden Punkt der Ebene geht ein und nur ein Kegelschnitt des Büschels.

Vier Grundlinien a, b, c, d einer Ebene, von denen keine drei sich in einem Punkte schneiden, werden von unendlich vielen Kegelschnitten berührt; ihre Gesamtheit heißt Kegelschnittschar. Jede Gerade der Ebene wird von einem und nur von einem Kegelschnitt der Schar berührt.

Hiernach ist klar, daß zwei Kegelschnitte k und k_1 vier Schnittpunkte und vier gemeinsame Tangenten besitzen können; daß sie aber auch immer wirklich vier gemeinsame Punkte und vier gemeinsame Tangenten haben müssen, wird weiterhin gezeigt werden. Zunächst ist hervorzuheben, daß die vier Schnittpunkte (und ebenso die gemeinsamen Tangenten) teilweise, oder alle vier imaginär werden können, denn nach 357 kann man stets einen Kegelschnitt konstruieren, der durch zwei Paare konjugiert imaginärer Punkte und einen reellen Punkt geht, oder der zwei Paare konjugiert imaginärer Geraden und eine reelle Gerade berührt.

390. Zwei Kegelschnitte besitzen stets eine gerade

Zahl (0, 2 oder 4) von reellen Schnittpunkten und von reellen gemeinsamen Tangenten. Wir beweisen nur den ersten Teil des Satzes, der zweite folgt dann daraus durch Anwendung des Prinzipes der Dualität. In Bezug auf einen Kegelschnitt k liegen nun die Punkte einer Ebene teils innerhalb und teils außerhalb (259). Der Kegelschnitt k scheidet also die ganze Ebene in zwei Gebiete, von denen das eine die inneren, das andere die äußeren Punkte umfaßt. Bei der Hyperbel giebt es scheinbar zwei getrennte Gebiete innerer Punkte, dieselben hängen aber im Unendlichen zusammen. Denn schneidet eine Gerade beide Hyperbeläste, so liegen die Punkte der von der Hyperbel begrenzten endlichen Strecke außerhalb, die andern Punkte innerhalb der Kurve; die beiden unendlichen Strecken der Geraden hängen aber im Unendlichen zusammen. Das zeigt sich auch, wenn man die Hyperbel als perspektives Bild eines Kreises betrachtet, wobei die innern Punkte der Hyperbel aus den innern Punkten des Kreises hervorgehen. Schneidet daher ein Kegelschnitt k_1 den Kegelschnitt k in einem reellen Punkte A und durchläuft ein Punkt den Kegelschnitt k_1, der ja eine in sich geschlossene Kurve ist, in einem bestimmten Bewegungssinne, so wird er beim Passieren von A aus seiner Anfangslage im äußeren Gebiete in das innere Gebiet von k übergehen. Nach Durchlaufen des ganzen Kegelschnittes k_1 gelangt der Punkt wieder in seine Anfangslage, d. h. in das äußere Gebiet zurück, er muß also auf seinem Wege nochmals den Kegelschnitt k überschreiten. Ein reeller Schnittpunkt A von k und k_1 erfordert also mindestens einen zweiten reellen Schnittpunkt B, und ganz ebenso überzeugt man sich, daß ein dritter reeller Schnittpunkt einen vierten nach sich zieht. Damit ist aber der obige Satz bewiesen. Wir werden weiterhin erkennen, daß die imaginären Schnittpunkte und gemeinsamen Tangenten von k und k_1 paarweise konjugiert imaginär sein müssen.

391. Die Untersuchung der gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte k und k_1 basiert auf den Eigenschaften der harmonischen Pole und Polaren, und wir wollen daher, bevor wir in diese Untersuchungen selbst eintreten, folgenden Doppelsatz vorausschicken und beweisen.

Wenn zwei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits harmonische Pole eines Kegelschnittes sind, so besitzt das dritte Paar die gleiche Eigenschaft; das Vierseit heißt Polvierseit.

Wenn zwei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks harmonische Polaren eines Kegelschnittes sind, so besitzt das dritte Paar die gleiche Eigenschaft; das Viereck heißt Polviereck.

Es seien s eine Seite des Vierseits und A, B, C die auf ihr liegenden Ecken, ferner seien A', B', C' die zugehörigen Gegenecken. In Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt k mögen A, A' und ebenso B, B' harmonische Pole und S der Pol von s sein (Fig. 257). Dann ist SA' die Polare von A, denn diese muß einerseits durch den Pol S von s und andererseits durch den zu A harmonischen Pol A' gehen; ebenso ist SB' die Polare von B. Die harmonischen Polaren durch S bestimmen eine Involution, von der SA und SA', sowie SB und SB' je ein Strahlenpaar vorstellen. Nach 229 bilden auch SC und SC' ein Strahlenpaar der genannten Involution und sind somit harmonische Polaren. Daraus folgt weiter, daß C der Pol von SC' ist, denn der Pol von SC' liegt sowohl auf der zugehörigen harmonischen Polare SC als auf der Polare s von S. Damit ist der erste Satz bewiesen, das Gesetz der Dualität liefert sodann den zweiten

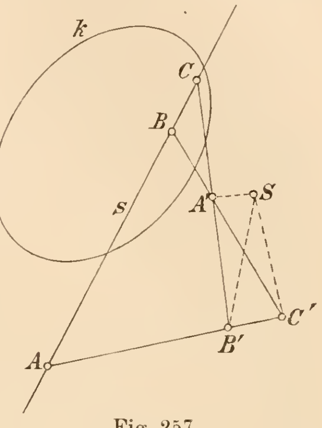


Fig. 257.

392. Wir gehen bei unseren weiteren Betrachtungen von zwei beliebigen, einer Ebene angehörigen Kegelschnitten k und k_1 aus. Offenbar giebt es im allgemeinen zu jedem Punkte P der Ebene einen einzigen harmonischen Pol P' in Bezug auf beide Kegelschnitte. Sind p und p_1 die Polaren von P bezüglich k resp. k_1, so ist $P' = p \times p_1$ bezüglich beider Kegelschnitte der zu P gehörige harmonische Pol. Hier gilt nun ersichtlich der Satz: Bewegt sich ein Punkt P auf einer Geraden g, so bewegt sich der ihm in Bezug auf k und k_1 zugehörige harmonische Pol P' auf einem Kegelschnitt g'; dieser enthält die Pole G und G_1 von g bezüglich k resp. k_1. Denn dem Punkte P von g gehören hinsichtlich k resp. k_1 zwei Polaren p resp. p_1 zu, die durch G resp. G_1 gehen. Bewegt sich also P auf g, so drehen sich p und p_1 um G und G_1 respektive; dabei ist nach 281 die von P auf g erzeugte Punktreihe projektiv zu den von p resp. p_1 erzeugten Strahlbüscheln mit den Scheiteln G resp. G_1. Diese Büschel sind somit selbst projektiv und erzeugen einen Kegelschnitt g', der durch ihre Scheitel hindurchgeht.

Auf jeder Geraden g liegen zwei reelle oder konjugiert imaginäre, gemeinsame harmonische Pole von k und k_1.

Denn auf g bilden die harmonischen Pole von k eine Involution und die harmonischen Pole von k_1 eine andere Involution; beide haben aber ein reelles oder konjugiert imaginäres Punktepaar gemein. Konjugiert imaginär sind die gemeinsamen harmonischen Pole auf g nach 353 nur dann, wenn g beide Kegelschnitte in reellen Punkten schneidet und die Schnittpunkte von g mit jedem von ihnen durch den andern getrennt werden.

393. Den soeben abgeleiteten Resultaten stehen die folgenden dual gegenüber. Zu jeder Geraden giebt es eine einzige Gerade, die ihr in Bezug auf zwei Kegelschnitte k und k_1 als harmonische Polare zugehört. Dreht sich eine Gerade um einen Punkt P, so umhüllt die ihr in Bezug auf k und k_1 zugehörige harmonische Polare einen Kegelschnitt; dieser berührt die Polaren p und p_1 von P bezüglich k resp. k_1. Durch jeden Punkt P gehen zwei reelle oder konjugiert imaginäre, gemeinsame harmonische Polaren von k und k_1. Konjugiert imaginär werden diese harmonischen Polaren nur dann, wenn man aus P an jeden der beiden Kegelschnitte ein reelles Tangentenpaar legen kann und jedes Tangentenpaar durch das andere getrennt wird.

394. Wir betrachten jetzt zwei Gerade g und h und bestimmen ganz wie in 392 die zugehörigen Kegelschnitte g' und h', deren Punkte die harmonischen Pole zu den Punkten von g resp. h in Bezug auf beide Kegelschnitte k und k_1 sind. Dem Schnittpunkt $S = g \times h$ gehört als harmonischer Pol bezüglich k und k_1 ein Punkt S' zu, der zugleich auf g' und h' liegt. Demnach haben die Kegelschnitte g' und h' noch mindestens einen weiteren reellen Schnittpunkt L gemein. Da der Punkt L sowohl auf g' als auf h' liegt, gehört ihm sowohl auf g als auf h ein harmonischer Pol zu. Die Verbindungslinie l dieser beiden Pole ist somit die Polare von L hinsichtlich beider Kegelschnitte k und k_1, denn die Polare eines Punktes enthält alle seine harmonischen Pole (280). Es giebt stets einen reellen Punkt L, dem in Bezug auf zwei gegebene Kegelschnitte k und k_1 die nämliche Polare l zukommt.

395. Auf l liegen nach 392 zwei reelle oder konjugiert imaginäre, gemeinsame harmonische Pole von k und k_1. Diese bilden zusammen mit L die Ecken eines beiden Kegelschnitten gemeinsamen Polardreiecks, da je zwei seiner Ecken harmonische Pole bezüglich beider Kegelschnitte sind. Zwei Kegelschnitte k und k_1 besitzen immer ein gemeinsames Polardreieck; von diesem ist stets eine Ecke L und die gegenüberliegende Seite l reell. Die

beiden andern Ecken M und N sind ebenfalls reell, solange die Gerade l nicht k und k_1 zugleich schneidet und nicht ihre Schnittpunkte mit k durch *einen* ihrer Schnittpunkte mit k_1 getrennt werden; im andern Falle sind sie konjugiert imaginär.

396. Wiederum sei L der reelle Punkt, dem in Bezug auf k und k_1 die nämliche Polare l zukommt. Legt man nun durch L irgend eine Gerade g, so liegen ihre Pole G und G_1 bezüglich k resp. k_1 auf l. Die Punktreihe auf g und die beiden Strahlbüschel mit den Scheiteln G resp. G_1 sind projektiv, wenn man jedem Punkt von g seine Polaren bezüglich k resp. k_1 zuordnet. Die beiden Strahlbüschel haben aber den Strahl $GG_1 = l$ entsprechend gemein (da l die Polare von L für beide Kegelschnitte ist), sie sind also perspektiv. Demnach liegen die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen, d. h. die harmonischen Pole zu den Punkten von g auf einer Geraden g'. Diese geht ebenfalls durch L, da L der harmonische Pol zu $g \times l$ ist. Auf diese Weise werden die Strahlen durch L einander paarweise zugeordnet derart, daß jedem Punkt des einen ein Punkt des andern als harmonischer Pol in Bezug auf beide Kegelschnitte zukommt. Da das Entsprechen vertauschbar ist, bilden die Strahlenpaare durch L eine Involution. Je zwei gemeinsame harmonische Pole von k und k_1 liegen auf zwei entsprechenden Strahlen dieser Involution. Alle Punktepaare der Ebene, die zugleich harmonische Pole von k und k_1 sind, werden aus L durch die Strahlenpaare einer Involution projiziert. Insbesondere bilden die durch L gehenden Seiten des beiden Kegelschnitten gemeinsamen Polardreiecks ein Strahlenpaar dieser Involution.

397. Die Doppelstrahlen der Strahleninvolution mit dem Scheitel L haben die Eigenschaft, daß jedem Punkt eines solchen Strahles wieder ein Punkt des nämlichen Strahles als gemeinsamer harmonischer Pol (bezw. k und k_1) entspricht. Demnach ist jeder Doppelstrahl der Träger einer Punktinvolution, deren Punktepaare harmonische Pole in Bezug auf beide Kegelschnitte sind. Die Doppelelemente der soeben genannten Punktinvolution liegen sowohl auf k wie auf k_1 (282); durch L gehen also zwei reelle oder konjugiert imaginäre Strahlen, von denen jeder mit beiden Kegelschnitten die nämlichen (reellen oder imaginären) Punkte gemein hat und die man deshalb als gemeinsame Sehnen von k und k_1 bezeichnet. Diese gemeinsamen Sehnen durch L liegen harmonisch zu den beiden von L ausgehenden Seiten des gemeinsamen Polardreiecks (223).

398. Die dualen Betrachtungen ergeben, daß alle Geradenpaare der Ebene, die zugleich harmonische Polaren von k und k_1 sind, auf der Seite l des gemeinsamen Polardreiecks eine Punktinvolution ausschneiden. Die auf l liegenden Ecken des Polardreiecks bilden ein Punktepaar dieser Involution. Ihre Doppelpunkte bilden die Scheitel von Strahleninvolutionen, deren Strahlenpaare harmonische Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte sind. Die Doppelstrahlen dieser Strahleninvolutionen berühren zugleich k und k_1 (282); auf l liegen also zwei reelle oder konjugiert imaginäre Punkte, durch jeden von ihnen gehen zwei (reelle oder imaginäre) gemeinsame Tangenten an k und k_1. Die beiden Punkte auf l mit gemeinsamen Tangenten liegen harmonisch zu den beiden auf l befindlichen Ecken des Polardreiecks.

399. In Bezug auf die Realitätsverhältnisse ist noch folgendes zu bemerken. Sind die durch L gehenden Seiten des gemeinsamen Polardreiecks reell, so können die gemeinsamen Sehnen durch L reell oder konjugiert imaginär sein. Sind jene Seiten aber konjugiert imaginär, so müssen die gemeinsamen Sehnen durch L reell sein (352). Die auf reellen Sehnen durch L liegenden Involutionen gemeinsamer harmonischer Pole haben entweder beide reelle Doppelpunkte, oder keine von ihnen hat reelle Doppelpunkte, oder nur eine von ihnen hat solche. In dem ersten und zweiten Fall können die Punktinvolutionen in zweifacher Weise durch die nämliche reelle Strahleninvolution ausgeschnitten werden (355); die Scheitel dieser Strahleninvolutionen seien M und N. Im ersten Falle besitzen k und k_1 vier reelle Schnittpunkte, deren Verbindungslinien (Sehnen) sich paarweise in den reellen Ecken L, M und N des gemeinsamen Polardreiecks schneiden. Im zweiten Falle haben k und k_1 zwei Paare konjugiert imaginärer Punkte gemein; durch L gehen zwei reelle, durch M und N je zwei konjugiert imaginäre Sehnen, M und N bestimmen aber wie vorher mit L ein reelles gemeinsames Polardreieck. Im dritten Falle haben k und k_1 zwei reelle und zwei konjugiert imaginäre Punkte gemein; jetzt ist vom gemeinsamen Polardreieck nur noch eine Ecke L und eine Seite l reell, seine beiden auf l liegenden Ecken sind jedoch konjugiert imaginär.

Sind die Ecken L, M, N des gemeinsamen Polardreiecks reell, so können nach obigem die beiden Sehnen durch L auch konjugiert imaginär sein. Dann müssen auch die Sehnen durch M (oder N) imaginär sein; denn wären gleichzeitig die Sehnen durch M und N

reell, so besäßen sie vier reelle Schnittpunkte, die zugleich Schnittpunkte von k und k_1 wären, und die Sehnen durch L wären ebenfalls reell. Wir haben also hier zwei Strahleninvolutionen mit den Scheiteln L und M, deren Doppelstrahlen die genannten konjugiert imaginären Sehnen sind. Es giebt aber zwei reelle Gerade, von denen jede beide Strahleninvolutionen in der nämlichen Punktinvolution schneidet. Diese beiden reellen Geraden gehen nach 354 u. 355 durch den Punkt N, da dem Strahl LM in den genannten Strahleninvolutionen die Strahlen LN resp. MN entsprechen. Je zwei entsprechende Punkte P und P_1 der auf einer solchen Geraden liegenden Involution sind gemeinsame harmonische Pole von k und k_1; denn sie liefern mit L resp. M verbunden entsprechende Strahlen der bezüglichen Strahleninvolutionen, wie das nach 396 für gemeinsame harmonische Pole sein muß. Die beiden reellen Geraden durch N sind also Träger von Involutionen, deren Punktepaare gemeinsame harmonische Pole von k und k_1 sind, d. h. jede von ihnen hat mit beiden Kegelschnitten k und k_1 die nämlichen beiden konjugiert imaginären Punkte gemein. Dieser Fall stimmt also mit dem weiter oben erwähnten zweiten Fall überein, nur spielt hier der Punkt N die Rolle, die dort dem Punkt L zukommt.

400. Das Prinzip der Dualität gestattet uns noch folgende Resultate den vorigen hinzuzufügen. Besitzen zwei Kegelschnitte k und k_1 ein gemeinsames reelles Polardreieck LMN, so haben sie entweder vier reelle gemeinsame Tangenten, oder dieselben sind paarweise konjugiert imaginär. Im ersten Falle liegen ihre sechs reellen Schnittpunkte paarweise auf den Seiten des Polardreiecks. Im zweiten Falle liegen nur auf einer Seite des Polardreiecks zwei reelle Punkte, in denen sich je zwei konjugiert imaginäre gemeinsame Tangenten schneiden, während jede der beiden andern Seiten zwei konjugiert imaginäre Schnittpunkte dieser Tangenten trägt. Hat jedoch das gemeinsame Polardreieck von k und k_1 nur eine reelle Ecke L und eine reelle Seite l, so liegen auf l zwei reelle Punkte, in denen sich je zwei gemeinsame Tangenten von k und k_1 schneiden. Die gemeinsamen Tangenten aus einem dieser beiden Punkte sind reell, aus dem andern aber konjugiert imaginär. Denn die Annahme, daß die Tangenten aus beiden Punkten reell, oder aus beiden Punkten konjugiert imaginär seien, würde zu einem völlig reellen gemeinsamen Polardreieck führen.

401. Wir fassen nun unsere Resultate in die folgenden Sätze zusammen:

Zwei Kegelschnitte k und k_1 haben stets vier Punkte

und vier Tangenten gemein; die nicht reellen unter ihnen sind paarweise konjugiert imaginär. Ferner besitzen sie ein gemeinsames Polardreieck, das entweder ganz reell ist, oder eine reelle Ecke und eine reelle Seite aufweist.

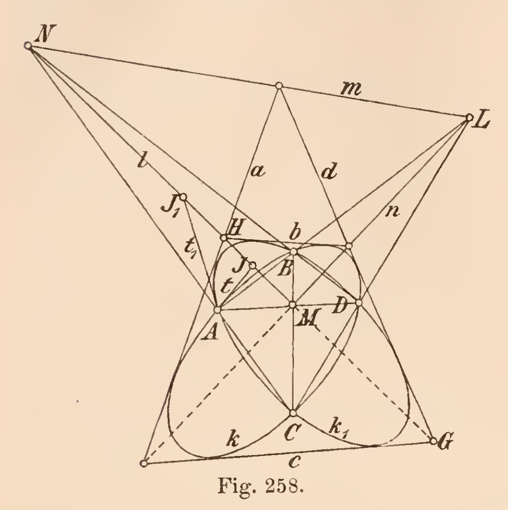


Fig. 258.

Ist das gemeinsame Polardreieck LMN völlig reell, so sind vier verschiedene Fälle zu unterscheiden.

α) Alle gemeinsamen Punkte und Tangenten von k und k_1 sind reell. Dann liegen die Punkte paarweise auf sechs reellen Strahlen; durch jede Ecke des Polardreiecks gehen zwei von ihnen, sie teilen den bez. Winkel harmonisch. Ebenso schneiden sich die Tangenten paarweise in sechs reellen Punkten; auf jeder Seite des Polardreiecks liegen zwei von ihnen, sie teilen die bez. Seite harmonisch (Fig. 258).

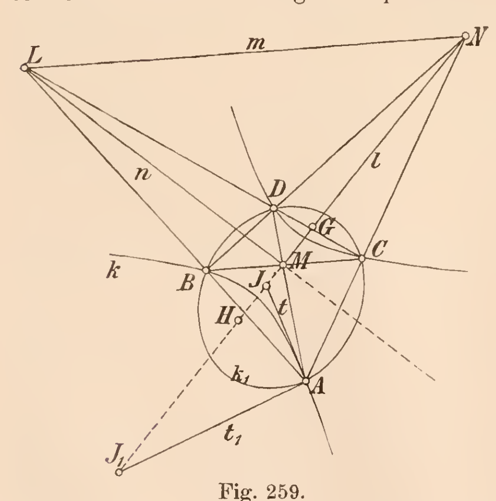


Fig. 259.

β) Alle gemeinsamen Punkte sind reell, die gemeinsamen Tangenten aber paarweise konjugiert imaginär. Für die Punkte gilt wieder das unter α) Gesagte. Auf einer Seite des Polardreiecks liegen zwei reelle Punkte, durch die je zwei konjugiert imaginäre gemeinsame Tangenten gehen; sie teilen die Seite harmonisch. Die übrigen Schnittpunkte der Tangenten liegen paarweise auf den beiden andern Seiten und sind konjugiert imaginär (Fig. 259).

γ) Die gemeinsamen Punkte sind paarweise konjugiert

imaginär, die gemeinsamen Tangenten aber alle reell. Für die Tangenten gilt dann das unter α) Gesagte. Durch eine Ecke des Polardreiecks gehen zwei reelle Strahlen, auf denen je zwei konjugiert imaginäre gemeinsame Punkte liegen; sie teilen den bez. Winkel harmonisch. Die übrigen Verbindungslinien der Punkte gehen paarweise durch die beiden andern Ecken und sind konjugiert imaginär (Fig. 260).

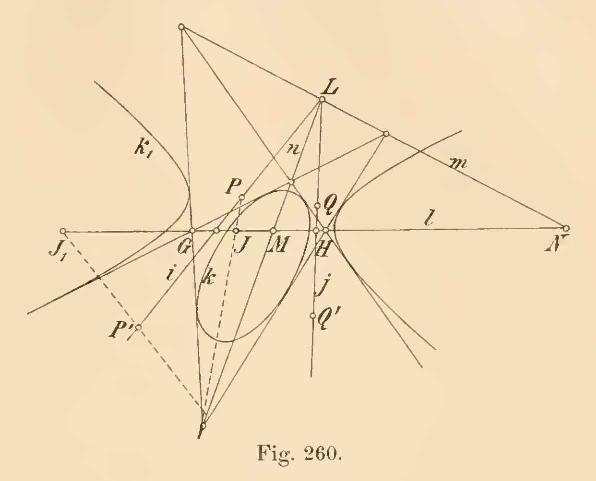


Fig. 260.

δ) Sowohl die gemeinsamen Punkte wie die gemeinsamen Tangenten sind paarweise konjugiert imaginär. Hier gehen durch eine Ecke des Polardreiecks zwei reelle Strahlen, die je zwei konjugiert imaginäre gemeinsame Punkte tragen und den bez. Winkel harmonisch teilen. Zugleich liegen auf einer Seite desselben zwei reelle Punkte, die je zwei konjugiert imaginäre gemeinsame Tangenten aussenden und die Seite harmonisch teilen (Fig. 261). Jene Ecke mit den reellen Strahlen und diese Seite mit den reellen Punkten liegen einander gegenüber; der Beweis hierfür findet sich weiter unten.

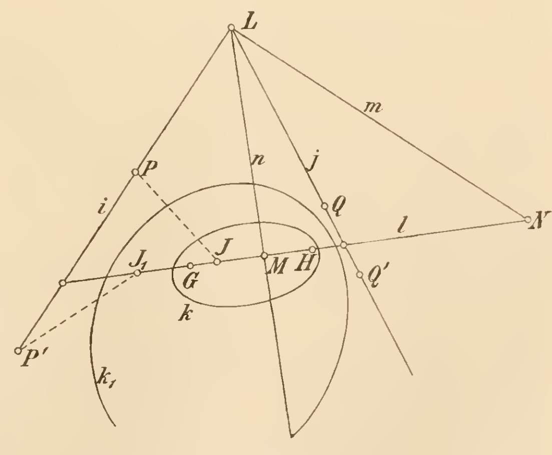


Fig. 261.

Ist vom gemeinsamen Polardreieck nur eine Ecke L und die gegenüberliegende Seite l reell, so erhalten wir den weiteren Fall:

ε) Von den gemeinsamen Punkten und Tangenten sind je zwei reell und je zwei konjugiert imaginär. Durch L gehen zwei reelle Strahlen, der eine trägt die reellen, der andere die konjugiert imaginären gemeinsamen Punkte. Auf l liegen zwei

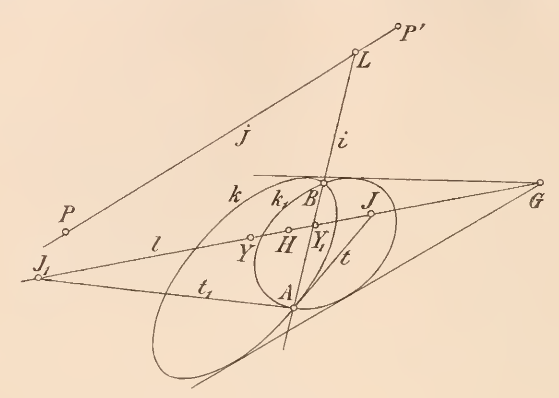


Fig. 262.

reelle Punkte, der eine sendet die reellen, der andere die konjugiert imaginären Tangenten aus (Fig. 262).

402. Zur Konstruktion der einzelnen Figg. 258—262 dienen noch die folgenden Betrachtungen. Wie wir sahen, liegen auf jeder Seite des gemeinsamen Polardreiecks von k und k_1 die beiden Punkte, welche die gemeinsamen Tangenten aussenden, harmonisch zu den Punkten, die irgend zwei gemeinsame harmonische Polaren von k und k_1 auf ihr ausschneiden. Ebenso liegen in jeder Ecke des Polardreiecks die beiden Strahlen, welche die gemeinsamen Punkte tragen, harmonisch zu den Strahlen, welche die Ecke mit irgend zwei gemeinsamen harmonischen Polen von k und k_1 verbinden. Es sei nun L eine Ecke und l eine Seite des gemeinsamen Polardreiecks, ferner seien i und j zwei reelle Strahlen durch L, welche je eine Involution gemeinsamer harmonischer Pole tragen, deren (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte also gemeinsame Punkte von k und k_1 sind. Endlich mögen P und P' ein Paar gemeinsamer harmonischer Pole auf i und Q und Q' ein derartiges Paar auf j bedeuten. Die Involution gemeinsamer harmonischer Pole auf i ist durch die Punktepaare P, P' und L, $i \times l$ bestimmt, die Involution auf j durch die Punktepaare Q, Q' und L, $j \times l$. Suchen wir dann den Pol J von i in Bezug auf k auf und den Pol J_1 von i in Bezug auf k_1, so sind PJ und $P'J_1$ gemeinsame harmonische Polaren von k und k_1; gleiches gilt für PJ_1 und $P'J$. In der That ist PJ

die Polare von P' in Bezug auf k, also sind PJ und $P'J_1$ harmonische Polaren von k; es ist aber auch $P'J_1$ die Polare von P in Bezug auf k_1, so daß $P'J_1$ und PJ auch harmonische Polaren von k_1 sind. Ist i eine gemeinsame Sehne von k und k_1 und sind J und J_1 ihre Pole bezüglich k resp. k_1, so gehört zu jedem Strahl durch J als gemeinsame harmonische Polare ein Strahl durch J_1; je zwei derartige Strahlen schneiden auf i zwei gemeinsame harmonische Pole aus. Daraus folgt weiter: J und J_1 gehören einer Seite des gemeinsamen Polardreiecks an und liegen harmonisch zu den beiden Punkten, welche die gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte auf ihr ausschneiden (398).

Natürlich gelten auch die dualen Sätze: Ist H ein Punkt, von dem sich zwei (reelle oder imaginäre) gemeinsame Tangenten an k und k_1 legen lassen, und sind h und h_1 seine Polaren bezüglich k resp. k_1, so gehört zu jedem Punkt von h als gemeinsamer harmonischer Pol ein Punkt von h_1; je zwei derartige Punkte liefern mit H verbunden zwei gemeinsame harmonische Polaren von k und k_1. h und h_1 enthalten eine Ecke des gemeinsamen Polardreiecks und liegen harmonisch zu den beiden durch die Ecke gehenden gemeinsamen Sehnen der Kegelschnitte.

403. In Figg. 258 und 259 sind A, B, C, D die den beiden Kegelschnitten k und k_1 gemeinsamen reellen Punkte und t und t_1 sind die bezüglichen Tangenten in A. Ist dann $AB \times CD = L$, $BC \times AD = M$, $BD \times AC = N$ und setzt man $MN = l$, $NL = m$, $LM = n$, so sind $J = t \times l$ und $J_1 = t_1 \times l$ die Pole von $i = AB$ in Bezug auf k und k_1. Die Punkte H und G von l, in denen sich die gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte paarweise schneiden, teilen die Punktepaare M, N und J, J_1 harmonisch. Ähnliches gilt für die Seiten m und n. Man sieht, daß in Fig. 258 t und t_1 jede Seite des Dreiecks LMN entweder in zwei zwischen den Ecken oder zwei außerhalb liegenden Punkten schneiden; deshalb liefern die gemeinsamen Tangenten auf jeder Seite zwei reelle Schnittpunkte. In Fig. 259 wird dagegen nur eine Seite gleichzeitig von t und t_1 in Punkten geschnitten, von denen keiner zwischen den Ecken liegt.

404. In Figg. 260 und 261 sind i und j die beiden gemeinsamen Sehnen, die je ein Paar konjugiert imaginärer gemeinsamer Punkte von k und k_1 tragen. Auf i und j liegen Involutionen gemeinsamer harmonischer Pole. P, P' auf i und Q, Q' auf j mögen solche Paare gemeinsamer harmonischer Pole sein. Natürlich muß man zur Festlegung dieser Involutionen auf i und j noch je ein

weiteres Punktepaar kennen. Sucht man dann in jeder der beiden Involutionen zu $L = i \times j$ den entsprechenden Punkt, so ist ihre Verbindungslinie die Polare l von L in Bezug auf beide Kegelschnitte. Die Ecken M und N des Polardreiecks sind diejenigen Punkte auf l, aus denen sich die auf i und j liegenden Involutionen durch die nämliche Strahleninvolution projizieren (396). Man erhält demnach M und N als die beiden Punkte der Geraden l, die sowohl zu ihren Schnittpunkten mit i und j, als auch zu ihren Schnittpunkten mit PQ' und $P'Q$ harmonisch liegen (vergl. 354). Nimmt man nun noch J und J_1 als Pole von i in Bezug auf k resp. k_1 an, so sind diese Kegelschnitte bestimmt und können leicht gezeichnet werden. Die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten mit l liegen harmonisch zu M, N und zu J, J_1. Die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten mit m (oder n) werden durch L, N (oder L, M) einerseits und durch PJ, $P'J_1$ andererseits harmonisch geteilt. In Fig. 260 sind die gemeinsamen Tangenten reell und schneiden auf allen Seiten des Dreiecks LMN reelle Punkte aus.

405. In Fig. 261 sind die gemeinsamen Tangenten paarweise konjugiert imaginär, jedes Paar schneidet sich in einem reellen Punkte von l. Um dies zu erkennen, schließen wir folgendermaßen: L liegt außerhalb der Kegelschnitte k und k_1, denn sonst würden die reellen Sehnen i und j durch L dieselben in reellen Punkten schneiden. Somit schneidet l beide Kegelschnitte in reellen Punkten. Die Schnittpunkte von k mit l liegen aber sowohl zu M und N als auch zu J und i harmonisch; demnach befinden sich $i \times l$ und J entweder beide auf der Strecke MN, oder beide auf ihrer Verlängerung. Auch $i \times l$ und J_1 müssen sich so verhalten, daß auch J und J_1 entweder beide auf der Strecke MN, oder beide auf ihrer Verlängerung liegen. Es giebt also zwei reelle Punkte G und H auf l, die gleichzeitig zu M, N und zu J, J_1 harmonisch liegen; in jedem von ihnen schneiden sich zwei konjugiert imaginäre gemeinsame Tangenten von k und k_1. Dagegen giebt es auf n keine Punkte, die zu L und M, sowie zu den Schnittpunkten von n mit PJ und $P'J_1$ harmonisch liegen, d. h. die gemeinsamen Tangenten von k und k_1 schneiden auf n keine reellen Punkte aus.

406. In Fig. 262 ist i die Sehne durch die reellen Schnittpunkte A und B und j die Sehne durch die konjugiert imaginären. Die letzteren sind wieder durch eine Involution bestimmt, von der P, P' und $L = i \times j$, $j \times l$ Punktepaare sind (A und B werden durch L und l harmonisch getrennt). Ferner mögen in A die Tangenten t und t_1 an k und k_1 gegeben sein, dann lassen sich die

Kegelschnitte zeichnen. Die Punkte G und H von l, in denen sich die gemeinsamen reellen bezw. konjugiert imaginären Tangenten schneiden, liegen einerseits harmonisch zu den Polen J und J_1 von i in Bezug auf k resp. k_1 und andererseits zu den Polen Y und Y_1 von j in Bezug auf k und k_1.

407. Zwei Kegelschnitte k und k_1 bestimmen einen Kegelschnittbüschel, dessen Kurven alle die vier Schnittpunkte von k und k_1 als Grundpunkte enthalten. Zu den Kegelschnitten des Büschels gehören auch die Geradenpaare durch diese Grundpunkte, von denen eins oder drei reell sind. Die Schnittpunkte der drei Geradenpaare sind die Ecken des allen Kegelschnitten gemeinsamen Polardreiecks. Zwei Punkte, welche harmonische Pole in Bezug auf k und k_1 sind, sind es auch in Bezug auf jeden andern Kegelschnitt des Büschels. Die vier gemeinsamen Punkte von k und k_1, mögen sie reell oder ganz oder teilweise imaginär sein, liegen stets paarweise auf zwei reellen Geraden i und j. Auf jeder von den beiden Geraden bilden die gemeinsamen harmonischen Pole von k und k_1 eine Involution. Ist P ein beliebiger Punkt, so giebt es durch ihn ein Strahlenpaar, das zugleich aus i und j je ein Punktepaar der betreffenden Involutionen ausschneidet. Es ist das nichts anderes als das gemeinsame Strahlenpaar der beiden Strahleninvolutionen, deren Strahlen P mit den Punkten der Involutionen auf i resp. j verbinden. Sei Q, Q' das genannte Punktepaar auf i und R, R' dasjenige auf j, so daß QR und $Q'R'$ durch P gehen, so ist $P' = QR' \times Q'R$ der harmonische Pol zu P in Bezug auf k und k_1 (391). Q, Q' sind aber auch harmonische Pole in Bezug auf jeden andern Kegelschnitt des Büschels, und Gleiches ist für R, R' der Fall. Demnach sind auch P, P' harmonische Pole für alle Kegelschnitte des Büschels. Die Punktepaare Q, Q' und R, R', die beim Beweise auftreten, sind nach 353 stets reell, solange nicht alle vier Grundpunkte des Büschels reell sind. In diesem Falle können sie auch konjugiert imaginär sein, doch behält auch dann der Beweis mit einiger Modifikation seine Gültigkeit.

Dem obigen Satze kann man noch die folgenden Formen geben. Die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels schneiden sich in einem zweiten Punkt. Auf jeder Geraden schneiden die Kegelschnitte eines Büschels eine Involution aus. Denn jede Gerade enthält ein Paar gemeinsamer harmonischer Pole von k und k_1, die somit die gleiche Eigenschaft in Bezug auf alle andern Kegel-

schnitte des Büschels besitzen, so daß ihre Schnittpunktpaare zu denselben harmonisch liegen.

408. Den vorstehenden Sätzen lassen wir noch die dualen folgen, ohne sie jedoch besonders zu beweisen. Zwei Kegelschnitte k und k_1 bestimmen eine Kegelschnittschar, deren Kurven alle die vier gemeinsamen Tangenten von k und k_1 als Grundlinien berühren. Zu den Kegelschnitten der Schar gehören auch die Punktepaare, in denen sich diese Tangenten, in zwei Paare verteilt, schneiden und von denen eins oder drei reell sind. Die Verbindungslinien der drei Punktepaare sind die Seiten des allen Kegelschnitten gemeinsamen Polardreiecks. Zwei Gerade, welche harmonische Polaren in Bezug auf k und k_1 sind, sind es auch in Bezug auf jeden andern Kegelschnitt der Schar. Die Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Schar liegen auf einer zweiten Geraden. In jedem Punkt bilden die Tangentenpaare an alle Kegelschnitte einer Schar eine Involution.

409. Zwei Gerade u und v, die durch reelle Grundpunkte A und B eines Kegelschnittbüschels gezogen sind, werden von seinen Kurven in perspektiven Punktreihen geschnitten. Es seien k, k_1, k_2, ... Kurven des Büschels und s, s_1, s_2, ... die Polaren von $S = u \times v$ in Bezug auf die einzelnen Kurven, dann gehen alle diese Polaren durch einen Punkt S', der dem Punkt S als harmonischer Pol in Bezug auf den Büschel zugehört (407). Die Polaren s, s_1, s_2, ... schneiden demnach auf u und v perspektive Punktreihen U, U_1, U_2, ... resp. V, V_1, V_2, ... aus. Ferner schneiden k, k_1, k_2, ... auf u und v zwei Punktreihen P, P_1, P_2, ... resp. Q, Q_1, Q_2, ... aus, die sich durch die erstgenannten Reihen bestimmen; denn allgemein liegen P_i und A zu S und U_i harmonisch und ebenso Q_i und B zu S und V_i. Deshalb sind die Punktreihen U, U_1, U_2, ... und P, P_1, P_2, ... projektiv und ebenso die Reihen V, V_1, V_2, ... und Q, Q_1, Q_2, ... Denn läßt man in Fig. 138 F, J, K, S, T ungeändert und beschreibt E auf FS eine Punktreihe, so beschreibt R eine dazu projektive Reihe. Es müssen nun auch die Reihen P, P_1, P_2, ... und Q, Q_1, Q_2, ... projektiv sein und sogar perspektiv, da S sich selbst entspricht als Schnittpunkt von u und v mit dem nämlichen Kegelschnitt.

Der duale Satz zu dem obigen ist leicht anzugeben.

410. Die beiden Kegelschnitte zu zeichnen, die durch vier gegebene Punkte A, B, C, D gehen und eine gegebene Gerade g berühren. Alle Kegelschnitte durch A, B, C, D bilden

einen Büschel und schneiden auf g die Punktepaare einer Involution aus. Geht insbesondere ein Kegelschnitt des Büschels durch einen Doppelpunkt dieser Involution, so muß er daselbst die Gerade g berühren. Man bestimme also auf g die beiden Punkte U und U', welche harmonische Pole in Bezug auf alle Kurven des Büschels sind, dann sind sie die Berührungspunkte der gesuchten Kegelschnitte.

Sind die vier Punkte A, B, C, D reell, so schneiden AB und CD und ebenso AC und BD je ein Punktepaar der vorher genannten Involution auf g aus; daraus lassen sich dann ihre Doppelpunkte U und U' konstruieren. Die folgende Konstruktion läßt sich verwenden, falls von den gegebenen Punkten ein Paar oder zwei Paare konjugiert imaginär sind. Es seien i und j die Geraden AB und CD (Fig. 263), und zwar mögen A, B auf i als Doppelpunkte einer Involution definiert sein, von der P, P' und L, $i \times l$ zwei Punktepaare sind. Ebenso mögen C, D auf j als Doppelpunkte einer Involution mit den Punktepaaren Q, Q' und L, $j \times l$ definiert sein. Der Kegelschnitt k des Büschels, der durch den Punkt $E = g \times l$ geht, schneidet g noch in einem Punkte F und l in einem Punkte E_1, und zwar müssen FE und FE_1 nach 283 auf i und j harmonische Pole ausschneiden, da i und j harmonische Polaren zu l in Bezug auf k sind. Man suche also in der Involution auf i zu $g \times i$ den entsprechenden Punkt und ebenso in der Involution auf j zu $g \times j$ den entsprechenden. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte schneidet l und g in E_1 und F. Nun findet man U und U' wieder als Doppelpunkte einer Involution, der E, F und $g \times i$, $g \times j$ als Punktepaare angehören.

Sind die gegebenen Punktepaare sowohl auf i wie auf j imaginär (wie in der Figur), so besitzt der Büschel, dem die gesuchten Kegelschnitte angehören, ein reelles gemeinsames Polardreieck. L ist eine Ecke dieses Dreiecks, seine Ecken M und N trennen E und E_1 sowie $l \times i$ und $l \times j$ harmonisch. Sucht man noch auf jeder Seite des Polardreiecks den Punkt, der mit g zusammen die bez. Seite harmonisch teilt, so gehen durch diese Punkte die vier gemeinsamen Tangenten der gesuchten Kegelschnitte hindurch. Man kennt also von jedem vier Tangenten und deren Berührungspunkte.

Ist eines der beiden Punktepaare reell, das andere imaginär, so bestimme man auf LU den Punkt V derart, daß UV durch L und l harmonisch geteilt wird. Dann sind EU und EV Tangenten der gesuchten Kegelschnitte, die sie in U und V resp. U' und V' berühren. Man kennt also von jedem zwei reelle Punkte und zwei reelle Tangenten mit ihren Berührungspunkten.

Die beiden Kegelschnitte zu zeichnen, die vier gegebene

Gerade a, b, c, d berühren und durch einen gegebenen Punkt G gehen. Diese Aufgabe ist zu der vorangehenden dual und ihre Lösung ergiebt sich aus dem Gesagten, wenn man überall die dualen Konstruktionen verwendet.

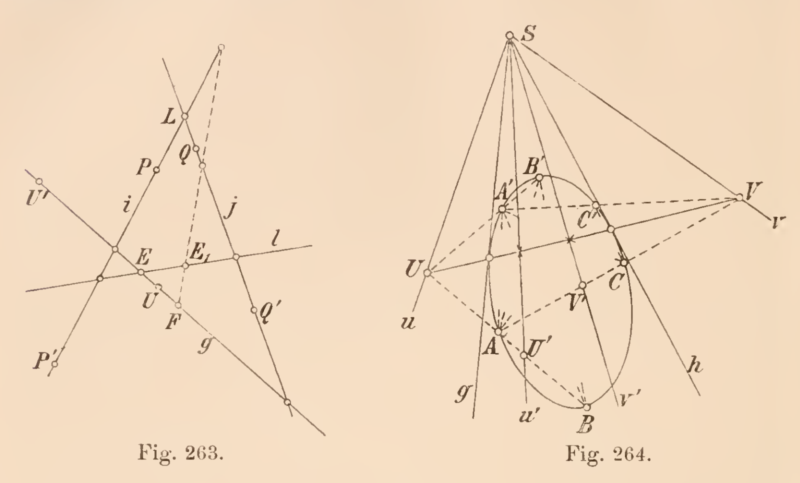


Fig. 263. Fig. 264.

411. Die vier Kegelschnitte zu zeichnen, die durch drei gegebene Punkte A, B, C gehen und zwei Gerade g und h berühren. Diese Aufgabe schließt sich an die vorhergehende an und soll hier gelöst werden, obgleich sie mit dem Kegelschnittbüschel nicht in näherem Zusammenhang steht. Der Punkt $S = g \times h$ ist der Scheitel einer Strahleninvolution $\mathfrak{J}$, der g und h als Doppelstrahlen angehören, umgekehrt kann man durch eine solche Strahleninvolution $\mathfrak{J}$ zwei reelle oder konjugiert imaginäre Gerade definieren. Sind sie Tangenten eines Kegelschnittes, so sind die Strahlenpaare der Involution harmonische Polaren desselben. Nun suche man dasjenige Strahlenpaar u, u' von $\mathfrak{J}$, das zu SA und SB harmonisch liegt (353), sowie das Strahlenpaar v, v' von $\mathfrak{J}$, das zu SA und SC harmonisch liegt. Schneiden u, u' die Gerade AB in U, U' und ebenso v, v' die Gerade AC in V, V', so muß erstens entweder U der Pol von u', oder U' der Pol von u sein und zweitens entweder V der Pol von v', oder V' der Pol von v sein. Ist nämlich U nicht der Pol von u', so muß ein anderer Punkt U_1 von u der Pol von u' sein. Die Polare von U' muß dann sowohl durch U als auch durch U_1 gehen, d. h. u ist dann die Polare von U'; damit ist aber die Behauptung erwiesen. Wir haben sonach vier Fälle zu unterscheiden und jeder liefert einen von den gesuchten Kegelschnitten.

1. U ist Pol von u' und V Pol von v',
2. U ist Pol von u' und V' Pol von v,
3. U' ist Pol von u und V Pol von v',
4. U' ist Pol von u und V' Pol von v.

Im ersten Falle wird UV die Polare von $S = u' \times v'$ sein, sie schneidet aus g und h die Berührungspunkte mit einem unserer Kegelschnitte aus. Ferner findet man auf SA, SB, SC die Kurvenpunkte A_1, B_1, C_1 dadurch, daß A und A_1 durch S und UV harmonisch geteilt werden u. s. w. In gleicher Weise ergeben sich die drei übrigen Kegelschnitte. Die Aufgabe hat reelle Lösungen, wenn die Geraden u, u', v, v' reell sind. Es müssen also g und h die Strecke AB (und ebenso AC) entweder gleichzeitig schneiden oder gleichzeitig nicht schneiden.

Aus diesen Betrachtungen findet man mit Hilfe des Prinzipes der Dualität auch die Lösung der dualen Aufgabe: Die vier Kegelschnitte zu zeichnen, die durch zwei gegebene Punkte G und H gehen und drei gegebene Gerade a, b und c berühren.

412. Zwei beliebige Kegelschnitte k und k_1 befinden sich stets in perspektiver Lage und zwar, wenn ihre gemeinsamen Punkte und Tangenten sämtlich reell sind, auf zwölf Arten, in jedem andern Falle auf vier Arten. Als Centrum der Perspektive kann der Schnittpunkt je zweier gemeinsamer Tangenten, als Achse jede gemeinsame Sehne dienen. Den beiden Perspektivitätscentren, die auf einer Seite des den Kegelschnitten gemeinsamen Polardreiecks liegen, kann als Achse jede der beiden gemeinsamen Sehnen durch die gegenüberliegende Ecke des Polardreiecks zugeteilt werden.

Besteht zwischen k und k_1 eine perspektive Beziehung, so ordnet sie einem jeden Punkt und seiner Polare in Bezug auf k wieder einen Punkt und dessen Polare in Bezug auf k_1 zu; sie führt also harmonische Pole oder Polaren von k in harmonische Pole oder Polaren von k_1 über. Im Centrum O der Perspektive entspricht jeder Strahl sich selbst; je zwei Strahlen durch O, welche harmonische Polaren von k sind, sind deshalb auch harmonische Polaren von k_1. O ist somit Scheitel einer Strahleninvolution, deren Strahlenpaare gemeinsame harmonische Polaren und deren Doppelstrahlen gemeinsame (reelle oder konjugiert imaginäre) Tangenten von k und k_1 sind. Auf der Achse a der Perspektive entspricht jeder Punkt sich selbst; je zwei auf ihr liegende harmonische Pole von k sind zugleich harmonische Pole von k_1. Somit ist a Träger einer Involution gemeinsamer harmonischer

Pole von k und k_1 und ihre Doppelpunkte gehören beiden Kegelschnitten an.

Nun liegt O auf einer Seite des gemeinsamen Polardreiecks LMN von k und k_1, etwa auf $m = LN$ (vergl. 398) (Fig. 265). Die

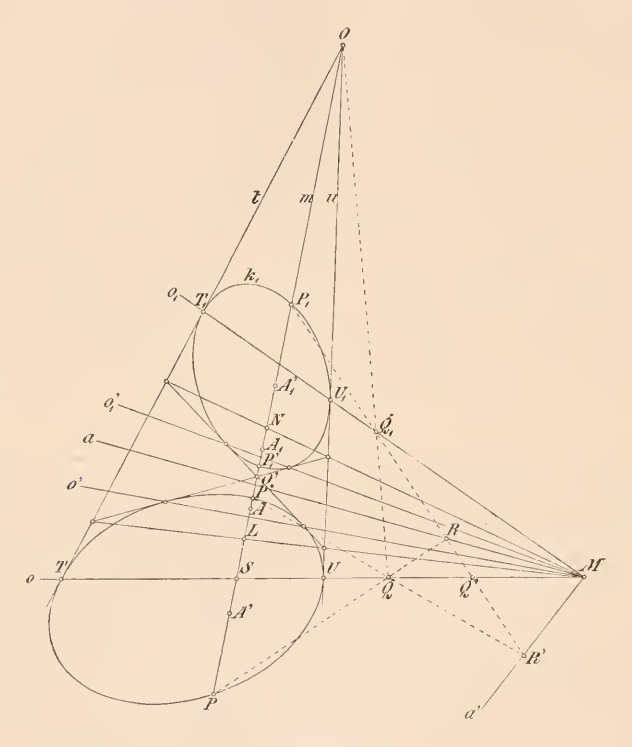


Fig. 265.

Polaren o und o_1 von O in Bezug auf k resp. k_1 müssen sich auf der Achse a schneiden; andererseits ist $o \times o_1$ der gemeinsame harmonische Pol zu O, diese Eigenschaft kommt aber dem Punkt M zu; es geht also a durch M.

Die Perspektive, welche O zum Centrum und a zur Achse hat, und die Gerade o in die Gerade o_1 überführt, verwandelt nun in der That den Kegelschnitt k in den Kegelschnitt k_1. Denn es entspricht hierbei dem Kegelschnitt k ein neuer Kegelschnitt k'; dieser hat mit k_1 die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Punkte auf a gemein, ferner die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Tangenten aus O und deren Berührungspunkte auf o_1, so daß k' mit k_1 identisch ist. In der Figur sind auf m die beiden Centren O

und O' angegeben und durch M die beiden Achsen a und a'; jedes Centrum bestimmt mit jeder Achse eine perspektive Beziehung zwischen k und k_1. So ergeben sich vier perspektive Beziehungen, indem man die Ecke M und die Seite m des Polardreiecks zu Grunde legt; in gleicher Weise ergeben sich acht weitere. Beachtet man die Resultate in 401, so erkennt man unmittelbar, daß von den Perspektiven zwischen k und k_1 stets vier reell sind und es sogar zwölf reelle Perspektiven zwischen k und k_1 giebt, wenn ihre gemeinsamen Punkte und Tangenten alle reell sind.

Sind u und t die gemeinsamen Tangenten aus O, so sind $U = u \times o$, $T = t \times o$ und $U_1 = u \times o_1$, $T_1 = t \times o_1$ ihre Berührungspunkte mit k resp. k_1. Nun sind U und U_1 harmonische Pole in Bezug auf beide Kegelschnitte, denn die Polaren von U gehen beide durch U_1; nach 396 liegen also o und o_1 harmonisch zu a und a'.

Die Achsen a und a' der genannten Perspektiven liegen harmonisch sowohl zu den Polaren o und o_1 des Centrums O, als auch zu den Polaren o' und o_1' des Centrums O'. Ebenso liegen die Centren O und O' harmonisch sowohl zu den Polen A und A_1 der Achse a, als auch zu den Polen A' und A_1' der Achse a'.

In der Figur ist noch der Zusammenhang zwischen O und a resp. a_1 angedeutet. Sind P und P_1 entsprechende Punkte von k und k_1 und ebenso Q und Q_1 entsprechende Punkte von o und o_1, so liegt $R = PQ \times P_1Q_1$ auf a. In gleicher Weise liegt $R' = P'Q \times P_1Q_1$ auf a'.

SECHSTES KAPITEL.

Ebene Kurven und Raumkurven.

Begriff des Unendlichkleinen in der Geometrie.

413. Die bisherigen Untersuchungen boten uns bereits an einzelnen Stellen Anlaß, von geometrischen Größen zu sprechen, die man sich unbeschränkt wachsend vorstellt, so daß sie größer als jede angebbare Größe, d. h. „unendlich groß“ werden. Bei dem Studium der Kurven und krummen Flächen ist es unumgänglich, auch solche Größen einzuführen, die unbeschränkt abnehmen,

so daß sie kleiner als jede angebbare Größe oder „unendlich klein" werden. Die nähere Untersuchung der Begriffe des Unendlichkleinen und Unendlichgroßen gehört freilich in die Analysis (Infinitesimalrechnung); indessen mögen hier namentlich über den ersteren Begriff einige Bemerkungen seiner geometrischen Anwendung vorausgeschickt werden.

Die genannten Begriffe knüpfen sich an die Voraussetzung einer stetigen Veränderlichkeit der zu betrachtenden Größen. — Läßt sich von einer unveränderlichen (konstanten) Größe zeigen, daß sie kleiner als jede angebbare Größe ist, so ist sie gleich Null. Ist sie aber der Veränderung fähig und wird sie stetig kleiner als jede angebbare Größe, so darf man sie unendlich klein nennen. Zwischen „Null" und „unendlichklein" besteht demnach ein begrifflicher Unterschied.

Wenn wir gegebene Größen vergleichen, so sagen wir, daß sie in einem Verhältnis stehen. Kann dieses Verhältnis durch eine rationale Zahl angegeben werden, so heißen die verglichenen Größen kommensurabel, andernfalls inkommensurabel. In letzterem Falle begnügt man sich mit der Angabe zweier rationaler Zahlen als Grenzen, zwischen denen der Wert des Verhältnisses liegt; man hat aber, um letzteren als eine bestimmte irrationale Zahl ansehen zu dürfen, nachzuweisen, daß sich die Differenz der Grenzen so klein machen läßt, als man will. — Setzt man an die Stelle des wirklichen Verhältnisses eine der beiden Grenzen, so begeht man einen Fehler, der aber jedenfalls nicht größer ist als jene Differenz und der folglich mit ihr beliebig klein wird.

Wird das Verhältnis einer variablen Größe zu einer gegebenen endlichen Größe kleiner (oder größer) als jede angebbare Zahl, so wird sie selbst unendlich klein (oder unendlich groß).

414. Veränderliche und insbesondere verschwindende Größen können nun untereinander ebenso wie gegebene Größen verglichen werden, wenn zwischen ihnen ein irgendwie, etwa geometrisch, definierbarer fester Zusammenhang besteht. So wird z. B. die Diagonale eines Quadrates zu seiner Seite immer das Verhältnis $\sqrt{2}$ behalten, auch wenn beide Strecken mit dem Quadrate selbst unendlich klein werden.

Stehen jetzt die Veränderungen mehrerer Größen in einem gegebenen Zusammenhange, so unterscheidet man unabhängige Größen und abhängige („Funktionen"). Oft hat man nur eine unabhängige Variable, deren Wert nach Willkür geändert werden

darf, woraus sich dann die Veränderungen der abhängigen Größen ergeben; doch können auch mehrere unabhängig sein. Bei der Vergleichung variabler Größen untereinander wählt man aber stets eine, und zwar unabhängige Größe als Maßstab für die übrigen, und dies gilt auch dann noch, wenn die Größen zusammen verschwinden. Man nennt dann diese eine Größe unendlich klein von der 1. Ordnung; die anderen können von verschiedener Ordnung unendlich klein sein. Hierüber aber wird nach folgendem Grundsatze entschieden: Stehen zwei verschwindende Größen in einem endlichen Verhältnis, so heißen sie von derselben Ordnung unendlich klein. Größen heißen unendlich klein von der 1., 2., ... *m*. Ordnung, wenn sie zu der 1., 2., ... *m*. Potenz einer unendlich kleinen Größe 1. Ordnung in einem endlichen Verhältnis stehen. Die Ordnungszahl m kann auch gebrochen, ja sogar irrational sein. Letzteres kommt für unsere Untersuchungen nicht in Betracht und auch die gebrochenen Ordnungszahlen lassen sich meist durch geeignete Wahl der unabhängig veränderlichen Größe vermeiden.

Was von den unendlich kleinen Größen gesagt wurde, läßt sich unmittelbar auf die ins Unendliche wachsenden Größen übertragen.

415. Setzen sich Größen verschiedener Ordnungen in endlicher Anzahl zu einer Summe zusammen, so kommen unendlich kleine Größen gegenüber etwa vorhandenen endlichen Größen nicht in Betracht; ebenso sind unendlich kleine Größen höherer Ordnung, denen niederer Ordnung gegenüber wegzulassen. Denn der Fehler, den man bei ihrer Unterdrückung scheinbar begeht, ist im Verhältnis zum Resultate selbst unendlich klein. In einer Gleichung zwischen unendlich kleinen Größen sind also auf beiden Seiten nur die Glieder beizubehalten, welche von ein und derselben niedersten Ordnung sind. Waren bei der Ableitung der Gleichung Glieder verschiedener Ordnung aufgetreten, so sind die der höheren Ordnungen zu beseitigen.

Bei dem Gebrauche unendlich kleiner Größen nimmt man stets die Ermittelung bestimmter Werte zum Ziele und zwar geschieht dies in doppelter Weise. Einmal kann eine bestimmte Größe als Grenzwert des Verhältnisses zweier unendlich kleiner Größen auftreten, das will sagen als derjenige Wert, den der Quotient zweier veränderlicher Größen annimmt, wenn die eine und damit zugleich die andere, von ihr abhängige, verschwindet. Dem entspricht in der Analysis der Begriff des „Differentialquotienten einer Funktion“. — Zum andern erhält man den Wert einer endlichen, aber nicht direkt meßbaren Größe, wenn man sie in sehr

viele, sehr kleine Teile — sogenannte Elemente — zerlegt, diese mißt und sie hierauf wieder zusammenfügt. Streng genommen müßte man sich dann die Teilung unbeschränkt fortgesetzt denken, so daß jedes Element unendlich klein, gleichzeitig aber die Anzahl der Elemente unendlich groß wird, und thatsächlich zeigt die Analysis, wie unter dieser Annahme die gesuchte Größe als Grenzwert einer Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen, nämlich durch ein „bestimmtes Integral“ berechnet werden kann. Die konstruierende Geometrie begnügt sich in einem solchen Falle mit einer angenäherten Bestimmung, indem sie die Anzahl der Teile zwar endlich, aber doch so groß annimmt, daß alle die einzelnen kleinen Elemente nach demselben Verfahren gemessen, womöglich sogar als einander gleich angesehen werden dürfen, und zugleich der Unterschied zwischen der gesuchten Größe und der Summe aller jener Elemente nachweislich genügend klein ausfällt. — So liegt z. B. der Umfang eines Kreises zwischen den Perimetern eines ihm ein- und eines ihm umgeschriebenen n-Ecks und wird daher durch einen dieser Werte mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit dargestellt, wenn man nur die Seitenzahl n groß genug nimmt (vergl. 445).

416. Zum besseren Verständnis des Gesagten mögen sogleich einige, weiterhin verwendbare Beispiele für den Zusammenhang unendlich kleiner Größen verschiedener Ordnung untereinander hier mitgeteilt werden.

Fig. 266.

Nimmt man das Verhältnis eines Kreisbogens zu seinem Radius als Maß des zugehörigen Centriwinkels und setzt in Fig. 266 den Radius OP einer Längeneinheit gleich, so ist der Bogen $PQ = \varphi$ das Maß des Winkels bei O, der spitz angenommen sein mag. Zieht man nun QR und PS senkrecht zu OP, so wird:

$$OR = \cos\varphi, \quad RQ = \sin\varphi, \quad PS = \tan\varphi.$$

Die Flächen des Dreiecks ORQ, des Kreissektors OPQ und des Dreiecks OPS sind resp. durch die Ausdrücke $\frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi$, $\frac{1}{2}\varphi$, $\frac{1}{2}\tan\varphi$ gegeben, und da ersichtlich die erste kleiner als die zweite, diese aber kleiner als die dritte ist, so folgt:

$$\cos\varphi \,.\, \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi.$$

Dividiert man diese Relation mit der positiven Größe $\sin\varphi$, so gilt:

$$\cos\varphi < \frac{\varphi}{\sin\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi};$$

oder auch für die reziproken Werte:

$$\frac{1}{\cos\varphi} > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \cos\varphi.$$

Wird jetzt φ unendlich klein, so geht OR in OP, also $\cos\varphi$ $\left(\text{sowie } \frac{1}{\cos\varphi}\right)$ in 1 über und es folgt, daß das Verhältnis $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ und ebenso $\frac{\tan\varphi}{\varphi}$ dem Grenzwerte 1 zustreben; das will sagen:

Der Sinus und die Tangente eines Winkels werden mit diesem selbst von der gleichen Ordnung unendlich klein, während sein Cosinus gleich Eins wird.

417. Wird also in einem rechtwinkligen Dreieck PQR (Fig. 267) der Winkel ε bei Q unendlich klein 1. Ordnung, während die Hypotenuse QR endlich bleibt, so bleibt die dem Winkel ε anliegende Kathete QP endlich, während die gegenüberliegende PR unendlich klein 1. Ordnung ausfällt. — Macht man auf der Hypotenuse $QS = QP$, so ist $\angle RPS = \frac{1}{2}\varepsilon$ wiederum unendlich klein 1. Ordnung, also $SR = QR - QP$ unendlich klein 2. Ordnung. — Wird auch noch die Seite QR unendlich klein 1. Ordnung, so folgt, daß nun PR von der 2. und $SR = QR - QP$ von der 3. Ordnung unendlich klein wird. — Allgemeiner darf man sagen: Wird ε von der m. Ordnung, QR von der n. Ordnung unendlich klein, so werden QP von der n. Ordnung, PR und PS von der $(m+n)$. Ordnung, $\angle RPS$ von der m. Ordnung und $SR = QR - QP$ von der $(2m+n)$. Ordnung unendlich klein.

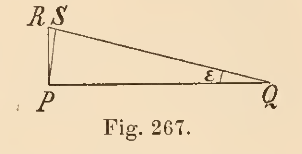


Fig. 267.

418. Zwei Ebenen E und Δ mögen sich in der Geraden t schneiden (Fig. 268). Durch einen Punkt Q von t ziehen wir eine Gerade u in der Ebene Δ und wählen auf u einen Punkt R; seine senkrechten Projektionen auf t resp. E seien P und U. Der Winkel der beiden Ebenen ist dann $\eta = \angle RPU$, der der beiden Geraden ist $\varepsilon = \angle PQR$ und $\delta = \angle RQU$ ist der Neigungswinkel von u gegen E. — Werden nun die Strecke QR und die Winkel η und ε unendlich klein 1. Ordnung, so wird $QP = QR \,.\, \cos\varepsilon$ von der 1. Ordnung, $RP = QR \,.\, \sin\varepsilon$ von der 2. Ordnung und folglich $RU = RP \,.\, \sin\eta$ von der dritten Ordnung

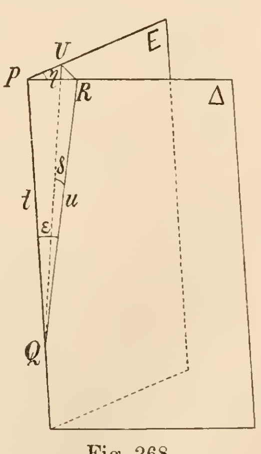


Fig. 268.

unendlich klein; da aber andererseits $RU = QR . \sin\delta$ ist, so müssen $\sin\delta$ und δ von der 2. Ordnung unendlich klein sein. Die Differenz $QR - QP$ ist von der 3. Ordnung und die Differenz $QR - QU$ von der 5. Ordnung unendlich klein, wie man mit Hilfe des vorigen Beispieles sofort erkennt.

Erzeugung ebener Kurven.

419. Eine ebene Kurve kann man sich in doppelter Weise entstanden denken, einmal durch Bewegung eines Punktes, zum andern durch Bewegung einer Geraden. Wir wollen zunächst die ebene Kurve als die Bahn eines bewegten Punktes auffassen. Zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Lagen des bewegten Punktes sollen als benachbarte, konsekutive oder Nachbarpunkte der Kurve bezeichnet werden, wobei der Abstand benachbarter Punkte als unendlich klein zu denken ist. Zwei Nachbarpunkte begrenzen einen unendlich kleinen Teil der Kurve, ein Kurvenelement. Eine Kurve heißt in einem Punkte stetig, wenn es zu diesem nach beiden Seiten Nachbarpunkte giebt, unstetig dagegen, wenn er ein freies Ende bildet. Wir betrachten nur stetige Kurven.

Eine Gerade, die zwei Kurvenpunkte A und B miteinander verbindet, heißt Sekante, die Strecke AB selbst heißt Sehne. Hält man den Punkt A fest, während man den Punkt B auf der Kurve bewegt und sich dem Punkte A unbegrenzt nähern läßt, so wird sich auch die Sekante AB stetig um ihren Endpunkt A drehen und sich schließlich einer bestimmten Geraden t durch A unbegrenzt nähern. Diese Gerade t heißt die Tangente der Kurve im Punkte A; der Winkel, den Tangente und Sekante miteinander einschließen, wird beim Grenzübergang zugleich mit der Strecke AB unendlich klein.

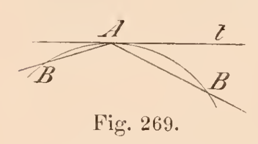


Fig. 269.

Wenn es gleichgültig ist, von welcher Seite der Punkt B sich dem Punkte A unbegrenzt nähert, und man dabei die nämliche Grenzlage t erhält, so sagt man: die Kurve sei im Punkte A stetig in Bezug auf ihre Tangente. In Punkten, wo man zu zwei Grenzlagen gelangt, je nachdem sich B von der einen oder andern Seite dem Punkte A nähert, bildet die Kurve eine Ecke und heißt dort unstetig in Bezug auf ihre Tangente. Solche Fälle schließen wir hier zunächst aus. Eine Tangente hat mit der Kurve zwei benachbarte Punkte, also ein Kurvenelement gemein.

420. Durch Bewegung einer Geraden in einer Ebene entsteht ebenfalls eine Kurve, nämlich als Hüllkurve aufeinanderfolgender Lagen der Geraden, ihrer Tangenten. Zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Lagen der bewegten Geraden liefern benachbarte oder konsekutive Tangenten, deren Winkel unendlich klein ist und als Kontingenzwinkel bezeichnet wird. Diese Erzeugungsweise einer Kurve ist zu der erstgenannten dual und nach den Prinzipien der Dualität (vergl. 343) können wir aus den obigen Resultaten die folgenden ableiten. Betrachten wir eine feste Tangente t unserer Hüllkurve und eine bewegliche, die sich jener unbegrenzt nähert, so bestimmt diese auf t eine Punktreihe, deren Punkte sich bei der Bewegung einer bestimmten Grenzlage A unbegrenzt nähern; A repräsentiert eben den Berührungspunkt von t. Die Kurvenpunkte sind als Schnittpunkte benachbarter Tangenten aufzufassen.

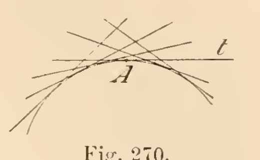


Fig. 270.

Im Vergleich mit den Endpunkten endlicher Strecken und den Schenkeln meßbarer Winkel sind zwei unendlich nahe Punkte oder zwei Gerade mit unendlich kleinem Winkel als zusammenfallend und nicht verschieden anzusehen. Nur bei dem Grenzprozeß, wenn die gegen Null abnehmende Strecke oder der gegen Null abnehmende Winkel mit andern davon abhängigen Größen verglichen wird, muß auf diese unendlich kleinen Größen Rücksicht genommen werden.

421. Bildet man die Punkte und Tangenten einer ebenen Kurve durch Parallel- oder Centralprojektion ab, so erhält man Punkte und Tangenten einer neuen Kurve, der Projektion der ersteren. Es ist nach den vorausgegangenen Definitionen unmittelbar klar, daß die Stetigkeit einer Kurve eine projektive Eigenschaft ist, d. h. daß sie sich bei beliebiger Projektion nicht ändert. Nur für unendlich ferne Punkte einer Kurve bedarf dies noch der Erläuterung. Projiziert man einen Kurvenpunkt Q unendlich fern, so verlaufen die Projektionen der beiden Kurvenstücke, die in ihm zusammenstoßen, ins Unendliche. Läßt man einen Punkt auf dem einen oder andern unbegrenzten Kurvenast sich nach dem Unendlichen hinbewegen, so nähert sich die zugehörige Tangente in beiden Fällen der nämlichen Grenzlage, die als Asymptote bezeichnet wird und die Tangente in dem gemeinsamen unendlich fernen Punkte der beiden Kurvenäste darstellt. Sie ist eben die Projektion der Tangente in dem Punkte Q der ursprünglichen Kurve, dessen Projektion ins Unendliche fällt. Da die Teile der ursprünglichen Kurve

in Q zusammenhängen, so sagt man auch von zwei unendlichen Ästen mit der gleichen Asymptote, daß sie im Unendlichen zusammenhängen. Liegt die Kurve in der Nähe des Punktes Q ganz auf einer Seite der Tangente, wie z. B. beim Kreise, so liegen die unendlichen Äste der Projektion auf verschiedenen Seiten ihrer Asymptote, wie z. B. bei der Hyperbel.

422. Wir betrachten jetzt gleichzeitig die beiderlei Erzeugungsweisen einer ebenen Kurve, indem wir einen Punkt mit seiner zugehörigen Tangente ins Auge fassen. Geht der Punkt in eine Nachbarlage über, so schreitet er auf seiner Tangente fort und die benachbarte Tangente entsteht aus der anfänglichen durch Drehung um ihren Berührungspunkt. Auf diese Weise rollt die Tangente auf der Kurve ohne zu gleiten, indem sie sich nur um ihren jeweiligen Berührungspunkt dreht. Das Fortschreiten des Berührungspunktes auf der Tangente kann aber in zweierlei Richtung erfolgen, ebenso kann die Drehung der Tangente um ihren Berührungspunkt in zweierlei Drehsinn stattfinden. Passiert nun der bewegliche Punkt einen festen Punkt P der Kurve und zugleich die bewegliche Tangente eine feste Tangente t, so kann jede der beiden Bewegungen von der andern unabhängig ihren Sinn beibehalten oder umkehren. Entweder bleiben Fortschreitungssinn und Drehsinn beim Passieren von P ungeändert, dann ist P ein gewöhnlicher Kurvenpunkt, oder der Drehsinn ändert sich allein, dann ist P ein Wendepunkt, oder der Fortschreitungssinn allein ändert sich, dann ist P ein Rückkehrpunkt, eine Spitze, oder endlich beide ändern sich gleichzeitig, dann bildet P eine Schnabelspitze (vergl. Fig. 294).

Zu diesen besonderen oder singulären Punkten der Kurve gesellt sich noch der Doppelpunkt; es ist ein Punkt, in dem die Kurve sich selbst durchschneidet. Im Doppelpunkt giebt es zwei Tangenten, nämlich an jeden Kurvenast durch ihn eine. Durch das Gesetz der Dualität gelangt man von den Doppelpunkten zu den Doppeltangenten, diese besitzen zwei Berührungspunkte (Fig. 271). Rückkehrpunkte und Wendepunkte entsprechen sich nach dem Gesetz der Dualität gegenseitig, während die Schnabelspitze sich selbst entspricht. Durch Vereinigung mehrerer solcher singulärer Punkte können höhere Singularitäten entstehen, so die Selbstberührungspunkte, die vielfachen Punkte u. s. w.; die aufgezählten Vorkommnisse werden indes für unsere weiteren Untersuchungen genügen.[13])

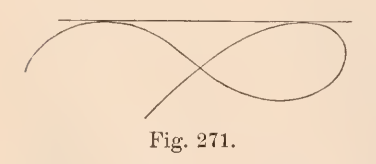


Fig. 271.

Es ist hier noch darauf hinzuweisen, daß auch gelegentlich einzelne Punkte — die keinem Kurvenast angehören — einer Kurve zuzurechnen sind, indem sie dem nämlichen Gesetze entsprechen wie die übrigen Kurvenpunkte. Solche Punkte heißen isolierte Punkte und sind als Doppelpunkte aufzufassen, durch die indes keine reellen Tangenten gehen.

Konstruktion von Tangenten und Normalen.

423. In vielen Fällen lassen sich direkt aus der geometrischen Definition einer Kurve beliebig viele Punkte derselben und in ihnen die Tangenten konstruieren. Mittels dieser Punkte und Tangenten oder auch der Punkte allein kann dann die Kurve mit ziemlicher Genauigkeit gezeichnet werden, wenn sie in den Punkten und Tangenten stetig ist, und nur mit solchen Kurven werden wir es zu thun haben. Durch Übung erlangt man ein so empfindliches Gefühl für den stetigen Verlauf einer Kurve, daß man sich schon mit verhältnismäßig wenigen Punkten begnügen kann und gleichwohl eine genaue Zeichnung der Kurve gewinnt. Dabei ist zu bemerken, daß man gut thut, dort wo die Kurve schärfer gekrümmt ist, mehr Punkte zu bestimmen als wo sie nur wenig gekrümmt ist. Da die Bestimmung einzelner Kurvenpunkte immer mit geringen Fehlern behaftet ist, so kann es, wenn zu viele Punkte bestimmt sind, vorkommen, daß eine durch diese Punkte gezogene Kurve eine fehlerhafte wellige Form annimmt; die Kurve muß dann so gezeichnet werden, daß sie einen richtigen Eindruck macht, wobei die bestimmten Punkte teils auf der Kurve, teils rechts und links in kleinen Abständen — den Fehlern entsprechend — liegen müssen. Im allgemeinen ist es zweckmäßig, außer Punkten auch einige Tangenten, und wo es leicht ausführbar ist, Krümmungskreise aufzusuchen.

424. Liegt nun eine Kurve gezeichnet vor, so läßt sich die Aufgabe lösen, von einem Punkte A an dieselbe die Tangente t zu legen und deren Berührungspunkt B zu bestimmen (Fig. 272).

Die Tangente zieht man direkt durch Anlegen des Lineals, was sich leicht mit großer Schärfe ausführen läßt. Dagegen wird ihr Berührungspunkt B ungenau; durch Bestimmung einer durch ihn verlaufenden sogenannten Fehlerkurve kann er indessen mit ziemlicher Genauigkeit gefunden werden. Zieht man

Fig. 272.

nämlich durch A mehrere Sehnen — gewöhnlich zwei oder drei — die der Tangente ziemlich nahe liegen, so liegen ihre Mittelpunkte auf einer Kurve, die verlängert offenbar durch den gesuchten Berührungspunkt B verlaufen muß. Denn die Sehnen durch A kann man, wenn sie der Tangente sehr nahe kommen, als fehlerhafte Tangenten auffassen; ihre Mittelpunkte M_1, M_2, . . . aber nähern sich dem Berührungspunkte B, da die wirkliche Tangente eine unendlich kleine Sehne und ihr Mittelpunkt den Berührungspunkt bildet. Die der Tangente am nächsten liegende Sehne muß so gewählt werden, daß sie noch brauchbare Schnittpunkte mit der Kurve bildet, aber sich doch nicht zu weit von der Tangente entfernt.

Liegt der Punkt A unendlich fern, d. h. soll t eine vorgeschriebene Richtung aufweisen, so verfährt man ganz wie vorher, nur werden dann die benutzten Sehnen parallel. Man kann auch andere Fehlerkurven benutzen, doch darf man sich auf die angegebene als die einfachste beschränken, da sie nicht weniger genau als andere ist.

Fällt der gesuchte Punkt B in die Nähe eines Wendepunktes der Kurve, so ist die Konstruktion nicht mehr direkt anwendbar, weil die Strahlen aus A die Kurve in der Umgebung des Wendepunktes nur in je einem Punkte schneiden. Man zieht dann durch A zwei Paar Strahlen, symmetrisch in Bezug auf eine der Wendetangente nahekommende Linie, und bestimmt die zu ihren Schnittpunkten mit der Kurve symmetrischen Punkte. Jetzt liegen wieder auf jedem Strahl zwei Punkte und die Mittelpunkte ihrer Strecken ergeben die Fehlerkurve.

Es mag bemerkt werden, daß die Fehlerkurve bei einem Kreise wieder ein Kreis, bei einem Kegelschnitt wieder ein Kegelschnitt ist.

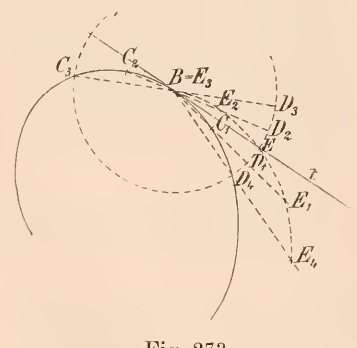


Fig. 273.

425. In einem Punkt B einer Kurve, die gezeichnet vorliegt, die Tangente zu ziehen (Fig. 273).

Um B als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis und lege verschiedene Gerade durch B. Auf diesen schneidet die gegebene Kurve die Sehnen BC_1, BC_2, . . . aus, während der Kreis auf ihnen die Radien BD_1. BD_2, . . . bestimmt, die von B aus nach derselben Seite liegen. Verschiebt man nun auf diesen Geraden die Sehnen BC_1, BC_2 . . . bis ihr Endpunkt B nach D_1, D_2 . . . fällt, so definieren ihre andern

Endpunkte, die in E_1, E_2 ... liegen, eine Fehlerkurve. Auf jedem Strahl durch B ist nun die Strecke zwischen Kreis und Fehlerkurve gleich der Länge der bezüglichen Sehne, also geht die gesuchte Tangente t durch den Schnittpunkt E von Kreis und Fehlerkurve. Schneidet der Kreis die gegebene Kurve in C_3 und C_4, so fällt E_3 mit B zusammen und es ist $BD_4 = D_4E_4$; die Fehlerkurve berührt also die Gerade BC_3 im Punkte B. Außer den Strahlen BC_3 und BD_4 wird man noch zwei weitere BC_1 und BC_2 benutzen, für welche $BC_1 = BC_2$ nahezu dem halben Kreisradius gleich ist.

Statt des Hilfskreises kann man auch jede andere Hilfskurve wählen, z. B. mit Vorteil eine Gerade, die mit der gesuchten Tangente nahezu einen rechten Winkel einschließt.

426. Ein anderes zweckmäßiges Verfahren besteht darin, daß man um B Kreise schlägt, die auf der gegebenen Kurve Punktepaare C_1D_1, C_2D_2 ... ausschneiden (Fig. 274). Die Geraden C_1D_1, C_2D_2 ... umhüllen dann eine Kurve, die auch von der gesuchten

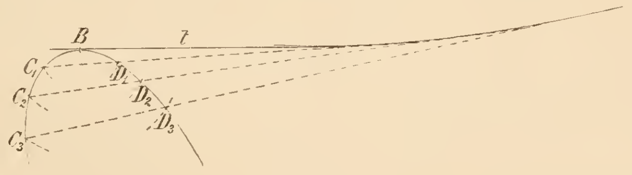


Fig. 274.

Tangente berührt werden muß. Denn die letztere ergiebt sich durch Benutzung eines Kreises mit unendlich kleinem Radius. Es sind mindestens drei Hilfskreise zu benutzen; durch die bezüglichen drei Geraden als Tangenten wird dann angenähert ein Kurvenstück bestimmt, mit dessen Hilfe die gesuchte Tangente sich zeichnen läßt. Die durch die Hilfskreise bestimmten Geraden schneiden sich zwar unter sehr spitzen Winkeln, so daß ihre Schnittpunkte nicht sehr genau werden; das hat indessen wenig Einfluß auf die Genauigkeit des Resultates.

Da die Normale in einem Punkte einer Kurve diejenige Gerade ist, die auf der bezüglichen Tangente senkrecht steht, so kann nach dem Vorausgehenden mit Hilfe der Tangente die Normale in einem gegebenen Kurvenpunkte bezeichnet werden. Dagegen bedarf die folgende Aufgabe noch der Erwägung.

427. Von einem Punkte A außerhalb einer in Zeichnung vorliegenden Kurve an dieselbe eine Normale zu ziehen.

Man ziehe (Fig. 275) um A als Mittelpunkt mehrere Kreise mit zunehmenden Radien, von denen der größte die gegebene Kurve in zwei nahe bei einander liegenden Punkten $C_1 D_1$ schneidet. Auch die übrigen Kreise schneiden Punktepaare $C_2 D_2$, ... aus und die Mittelpunkte der Sehnen $C_1 D_1$, $C_2 D_2$ ... bilden eine Fehlerkurve, die die gegebene Kurve in dem Fußpunkt B der gesuchten Normalen schneiden muß. Da nämlich die Fehlerkurve der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen ist, die durch die Kreise um den Mittelpunkt A bestimmt werden, so muß der Kreis durch B die Kurve in B berühren, sein Radius AB steht also auf der Kreistangente in B, die zugleich Kurventangente ist, senkrecht. Man muß mindestens drei Hilfskreise anwenden.

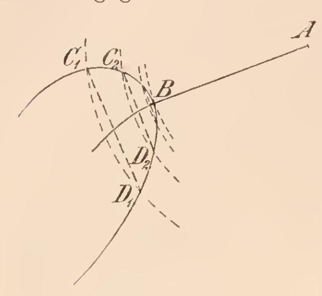


Fig. 275.

428. Die Konstruktion der Punkte einer ebenen Kurve kommt stets darauf hinaus, daß jeder solche Kurvenpunkt als Schnittpunkt zweier Hilfskurven erscheint, und zwar sind diese Hilfskurven in sehr vielen Fällen Gerade oder Kreise. Es läßt sich nun eine genaue Tangentenkonstruktion bei einer ebenen Kurve auf die zur Bestimmung ihrer Punkte verwendeten Hilfskurven gründen.[14])

Seien P_1 und P_2 zwei Punkte unserer Kurve c (Fig. 276), seien ferner k_1, l_1 die Hilfskurven durch P_1 und k_2, l_2 diejenigen durch P_2, und zwar derart, daß bei einem stetigen Übergange von P_2 in P_1 die Kurven k_2, l_2 resp. in k_1, l_1 stetig übergehen. Dann betrachten wir das Viereck $P_1 M P_2 N$ (wo $M = k_1 \times l_2$ und $N = k_2 \times l_1$), dessen Seiten von Stücken der Kurven k_1, k_2, l_1, l_2 gebildet werden. Wählen wir nun den Punkt P_2 unendlich nahe bei P_1, so wird das genannte Viereck unendlich klein; wir können dann seine Seiten als geradlinig ansehen und seine Diagonale $P_1 P_2$ fällt offenbar mit der Tangente t von c im Punkte P_1 zusammen. Ferner werden die Kurven k_1, k_2 — und ganz ebenso die Kurven l_1, l_2 — in ihrer ganzen Erstreckung nur unendlich wenig voneinander abweichen, deshalb dürfen wir (nach 420) $P_1 M$ und $P_2 N$ und analog $P_1 N$ und $P_2 M$ als parallel ansehen; denn die Neigungswinkel der Gegenseiten sind unendlich klein. Das

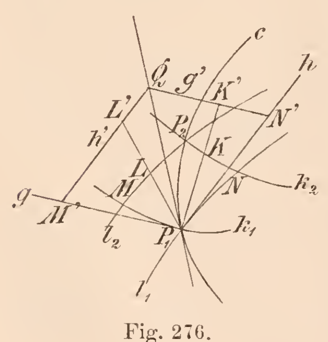


Fig. 276.

Viereck P_1MP_2N wird also beim Übergang zur Grenze ein Parallelogramm, von dessen Seiten zwei in die Tangenten g und h der Kurven k_1 und l_1 im Punkte P_1 fallen. Denken wir uns nun auf der gesuchten Tangente t einen beliebigen Punkt Q und durch ihn Parallelen zu g und h, so entsteht ein Parallelogramm $P_1M'QN'$, das zu dem unendlich kleinen Parallelogramm P_1MP_2N ähnlich sein und ähnlich liegen muß. Kann man umgekehrt ein Parallelogramm $P_1M'QN'$ zeichnen, das zu dem unendlich kleinen Parallelogramm P_1MP_2N ähnlich ist und ähnlich liegt, so ist Q ein Punkt der gesuchten Tangente t.

Man zeichne deshalb zunächst die Tangenten g und h; die Parallelen g', h' zu g und h, die einen Punkt Q von t liefern, findet man dann folgendermaßen. Kennt man den Wert, den das Verhältnis $MP_1 : NP_1$ beim Übergang zur Grenze annimmt, so bestimmt man einfach M' und N' auf g resp. h so, daß $M'P_1 : N'P_1$ diesem Grenzwerte gleich wird, dann geht g' durch N' und h' durch M'. Meistens ist es einfacher statt der Punkte M' und N' zwei andere Punkte L' und K' von g' resp. h' zu konstruieren (vergl. Figg. 277, 278). Durch die Kurven l_1 und l_2 wird auf jeder Geraden durch P_1 eine Strecke ausgeschnitten, z. B. auf P_1L' die Strecke P_1L; ganz analoges geschieht durch die Kurven k_1, k_2 auf den Geraden durch P_1, z. B. hat man auf P_1K' die Strecke P_1K. Ist nun der Grenzwert $P_1L : P_1K$ bekannt (für den Fall, daß die Kurven k_1, k_2 und l_1, l_2 einander unendlich nahe rücken), so bestimme man L' und K' so, daß $P_1L' : P_1K'$ gleich dem genannten Grenzwerte wird; damit ergeben sich dann g' und h' und ihr Schnittpunkt Q.

429. Einige Beispiele werden diese Konstruktion in ihrer Bedeutung richtig erkennen lassen. Sind F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte einer Ellipse, so erscheinen ihre Punkte als Durchschnitte je zweier Hilfskreise mit den Mittelpunkten F_1 resp. F_2 und den Radien ϱ_1 resp. ϱ_2, wobei $\varrho_1 + \varrho_2 = 2a$, der großen Achse der Ellipse, ist. Entsteht also P_1 durch Schnitt zweier Kreise mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2, so entsteht sein Nachbarpunkt als Schnitt zweier Kreise mit den Radien $(\varrho_1 + \delta)$ und $(\varrho_2 - \delta)$ wo δ eine unendlich kleine Größe ist.

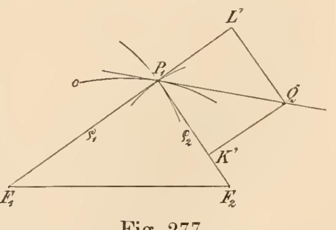


Fig. 277.

Die beiden Hilfskreise um F_1 schneiden also auf F_1P_1 eine Strecke δ ab, Gleiches thun die Hilfskreise um F_2 auf F_2P_1. Hiernach ist $L'P_1 = K'P_1$ beliebig anzunehmen, und $L'Q \perp F_1P_1$ sowie $K'Q \perp F_2P_1$

zu ziehen. Die Tangente P_1Q halbiert also den Nebenwinkel von $F_1P_1F_2$, ein Resultat, das bereits früher abgeleitet wurde.

430. Die *Cassini'sche Kurve* ist definiert als Ort der Punkte, für welche das Produkt ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1F_2 konstant ist. Ist also $P_1F_1 = \varrho_1$ und $P_1F_2 = \varrho_2$, so besteht die Gleichung $\varrho_1 : \varrho_2 = c$. Ist P_2 ein zu P_1 benachbarter Kurvenpunkt, so erscheint er als Schnitt zweier Kreise mit den Radien: $(\varrho_1 + \delta)$ und $(\varrho_2 - \varepsilon)$, wo δ und ε von der 1. Ordnung unendlich klein sein mögen. Die Hilfskreise um F_1 bestimmen auf P_1F_1 eine Strecke δ, die Hilfskreise um F_2 auf P_1F_2 eine Strecke ε, wobei $\delta : \varepsilon = \varrho_1 : \varrho_2$ ist. Denn aus: $(\varrho_1 + \delta)(\varrho_2 - \varepsilon) = c$ und $\varrho_1 \varrho_2 = c$ folgt: $\varrho_2\delta - \varrho_1\varepsilon - \delta\varepsilon = 0$ und durch Division mit $\varrho_2\varepsilon$ die voranstehende Relation, da das letzte Glied von der 2. Ordnung unendlich klein ist und den beiden anderen gegenüber wegzulassen ist (415). Wir tragen demnach $L'P_1 = \varrho_1$ an P_1F_1 an und $K'P_1 = \varrho_2$ auf P_1F_2 auf, so daß K' mit F_2 zusammenfällt, dann ist $QL' \perp F_1P_1$ und $QK' \perp F_2P_1$ und QP_1 die gesuchte Tangente in P_1.

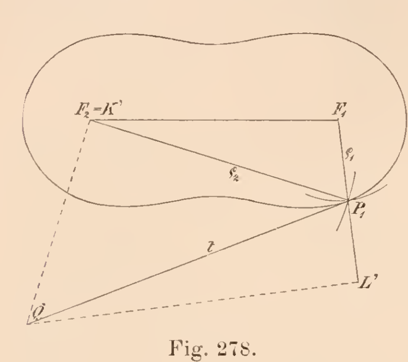


Fig. 278.

431. Dreht sich ein Strahl um einen festen Punkt O und trägt man auf ihm jedesmal von seinem Schnittpunkte mit einer festen Geraden a die nämliche konstante Strecke ϱ nach beiden Seiten auf, so erhält man eine *Konchoide* (Fig. 279).

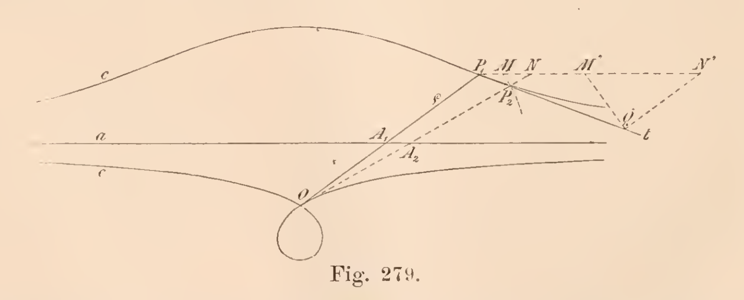


Fig. 279.

Jeder Punkt dieser Kurve erscheint als Schnitt einer Geraden mit einem Kreis vom Radius ϱ; so liegt P_1 auf der Geraden OA_1P_1 und auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt A_1 und dem Radius ϱ. Ist

nun A_2 ein Punkt von a in der Nähe von A_1, so schneidet OA_2 den Kreis mit dem Mittelpunkt A_2 und dem Radius ϱ in dem Kurvenpunkte P_2. Eine Parallele zu a durch P_1 schneidet jene Gerade OA_2 im Punkte N und diesen Kreis im Punkte M, wo $MP_1 = A_2A_1$ ist, ($A_1P_1 = A_2M = \varrho$). Es ist aber $MP_1 : NP_1 = A_2A_1 : NP_1 = A_1O : P_1O$ von der Lage des Strahles OP_2 unabhängig, repräsentiert also zugleich den Grenzwert. Wir bestimmen deshalb auf der Parallelen zu a durch P_1 die Punkte M' und N' so, daß $M'P_1 = A_1O$ und $N'P_1 = P_1O$ ist, dann liefern $QM' \perp P_1O$ und $QN' \parallel P_1O$ den Punkt Q der gesuchten Tangente.

432. Dreht sich ein Strahl um einen festen Punkt O und trägt man auf ihm jedesmal von seinem Schnittpunkte mit einem festen Kreise a durch O die nämliche konstante Strecke ϱ nach beiden Seiten auf, so erhält man eine *Pascal'sche Schneckenlinie* (Fig. 280). Enthält ein Strahl den Kurvenpunkt P_1 und schneidet den Kreis a in A_1, so ändert sich die vorausgegangene Konstruktion offenbar nur insofern ab, als wir im Punkte P_1 eine Parallele zur Tangente des Kreises a im Punkte A_1 ziehen. Auf dieser Parallelen bestimmen sich M' und N' wieder wie vorher und ebenso auch Q.

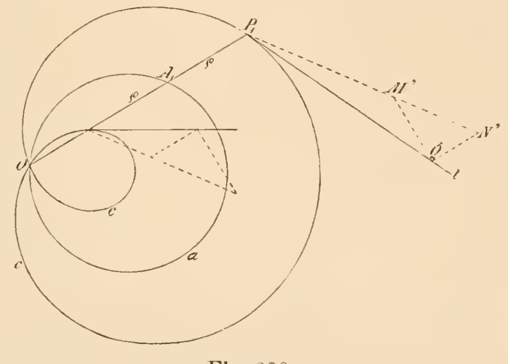


Fig. 280.

433. Zum Schluß mag hier noch eine Anwendung auf eine große Klasse von Kurven gemacht werden, die eine gemeinsame Entstehungsweise haben. Sind zwei beliebige Kurven u und v gegeben und bewegt man einen Winkel so, daß seine Schenkel fortwährend die Kurven u resp. v berühren, so beschreibt sein Scheitel eine Kurve. Als Hilfskurven, die sich in den Punkten unserer Kurve c schneiden, treten hier einerseits die Tangenten von u, andererseits diejenigen von v auf.

Die folgende Konstruktion ist demnach nur dann anwendbar, wenn man an die Kurven u und v bequem Tangenten legen kann. Zwei benachbarte Tangenten von u und die entsprechenden benachbarten Tangenten von v schließen nun den gleichen unendlich kleinen

Winkel ε ein; das von ihnen gebildete unendlich kleine Viereck kann als Parallelogramm angesehen werden, da sich seine Gegenseiten nur um unendlich kleine Größen 2. Ordnung unterscheiden. Berühren die Tangenten, die sich in dem Kurvenpunkt P_1 schneiden, die Kurven u und v resp. in A und B, so ist der Abstand der Parallelogrammseiten, die u berühren, gleich $P_1A \cdot \varepsilon$, ebenso der Abstand der Seiten, die v berühren, gleich $P_1B \cdot \varepsilon$. Tragen wir hiernach $P_1M' \perp P_1A$ und $P_1N' \perp P_1B$ auf, indem wir $P_1M' = P_1A$ und $P_1N' = P_1B$ machen (in der Fig. 281 ist wegen Mangel an Platz $P_1M' = \frac{1}{2} P_1A$ und $P_1N' = \frac{1}{2} P_1B$) und ziehen durch M' und N' resp. Parallele zu P_1A und P_1B, so schneiden sich diese in dem Punkte Q der gesuchten Tangente. Dies ist zugleich die Tangente des Kreises, der durch die Punkte ABP_1 geht.[1] Sind die zu Grunde gelegten Kurven u und v Kreise, so gelangt man wieder zu der Pascal'schen Schnecke, wie eine einfache Überlegung zeigt. Dabei können irgend zwei Kreise, die die Pascal'sche Schnecke zweimal berühren, als Ausgangskurven gewählt werden.

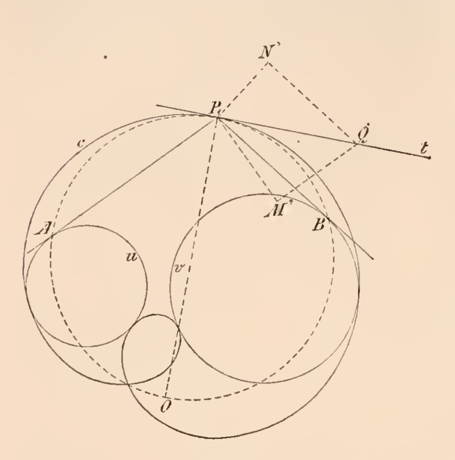


Fig. 281.

Krümmung der Kurven, Evoluten.

434. Eine Kurve ist in einem Punkte um so mehr gekrümmt, je rascher sie sich von der Tangente in jenem Punkte entfernt. Ein Kreis zeigt in allen seinen Punkten die gleiche Krümmung, denn er verhält sich gegen alle seine Tangenten in gleicher Weise. Es wird mithin geeignet sein, die Krümmung der Kurven in ihren einzelnen Punkten durch diejenige entsprechender Kreise zu messen. Die Definition der Krümmung bei einem Kreise werden wir nun so

[1] Die Bewegung eines Winkels von einer Lage in seine Nachbarlage kann auch durch Drehung um den unendlich kleinen Winkel ε geschehen, wobei der auf dem Kreise durch ABP_1 dem P_1 diametral gegenüberliegende Punkt O fest bleibt (Momentancentrum).

einzurichten haben, daß sie sowohl für endliche, als auch für unendlich kleine Bogenstücke des Kreises ihre Gültigkeit behält.

Unter der Krümmung k verstehen wir beim Kreise den reciproken Wert seines Radius r, also: $k = \frac{1}{r}$. Ist aber l die Länge eines Kreisbogens und γ der zugehörige Centriwinkel, so hat man: $k = \frac{1}{r} = \frac{\gamma}{l}$; und diese letztere Definition gilt auch dann noch, wenn der Kreisbogen und damit der zugehörige Centriwinkel unendlich klein werden.

Die Schenkel des genannten Centriwinkels sind aber nichts anderes als die Normalen in den Endpunkten des Kreisbogens l, und der Winkel dieser Normalen ist gleich dem Winkel der Tangenten in den Endpunkten des Bogens l. Daher läßt sich unsere Erklärung sofort auf beliebige Kurven übertragen, bei denen sich freilich die Krümmung von Stelle zu Stelle ändert.

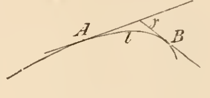


Fig. 282.

Man nennt nämlich den Ausdruck: $k = \frac{\gamma}{l}$ die mittlere Krümmung eines Kurvenbogens von der Länge l, wenn seine Endtangenten den Winkel γ einschließen.

Geht man zur Grenze über, indem man den Kurvenbogen unendlich klein, d. h. zum Kurvenelement e werden läßt, wobei dann der Winkel der Endtangenten zum Winkel zweier Nachbartangenten oder Kontingenzwinkel ε wird, so heißt: $k = \frac{\varepsilon}{e}$ die *Krümmung* der Kurve in dem betreffenden Punkte.[15])

Ändert sich die Krümmung einer Kurve stetig, wenn der zugehörige Punkt sich stetig auf der Kurve fortbewegt, so heißt die Kurve stetig in Bezug auf ihre Krümmung, und nur mit solchen Kurven haben wir es in unseren Problemen zu thun. Auch diese Eigenschaft der Kurven bleibt bei einer Projektion ungeändert.

435. Für das Weitere wird es gut sein, folgende Bemerkungen vorauszuschicken. Ist ein Kurvenbogen AB gegeben und soll man den Winkel der Tangenten in den Endpunkten bestimmen, so verschlägt es nichts, wenn man an Stelle der Tangenten in A und B die Sekanten AA_1 und BB_1 zu Grunde legt, wobei AA_1 und BB_1 unendlich klein sind. Denn diese Sekanten bilden nur einen unendlich kleinen Winkel mit den entsprechenden Tangenten, so daß der begangene Fehler als unendlich kleine Größe gegenüber dem endlichen Winkel nicht in Betracht kommt. Ist dagegen der Bogen AB bereits unendlich klein, also auch der Winkel der Endtangenten ein un-

endlich kleiner Kontingenzwinkel, so darf man nur Fehler außer acht lassen, welche von höherer Ordnung unendlich klein sind als der gesuchte Kontingenzwinkel. Teilt man aber den Bogen AB in n Teile und läßt die Zahl n über jede Grenze wachsen, wobei AA_1 den ersten Teil, BB_1 einen gleichen Teil darstellt, so werden AA_1 und BB_1 unendlich klein von der 2. Ordnung und ebenso die Winkel der Sekanten AA_1 und BB_1 mit den bezüglichen wirklichen Tangenten. Der Winkel der Sekanten AA_1 und BB_1 unterscheidet sich also nur um eine unendlich kleine Größe 2. Ordnung von dem gesuchten Kontingenzwinkel, und man kann den ersteren an Stelle des letzteren setzen.

436. Berührt ein Kreis eine Kurve in einem Punkt und stimmt daselbst bei beiden die Krümmung der Größe und dem Sinne nach überein, so heißt der Kreis der Krümmungskreis und sein Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt für den betreffenden Kurvenpunkt. Die gegebene Kurve und der Kreis müssen an der bezüglichen Stelle auf der nämlichen Seite der zugehörigen Tangente liegen und dies soll dadurch ausgedrückt werden, daß wir sagen: die Krümmung beider Kurven stimmt dem Sinne nach überein. In jedem Kurvenpunkte unterscheidet man eine konvexe Seite, nämlich diejenige auf der die zugehörige Tangente liegt, und eine konkave Seite. Bei einer Kurve wird es im allgemeinen einzelne Punkte geben, in denen ein Wechsel der Krümmung eintritt, es sind das diejenigen Punkte, die nach 422 als Wendepunkte bezeichnet werden.

437. Wir können zu dem Krümmungskreis durch einen gewissen Grenzprozeß gelangen und dieser soll uns jetzt etwas näher beschäftigen. Ist der Krümmungskreis im Punkte P der Kurve c zu bestimmen, so fassen wir alle die Kreise ins Auge, die die Kurve in P berühren, deren Mittelpunkte also auf der zugehörigen Normalen n liegen. Wählen wir nun in der Nähe von P auf der Kurve einen Punkt Q_1, so giebt es einen Kreis k_1 der c in P berührt und in Q_1 schneidet. Liegt Q_1 nahe genug bei P, so wird der Kreis den Kurvenbogen PQ_1 nicht mehr schneiden und es liegt dieser Bogen Q_1P und seine nächste Fortsetzung über P hinaus ganz innerhalb des Kreises k_1, wie Fig. 283 zeigt. Ganz ebenso läßt sich ein Kreis k_2 angeben, der c in einem Punkte Q_2 schneidet, wo Q_2 in der Nähe von P, aber von Q_1 durch P getrennt liegt. Der Bogen Q_2P, sowie seine nächste Fortsetzung über P hinaus liegt

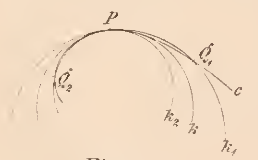


Fig. 283.

hier ganz außerhalb des Kreises k_2 und somit liegt auch k_2 innerhalb k_1. Läßt man jetzt den Punkt Q_1 sich stetig nach P hinbewegen, bis er zu P unendlich nahe wird, so nähert sich der Kreis k_1 unbegrenzt einer bestimmten Grenzlage k, die nichts anderes als der Krümmungskreis der Kurve c in P sein kann. Ebenso konvergiert der Kreis k_2 beim Übergang zur Grenze unbegrenzt gegen k. Dieser Übergang läßt uns zugleich erkennen, daß der Krümmungskreis in seinem Berührungspunkte P von einer Seite der Kurve c auf die andere übertritt, oder wie wir auch sagen können, daß k drei konsekutive Punkte mit der Kurve gemein hat (Berührung 2. Ordnung, Oskulation vergl. 378).

Den Beweis für die Richtigkeit unserer Behauptung, daß k der bezügliche Krümmungskreis ist, erbringen wir, indem wir zeigen, daß beim Grenzübergang der Kurvenbogen Q_1P gleich dem Kreisbogen Q_1P und die zugehörigen Kontingenzwinkel ebenfalls einander gleich werden — abgesehen von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung. Da die Krümmung in einem Kurvenpunkte gleich dem Quotienten von Kontingenzwinkel und Bogenelement ist, so ist dann die Übereinstimmung der Krümmung von k und c in P bewiesen.

438. Die Kurven c und k berühren sich in P, ihre gemeinsame Normale ist n, sie schneiden sich in Q_1. Die Kreistangente in Q_1 sei Q_1S, die Kurventangente Q_1T, wo S und T auf n liegen, und das Lot von Q_1 auf n sei Q_1N. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck: NQ_1T offenbar: $Q_1N <$ Kurvenbogen $Q_1P < Q_1T$. Denn teilt man den Bogen Q_1P in unendlich viele Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zu n, so teilen die Parallelen auch Q_1N und Q_1T in unendlich viele Teile. Jedes Element des Kurvenbogens ist aber kleiner als das entsprechende Element von Q_1T, da dieses gegen die Parallelen stärker geneigt ist, — die Stetigkeit des Bogens Q_1P in Bezug auf die Tangente vorausgesetzt; hieraus ergiebt sich die Richtigkeit unserer Behauptung. Beim Übergang zur Grenze erkennen wir nach 417, daß $Q_1T - Q_1N$ von der 3. Ordnung unendlich klein wird, da Q_1N und $\angle NQ_1T$ von der 1. Ordnung unendlich klein werden. Daraus schließen wir unmittelbar, daß der Kurvenbogen Q_1P und der Kreisbogen Q_1P sich in der Grenze nur um eine unendlich kleine Größe von mindestens 3. Ordnung unterscheiden, denn sie sind beide gleich Q_1N bis auf solche Größen.

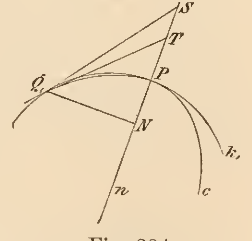


Fig. 284.

439. Die Kontingenzwinkel, die dem Kreis- und Kurvenbogen Q_1P zugehören, stimmen bis auf unendlich kleine Größen 2. Ordnung überein, denn die Sehne Q_1P schließt mit den Kreistangenten in ihren Endpunkten gleiche Winkel ein, während sie mit den Kurventangenten beim Grenzübergang unendlich kleine Winkel einschließt, die sich nur um ein unendlich Kleines 2. Ordnung unterscheiden. Um sich davon zu überzeugen teile man eine Kurve in lauter gleiche Elemente und verbinde alle Teilpunkte mit einem bestimmten unter ihnen P. Die um P entstehenden Winkel sind alle unendlich klein 1. Ordnung, und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit ist die Differenz zweier aufeinanderfolgender Winkel unendlich klein 2. Ordnung; zu den Strahlen durch P gehört auch die Tangente und es ist deshalb in Fig. 285 die Differenz: $\angle\, Q_1PR_1 - \angle\, Q_2PR_2$ unendlich klein 2. Ordnung. Aber auch die Differenz: $\angle\, R_1Q_1P - \angle\, R_2PQ_2$ ist unendlich klein 2. Ordnung, weil PQ_1 und Q_2P gleiche Elemente und beide Winkel gleichartig definiert sind, und folglich ist: $\angle\, R_1PQ_1 - \angle\, R_1Q_1P$ unendlich klein 2. Ordnung (Fig. 284).

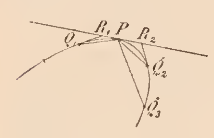


Fig. 285.

Das Gesagte läßt weiter erkennen, daß der Krümmungsmittelpunkt der Schnittpunkt zweier benachbarter Kurvennormalen ist. Denn schneiden sich die Kreisnormalen in P und Q_1 im Punkte M_1, die bezüglichen Kurvennormalen in M', so ist M_1M' unendlich klein von der 1. Ordnung, da $\angle\, M_1Q_1M' = \angle\, SQ_1T$ von der 2. Ordnung unendlich klein ist.

440. Denkt man sich in allen Punkten einer Kurve c die Normalen gezeichnet, so umhüllen diese eine neue Kurve v, welche als Evolute von c bezeichnet wird, während c selbst die Evolvente heißt. Da sich benachbarte Normalen in einem Krümmungsmittelpunkte schneiden, so bildet die Evolute der Kurve c den Ort aller ihrer Krümmungsmittelpunkte. Aus dem Früheren geht unmittelbar hervor, daß die Längen zweier Normalen in zwei benachbarten Kurvenpunkten, gemessen von der Kurve bis zu ihrem Schnittpunkte (dem Krümmungsmittelpunkt) sich nur um eine unendlich kleine Größe 3. Ordnung unterscheiden. Daraus können wir folgendes schließen. Läßt man eine Tangente der Kurve v auf ihr abrollen, ohne daß dabei ein Gleiten stattfindet, so beschreibt jeder ihrer Punkte eine Evolvente zu v. Denken wir uns also an die Evo-

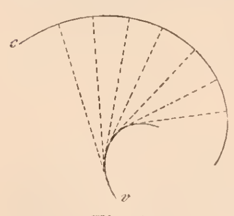


Fig. 286.

lute v einen Faden angelegt und wickeln ihn von ihr ab, wobei er immer gespannt bleiben muß, so beschreibt sein Endpunkt eine Evolvente.

441. Wie wir oben gesehen haben, tritt der Krümmungskreis in dem zugehörigen Kurvenpunkte im allgemeinen von der einen Seite der Kurve auf die andere über. Es ist indessen hier ein Ausnahmefall zu erwähnen. Berührt ein Kreis k_1 die Kurve c im Punkte P und schneidet sie in einem nahe bei P liegenden Punkte Q_1, so kann es eintreten, daß er c noch in einem Punkte Q_2 schneidet, der ebenfalls nahe bei P aber von Q_1 durch P getrennt liegt. Läßt man dann Q_1 stetig nach dem Berührungspunkte P hinrücken und tritt dann von selbst das Gleiche für Q_2 ein, so daß sich in der Grenzlage k gleichzeitig Q_1 und Q_2 mit P vereinigen, dann hat der Krümmungskreis k in P vier (nicht nur wie im allgemeinen drei) benachbarte Punkte mit der Kurve c gemein, und diese liegt in der Nähe von P ganz auf einer Seite von k. Ein solches Verhalten (Berührung 3. Ordnung) zeigen z. B. die Krümmungskreise in den Scheiteln der Kegelschnitte, und deshalb sollen derartige Punkte auch bei andern Kurven als Scheitelpunkte bezeichnet werden (vergl. 381 und 382).

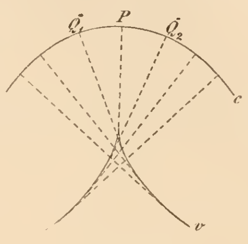


Fig. 287.

Das Verhalten der Evolute im vorliegenden Falle ist leicht zu übersehen. Während ein Punkt sich auf c fortbewegt, umhüllt die zugehörige Normale die Evolute und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt durchläuft dieselbe. In dem Augenblick, wo die Normale einen Scheitelpunkt passiert, bleibt ihr Berührungspunkt mit der Evolute still stehen, um dann seinen Fortschreitungssinn auf der Tangente umzukehren; demgemäß weist die Evolute an der betreffenden Stelle nach 422 eine Spitze auf.

442. Verhalten der Krümmung im Wendepunkte, bei der gewöhnlichen Spitze und der Schnabelspitze. Beim Wendepunkte sehen wir, daß der Winkel benachbarter Tangenten, d. h. der Kontingenzwinkel sein Vorzeichen ändert. Stellen wir uns vor, daß die Kurve in lauter gleiche Elemente geteilt sei, so ist ja der Drehsinn der Tangente beim Übergange von einer Lage in die Nachbarlage (wenn man die Kurve in demselben Sinne durchläuft) ein verschiedener, je nachdem ihr Berührungspunkt vor oder hinter dem Wendepunkte liegt. Der Kontingenzwinkel wird deshalb im Wendepunkte selbst gleich Null sein, d. h. es werden zwei benach-

barte Kurvenelemente in dieselbe Gerade fallen, die Tangente im Wendepunkte enthält drei konsekutive Kurvenpunkte und der zugehörige Krümmungsradius ist unendlich groß. Die Evolute hat also die bezügliche Normale zur Asymptote.

Aus analogen Gründen oder aus dem Prinzip der Dualität schließen wir, daß bei gleichen Kontingenzwinkeln — wobei dann die Kurvenelemente ungleich sind — in einem Rückkehrpunkte

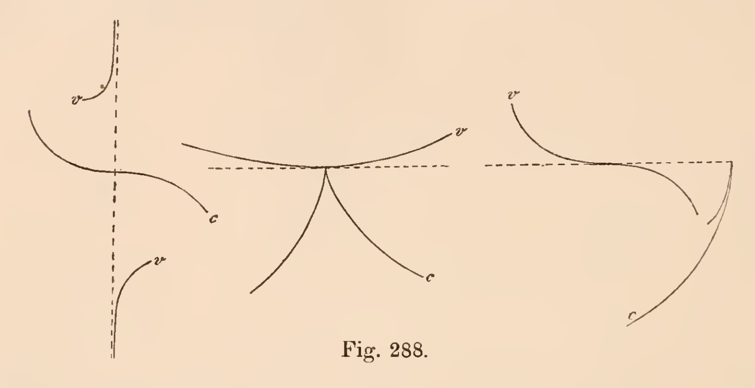


Fig. 288.

das Kurvenelement gleich Null wird. Hieraus ersieht man, daß der Rückkehrpunkt ein spezieller Fall des Doppelpunktes ist, in dem zwei konsekutive Kurvenpunkte zusammenfallen. Durch den Rückkehrpunkt gehen drei konsekutive Tangenten und der zugehörige Krümmungsradius ist Null, die Evolute berührt also die Kurvennormale in der Spitze. Bei der Schnabelspitze — die eigentlich eine Vereinigung von Wendepunkt und Rückkehrpunkt ist — wählt man eine Hilfsvariable, von der die Lage des beschreibenden Kurvenpunktes gesetzmäßig abhängt, und läßt sie sich um gleiche unendlich kleine Größen ändern. Unendlich kleinen Änderungen der Hilfsvariabeln entsprechen im allgemeinen Kurvenelemente und Kontingenzwinkel, die zu jener Änderung in einem endlichen Verhältnisse stehen. Für den Wendepunkt wird das letztere, für den Rückkehrpunkt das erstere Verhältnis gleich Null; für die Schnabelspitze werden beide Verhältnisse unendlich klein, doch wird der Quotient von Kontingenzwinkel und Kurvenelement endlich bleiben, und somit ist auch der Krümmungsradius für die Schnabelspitze endlich. Die Evolute hat die zugehörige Normale zur Wendetangente, da ja die Tangente der Evolute, d. h. die Normale der Kurve c in der Schnabelspitze rückläufig wird (Fig. 288).

443. Die Aufgabe: den Krümmungskreis für einen Punkt einer gegebenen Kurve zu konstruieren, kann nur bei wenigen

Kurven im Anschlusse an ihre geometrische Definition genau gelöst werden, wie wir das bereits bei den Kegelschnitten gesehen haben und noch bei einigen weiteren Kurven später sehen werden. Indessen kann man bei einer Kurve, die gezeichnet vorliegt, den Krümmungskreis mit ziemlicher Genauigkeit durch bloßes Probieren finden, indem man für den betreffenden Punkt zunächst die Normale zeichnet und dann denjenigen unter den berührenden Kreisen auswählt, der die Kurve im Berührungspunkte durchsetzt. Man muß dann bei geringer Variation des Radius Kreise erhalten, die die Kurve an der gegebenen Stelle berühren und außerdem ganz nahe dabei noch schneiden. Dieser weitere Schnittpunkt liegt auf der einen oder andern Seite des Berührungspunktes, je nachdem der Radius größer oder kleiner als der gesuchte Krümmungsradius ist und gerade auf diesem Umstande beruht die verhältnismäßig gute Genauigkeit.

Man kann die oben beschriebene Methode des Probierens noch etwas vervollkommnen, indem man vier die Kurve c im Punkte P berührende Hilfskreise k_1, k_2, k_3, k_4 benuzt und eine Fehlerkurve zeichnet. Wählt man auf c in der Nähe von P vier Punkte und zwar Q_1, Q_2 auf der einen, Q_3, Q_4 auf der andern Seite von P, und zeichnet vier Kreise k_1, k_2, k_3, k_4 durch P und durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 respektive, so sind ihre Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 die Schnittpunkte der Normalen n mit den Mittelsenkrechten der Sehnen $PQ_1, \ldots PQ_4$. Zieht man nun durch $M_1, \ldots M_4$ Parallele und trägt auf ihnen

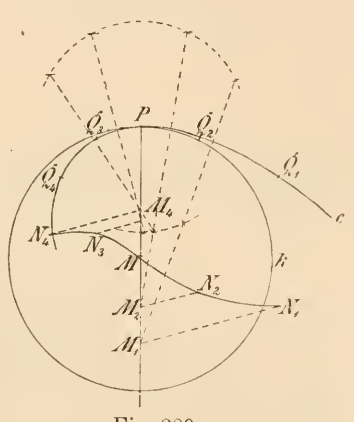


Fig. 289.

$$M_1N_1 = PQ_1,\ M_2N_2 = PQ_2,\ M_3N_3 = PQ_3,\ M_4N_4 = PQ_4$$

respektive auf (wobei M_1N_1, M_2N_2 gleiche, M_3N_3, M_4N_4 die entgegengesetzte Richtung erhalten), so definieren die Punkte N_1, N_2, N_3, N_4 eine Fehlerkurve, die offenbar die Normale n im Krümmungsmittelpunkte M schneidet.

444. Wir wollen uns noch fragen, in welcher Beziehung die Krümmung einer ebenen Kurve zu der ihres perspektiven Bildes steht. Nehmen wir an, die zu Grunde gelegte Kurve sei c, ihr perspektives Bild c', O sei das Centrum und a die Achse der Perspektive (Fig. 290). Dabei können wir voraussetzen, daß die

Kurve c und ihr Bild c' in der gleichen Ebene liegen. $PP_1 = e$ sei ein Element von c, t und t_1 seien die Tangenten in P resp. P_1 und s die Sekante PP_1; diese Geraden mögen die Achse a in den

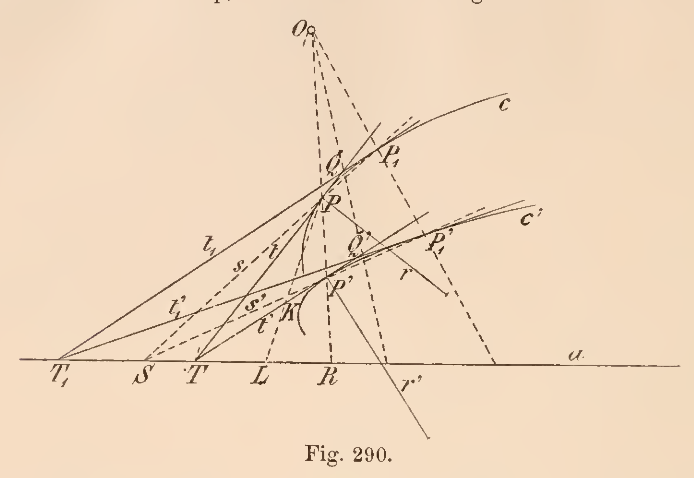


Fig. 290.

Punkten T, T_1, S respektive schneiden. Haben $P'P_1' = e'$, t', t'_1 und s' die analoge Bedeutung für c', und setzen wir $PT = t$, $P'T = t'$, so kommt:

$$\frac{e}{e'} = \frac{OP}{OP'} \cdot \frac{SP_1}{SP_1'} = \frac{OP}{OP'} \cdot \frac{t}{t'},$$

abgesehen von unendlich kleinen Größen. Ferner ist:

$$\frac{\varepsilon}{TT_1} = \frac{\sin t\,a}{QT_1} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon'}{TT_1} = \frac{\sin t'a}{Q'T_1}$$

also:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\sin t\,a}{\sin t'a} \cdot \frac{Q'T_1}{QT_1} = \frac{\sin t\,a}{\sin t'a} \cdot \frac{t'}{t} = \frac{RP}{RP'} \cdot \frac{t'^2}{t^2},$$

(wo $Q = t \times t_1$, $Q' = t' \times t'_1$, $R = OP \times a$, $\varepsilon = \angle\, tt_1$ und $\varepsilon' = \angle\, t't_1'$).

Nun ist aber der Krümmungsradius im Punkte P von c bestimmt durch: $r = e : \varepsilon$ und analog gilt $r' = e' : \varepsilon'$, also folgt:

$$r : r' = \left[\frac{OP}{OP'} : \frac{RP}{RP'}\right] \cdot \frac{t^3}{t'^3}.$$

Zur Konstruktion diene folgendes. Zieht man durch P eine Parallele zu OT, die t' und a in K und L schneidet, so ist nach 216:

$$\frac{OP}{OP'} : \frac{RP}{RP'} = \frac{LK}{LP}.$$

Zeichnet man ferner ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten t und t', und errichtet auf der Hypotenuse Senkrechte in den Endpunkten, so schneiden diese auf den Verlängerungen der Katheten

die Strecken $AE = \frac{t^2}{t'}$ resp. $AD = \frac{t'^2}{t}$ ab, deren Verhältnis $\frac{t^3}{t'^3}$ ist (vergl. Fig. 291). Macht man noch $DF = LK$ und $FG \parallel AE$, so wird: $r : r' = FG : LP$; wonach sich r' leicht konstruiert ($FH = LP$, $JF = r$, $FN = r'$). Die obige Beziehung $r : r'$ wurde zuerst von Geisenheimer[16]) aufgefunden; sie erleidet einige Vereinfachungen, wenn man statt der Centralprojektion die Parallelprojektion, insbesondere die orthogonale Projektion zu Grunde legt. Die vorliegende Beziehung kann auch dazu verwendet werden, bei Kegelschnitten die in 378 bis 388 angeführten Konstruktionen des Krümmungsradius abzuleiten.

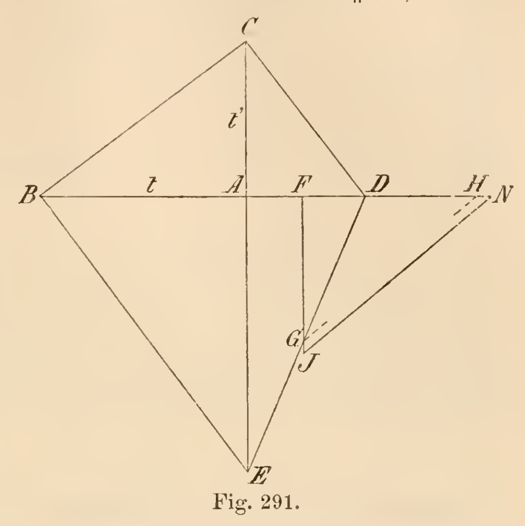


Fig. 291.

Rektifikation von Kurven.

445. Unter der Rektifikation eines Kurvenbogens versteht man die Bestimmung seiner wahren Länge gemessen durch eine geradlinige Strecke, wie sie sich z. B. ergiebt, wenn der Kurvenbogen auf einer geraden Linie ohne zu gleiten abrollt. Bei unseren Aufgaben handelt es sich darum, einen Kurvenbogen näherungsweise zu rektifizieren, indem man auf der Kurve eine Reihe von Punkten in geringer gegenseitiger Entfernung annimmt, je zwei aufeinanderfolgende durch eine Sehne verbindet und nun die Länge des gebrochenen Linienzuges der Sehnen bestimmt. Dieser giebt dann annäherungsweise die gesuchte Bogenlänge und zwar müßte das Resultat um so genauer werden, je dichter man die Punkte auf der Kurve wählt. Nimmt man die gegenseitige Entfernung unendlich klein, so stimmt die Bogenlänge mit der Länge des gebrochenen Linienzuges überein, da ein unendlich kleiner Bogen und seine Sehne sich nur um eine unendlich kleine Größe 3. Ordnung unterscheiden. Bei der praktischen Durchführung einer Rektifikation trägt man in den Kurvenbogen, von einem Endpunkte ausgehend, lauter gleiche kleine Sehnen

ein und dann diese (in der gleichen Anzahl) auf einer Graden auf. Die Länge der gleichen Sehnen ist natürlich verschieden zu wählen, je nach der Stärke der Krümmung des Kurvenbogens; bei stärkerer Krümmung wählt man die Sehnen kleiner, bei schwächerer Krümmung größer. Nach Untersuchungen von Chr. Wiener[17]) ist es bei der Rektifikation eines Kreises von 2, 6, 10, 20 cm Durchmesser zweckmäßig eine Sehnenlänge von $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{27}$ des Durchmessers zu verwenden; dieses liefert einen Anhaltepunkt auch für andere Rektifikationen.

Eine besondere Bedeutung hat die Rektifikation eines Kreises; der Kreisumfang ist gleich $2\pi r$, wo r den Radius und π die Zahl 3,14159 . . . bedeutet. Man darf also annehmen, daß der Kreisumfang angenähert gleich $3\frac{1}{7}$ Durchmesser ist; der Fehler beträgt bei 10 cm Durchmesser nur etwa $\frac{1}{8}$ mm. Bei Kreisen mit wesentlich größeren Durchmessern wird man einen genaueren Wert für die Zahl π einsetzen müssen.

Raumkurven und ihre Projektionen; abwickelbare Flächen.

446. Bewegt sich ein Punkt im Raume (ohne in einer und derselben Ebene zu bleiben), so beschreibt er eine Raumkurve, die hier als eine Aufeinanderfolge von Punkten erscheint. Zwei benachbarte, unendlich nahe Lagen des bewegten Punktes bestimmen ein Kurvenelement und eine Tangente, nämlich die Gerade, die das Kurvenelement enthält; die zwei unendlich nahen Punkte der Kurve fallen mit dem Berührungspunkte der Tangente zusammen. Die Tangente kann demgemäß als Grenzlage einer Sehne der Raumkurve angesehen werden. Läßt man den einen Endpunkt P einer Sehne fest, während man den andern Q sich auf der Raumkurve fortbewegen und schließlich mit dem festen Endpunkt zusammenfallen läßt, so geht die Sehne in der Grenzlage in die Tangente im Punkte P über. Jede Ebene durch die Tangente t in P ist eine Tangentialebene der Raumkurve. Legt man eine solche Tangentialebene durch einen in der Nähe von P befindlichen Punkt R der Raumkurve und läßt R sich nach P bewegen, so nimmt die Ebene durch t eine gewisse Grenzlage an, sie wird zur Schmiegungsebene. Während die Raumkurve bei einer gewöhnlichen Tangentialebene in der Nähe des Berührungspunktes ganz auf einer Seite dieser Ebene liegt, durchsetzt sie die Schmiegungsebene im Berührungspunkte; denn dieser entsteht ja durch Vereinigung des Berührungspunktes mit einem Schnittpunkt einer Tangentialebene. Die Schmiegungs-

ebene enthält zwei benachbarte Kurvenelemente oder drei benachbarte Kurvenpunkte; sie kann auch als Grenzlage einer Ebene gewonnen werden, die durch drei nahe bei einander liegende Kurvenpunkte P, Q, R geht, wenn diese sich vereinigen.

Steht eine Gerade auf einer Tangente im Berührungspunkte senkrecht, so heißt sie Normale; alle Normalen in einem Punkte der Raumkurve liegen in einer Ebene, der Normalebene. Die Normale in der Schmiegungsebene heißt Hauptnormale, die auf ihr senkrechte Normale die Binormale; die Ebene durch Tangente und Binormale nennt man rektifizierende Ebene.

447. Bewegt sich ein Punkt auf der Raumkurve, so führen gleichzeitig die zugehörige Tangente und die zugehörige Schmiegungsebene Bewegungen aus, und zwar dreht sich die Tangente stets um den bezüglichen Berührungspunkt in der Schmiegungsebene und die Schmiegungsebene um die bezügliche Tangente. Denken wir uns zunächst ein kleines aber endliches Stück PQ der Raumkurve, so erhalten wir eine bestimmte Bogenlänge, einen bestimmten Winkel der Endtangenten und einen bestimmten Winkel der Schmiegungsebenen in den Endpunkten. Lassen wir den Bogen AB unendlich klein werden, so tritt gleiches für den Winkel der Tangenten und den Winkel der Schmiegungsebenen ein, falls die Kurve stetig ist, wie wir voraussetzen wollen. Im allgemeinen — d. h. abgesehen von einzelnen Punkten — sind nun die Verhältnisse der genannten drei unendlich kleinen Größen endlich. Zu dem Bogenelement e gehört hiernach ein bestimmter Kontingenzwinkel ε, Winkel benachbarter Tangenten, und ein bestimmter Torsionswinkel η, Winkel benachbarter Schmiegungsebenen. Das Verhältnis $k = \frac{\varepsilon}{e}$ wird wie bei den ebenen Kurven als Krümmung, das Verhältnis $\tau = \frac{\eta}{e}$ als Torsion der Raumkurve an der betreffenden Stelle bezeichnet. Wie bei den ebenen Kurven giebt es ferner durch drei benachbarte Punkte der Raumkurve einen Krümmungskreis, er liegt in der zugehörigen Schmiegungsebene und sein Mittelpunkt auf der Hauptnormale.

448. Bei der angeführten Bewegung beschreibt die Tangente eine geradlinige Fläche, welche die zur Raumkurve gehörige abwickelbare Fläche oder kurz die abwickelbare Fläche der Raumkurve genannt wird; die Tangenten der Raumkurve heißen die Erzeugenden der Fläche. Gleichzeitig führt die zugehörige Schmiegungsebene eine solche Bewegung aus, daß sie die abwickel-

bare Fläche in allen ihren Lagen umhüllt; das will sagen, daß jede Schmiegungsebene die abwickelbare Fläche längs der in ihr liegenden Tangente der Raumkurve berührt. Um die Richtigkeit des Gesagten zu erkennen, ist es nötig, näher auf die gegenseitige Lage benachbarter Tangenten und Schmiegungsebenen einzugehen (Fig. 292). Seien P und P_1 zwei benachbarte Punkte unserer Raumkurve, t und t_1 die zugehörigen Tangenten, Σ und Σ_1 die Schmiegungsebenen, und $PP_1 = s$ die Sekante. Dann ist nach 418 der Abstand des Punktes P_1 von der Schmiegungsebene Σ unendlich klein von der 3. Ordnung; ganz ebenso ist der Abstand der Tangenten t und t_1 unendlich klein 3. Ordnung, denn die Ebenen durch t und s resp. t_1 und s schließen einen unendlich kleinen Winkel ein und zugleich sind $\angle\, ts$, $\angle\, t_1 s$ und PP_1 von der 1. Ordnung unendlich klein. Ziehen wir auf der abwickelbaren Fläche eine Kurve, die t und t_1 in den benachbarten Punkten Q und Q_1 schneidet, so ist das Lot Q_1Q', gefällt von Q_1 auf Σ unendlich klein 2. Ordnung (nach 418), folglich schließt QQ_1 mit Σ einen unendlich kleinen Winkel ein, und wir können deshalb sagen, daß die Tangente der auf der abwickelbaren Fläche gezogenen Kurve im Punkte P in die Schmiegungsebene Σ fällt (in der Figur ist eine Hilfsebene E durch QQ_1 senkrecht zu Σ benutzt). Die Schmiegungsebene Σ tangiert also wirklich die abwickelbare Fläche längs ihrer Erzeugenden t.

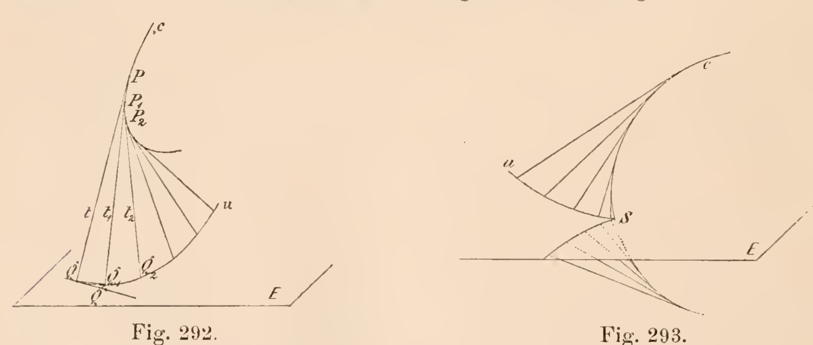


Fig. 292. Fig. 293.

449. Die Raumkurve bildet auf der zugehörigen abwickelbaren Fläche eine Rückkehrkurve oder Rückkehrkante, d. h. jeder ebene Schnitt der abwickelbaren Fläche weist in den Durchstoßpunkten mit der Raumkurve Rückkehrpunkte oder Spitzen auf. In der That, schneidet eine Ebene E die Raumkurve c in S (Fig. 293) und läßt man einen Punkt auf dieser fortwandern, wobei er auch die Lage S passiert, dann liefert die zu dem wandernden Punkte zugehörige Tangente und Schmiegungsebene die Punkte und Tangenten

der Schnittkurve u von E mit der abwickelbaren Fläche. Passiert der bewegte Punkt die Lage S, so behalten Tangente und Schmiegungsebene ihren Drehsinn bei — falls S ein gewöhnlicher Punkt der Raumkurve ist. Demnach behält auch die Tangente der ebenen Schnittkurve ihren Drehsinn bei, dagegen ändert der sie beschreibende Punkt in S seinen Fortschreitungssinn. Denn bezeichnen wir die beiden Teile der Tangente einer Raumkurve, vom Berührungspunkte aus gerechnet, als positiv und negativ, so wird der eine Teil der Schnittkurve bis zum Punkte S hin von dem positiven Teile der bewegten Tangente beschrieben, der andere vom negativen Teile, wodurch jene Änderung hervorgebracht wird.

450. Lassen wir nun eine Ebene, welche die abwickelbare Fläche längs einer Erzeugenden berührt, sich auf dieser fortwälzen, wobei wir indes nur einen der beiden Teile der Fläche, die längs der Rückkehrkurve aneinandergrenzen, in Betracht ziehen. Beim Abwälzen oder Abrollen der Ebene auf einem Teile der abwickelbaren Fläche werden die Erzeugenden alle nacheinander zu Berührungslinien der wälzenden Ebene, die sich in jedem Augenblicke um die Berührungslinie ohne zu gleiten dreht. Indem bei dieser Bewegung jeder Punkt der Fläche einmal in die wälzende Ebene fällt, liefert jede Erzeugende und jede Kurve unserer Fläche eine Gerade respektive eine Kurve in der wälzenden Ebene, sie werden als die Abwickelungen jener Gebilde bezeichnet. Natürlich kann auch die Ebene festgehalten und die abwickelbare Fläche ohne Gleiten auf ihr abgewälzt werden, was offenbar darauf hinauskommt, daß der eine Teil einer abwickelbaren Fläche ohne Dehnung oder Zerreißung und ohne Stauchung oder Faltung in einer Ebene ausgebreitet werden kann. Um sich die geschilderten Vorgänge völlig klar zu machen, denke man sich auf der abwickelbaren Fläche eine Reihe von Erzeugenden $t_1 t_2 t_3 \ldots t_n \ldots$ gezogen, die einander benachbart sind, deren Winkel $\varepsilon_{12} = \angle\, t_1 t_2$, $\varepsilon_{23} = \angle\, t_2 t_3 \ldots$ also unendlich klein sind. Würde nun jede Erzeugende die vorhergehende schneiden, so würden sie die Verlängerungen der Seiten eines räumlichen Polygons bilden und damit die Abwickelbarkeit in eine Ebene unmittelbar klar sein. Denn dazu gehört nur, daß man die Winkel, die je zwei aufeinanderfolgende Flächenelemente $t_1 t_2$, $t_2 t_3$, $t_3 t_4 \ldots$ einschließen, zu $2R$ ausstreckt, so daß alle Elemente in die nämliche Ebene zu liegen kommen. Der Flächenstreifen zwischen zwei Erzeugenden, etwa t_1 und t_2, der abwickelbaren Fläche ist nun an und für sich nicht eben, da jedoch die gemeinsame Normale von t_1 und t_2 unendlich klein von der

3. Ordnung ist, so darf man sie als absolut gleich 0 annehmen, ohne daß der dadurch begangene Fehler einen Einfluß auf das Resultat ausübt. In der Figur ist die abwickelbare Fläche durch eine Kurve u begrenzt, deren Abwickelung u_0 ist.

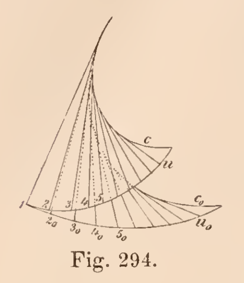


Fig. 294.

451. Aus dem Vorgange der Abwickelung einer abwickelbaren Fläche ergeben sich noch unmittelbar folgende Beziehungen. Der Winkel konsekutiver Erzeugenden ändert sich bei der Abwickelung nicht, ebensowenig die Länge einer Erzeugenden zwischen irgend zwei auf ihr gewählten Punkten. Hieraus folgt dann weiter, daß jeder Kurvenbogen auf der abwickelbaren Fläche gleich lang mit seiner Abwickelung ist und daß eine Erzeugende den Kurvenbogen unter dem gleichen Winkel schneidet, wie ihre Abwickelung die abgewickelte Kurve. Beim Abwickelungsprozeß geht hiernach die Rückkehrkurve c der abwickelbaren Fläche in eine ebene Kurve c_0 über, die mit jener an entsprechenden Stellen stets die gleiche Krümmung zeigt, da ja Kurvenelement und Kontingenzwinkel dabei ungeändert bleiben (vergl. Fig. 294).

452. Während die Krümmung der Rückkehrkurve beim Abwickeln ungeändert bleibt, erfährt die Krümmung aller andern Kurven der Fläche eine Änderung, und wir wollen uns fragen, in welcher Beziehung der Krümmungsradius r im Punkte P einer Kurve k der abwickelbaren Fläche zum Krümmungsradius r_0 des Punktes P_0 der abgewickelten Kurve k_0 steht (Fig. 295). Sind P und Q benachbarte Punkte von k, t und u die zugehörigen Tangenten, e und f die durch P resp. Q verlaufenden Erzeugenden, und haben $P_0, Q_0, t_0, u_0, e_0, f_0$ die analoge Bedeutung für die Abwickelung in der Ebene, so hat man: $r : r_0 = \varepsilon_0 : \varepsilon$, wo $\angle\, tu = \varepsilon$ und $\angle\, t_0 u_0 = \varepsilon_0$ ist; denn es ist ja $PQ = P_0 Q_0$. Bei der Abwickelung ändert sich nun die Lage von u gegen t dadurch, daß die Gerade u eine unendlich kleine Drehung um e macht, bis sie in die Ebene te zu liegen kommt; diese Drehung können wir durch eine Projektion ersetzen, indem wir u senkrecht auf die Ebene te nach u' projizieren, der hierbei entstehende Fehler ist ja von höherer Ordnung unendlich klein; es ist demnach $\angle\, tu' = \angle\, t_0 u_0 = \varepsilon_0$. Nun ist aber $\angle\, tu' = \angle\, tu \,.\, \cos \nu$,

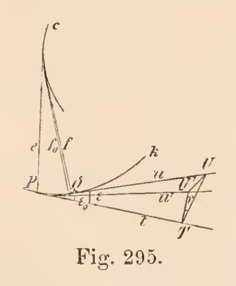


Fig. 295.

wenn ν den Neigungswinkel der Ebene tu gegen die Ebene te bedeutet; denn ist die Ebene $UU'T \perp t$, so ist $\angle\, UTU' = \nu$ und also $\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \operatorname{tg} \varepsilon . \cos \nu$. Wir können mithin sagen: Der Krümmungsradius r einer Kurve der abwickelbaren Fläche in einem ihrer Punkte ist gleich dem Krümmungsradius r_0 der abgewickelten Kurve im entsprechenden Punkte multipliziert mit $\cos \nu$, wenn ν den Neigungswinkel der Schmiegungsebene jener Kurve mit der Tangentialebene der Fläche in dem genannten Punkte bedeutet.

Ist der Neigungswinkel $\nu = R$, d. h. steht die Schmiegungsebene der Kurve k an der betreffenden Stelle P auf der Tangentialebene der abwickelbaren Fläche senkrecht, so wird in der Projektion $\angle\, tu = 0$ und es besitzt k_0 in P_0 einen Wendepunkt; in der That giebt auch die Formel: $r_0 = r : \cos \nu$ den Wert $r_0 = \infty$.

453. Eine Kurve der abwickelbaren Fläche, die bei der Abwickelung in eine Gerade übergeht, heißt geodätische Linie. Wie die Gerade in der Ebene, so ist die geodätische Linie auf der Fläche die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte. Aus dem Vorausgehenden ergiebt sich, daß in jedem Punkte einer geodätischen Linie die Schmiegungsebene auf der Tangentialebene der Fläche senkrecht steht. Diese Eigenschaft besitzt die geodätische Linie auf jeder beliebigen krummen Oberfläche.

454. Zu jeder Raumkurve gehört eine ebene Kurve, die mit ihr in allen entsprechenden Punkten gleiche Krümmung hat; letztere entsteht aus der ersteren durch Abwickelung ihrer abwickelbaren Fläche, wobei ja Bogenelement e und Kontingenzwinkel ε der Rückkehrkurve ungeändert bleiben. Zu jeder Raumkurve gehört aber auch ein bestimmter Kegel — Richtkegel — den man erhält, indem man durch einen beliebigen Punkt O zu den Erzeugenden der abwickelbaren Fläche die Parallelstrahlen zieht. Hierdurch werden zugleich die Tangentialebenen des Kegels zu den entsprechenden Schmiegungsebenen der Raumkurve parallel, so daß Kontingenzwinkel ε und Torsionswinkel η der Raumkurve bezw. mit dem Winkel benachbarter Erzeugenden und Tangentialebenen des Richtkegels übereinstimmen.

455. Wir haben bereits gesehen, daß die Schmiegungsebenen einer Raumkurve ihre abwickelbare Fläche umhüllen. Es kann demgemäß die abwickelbare Fläche als Hüllfläche aller Lagen einer bewegten Ebene erzeugt werden. Je zwei benachbarte Ebenen schneiden sich in einer Erzeugenden der Fläche, je drei benachbarte Ebenen in einem Punkte ihrer Rückkehrkurve. So bestimmen

alle Normalebenen einer Raumkurve eine abwickelbare Fläche, die man als Evolutenfläche der Raumkurve bezeichnet. Läßt man auf der Evolutenfläche eine Ebene wälzen, ohne daß sie dabei gleitet, so beschreibt jeder ihrer Punkte eine Raumkurve — Evolvente — unter denen sich auch die ursprüngliche Raumkurve befindet. Die Evolventen durchsetzen die Tangentialebenen der Evolutenfläche rechtwinklig.

456. Die Parallel- oder Centralprojektion einer Raumkurve ist eine ebene Kurve, deren Tangenten die Projektionen der Tangenten der Raumkurve sind. Es ergiebt sich dies einfach daraus, daß die Tangenten als spezielle Sekanten aufzufassen sind, bei denen durch einen Grenzübergang zwei Schnittpunkte mit der Kurve zusammengerückt sind. Liegt das Projektionscentrum auf einer Tangente t der Raumkurve, so projiziert sich ihr Berührungspunkt B als Spitze. Man kann sich hiervon Rechenschaft geben, indem man einen Punkt die Raumkurve durchlaufen läßt und zugleich auf die Bewegung der zugehörigen Tangente achtet; denn während der Punkt die Lage B passiert (Fig. 296), bleibt seine Projektion einen Augenblick still stehen, um dann rückläufig zu werden.

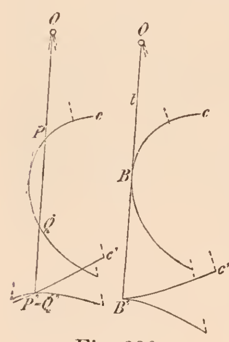


Fig. 296.

Man kann aber auch wieder den Grenzübergang benutzen. Geht die Verbindungslinie zweier Kurvenpunkte P und Q durch das Projektionscentrum, so bildet die Projektion $P' = Q'$ einen Doppelpunkt der Projektionskurve; beim Übergang zur Grenze wird die Sekante zur Tangente und der Doppelpunkt zur Spitze. Ein Kurvenpunkt, dessen Schmiegungsebene durch das Projektionscentrum geht, liefert in der Projektion einen Wendepunkt; da zwei benachbarte Tangenten die gleiche Projektion besitzen. Hieraus folgt, daß bei orthogonaler Projektion einer Raumkurve aus einem gewöhnlichen Punkte P ein gewöhnlicher, ein Wende- oder ein Rückkehrpunkt wird, je nachdem man auf die Schmiegungs-, die rektifizierende oder die Normalebene projiziert.

457. Die Raumkurve kann verschiedene Singularitäten aufweisen, von denen man die gewöhnlicheren auf folgende Weise erhält. Durchläuft ein Punkt P die Raumkurve, so dreht sich die zugehörige Tangente t um diesen Punkt und die zugehörige Schmiegungsebene Σ um die Tangente t. Während in einem gewöhnlichen Kurvenpunkt der Fortschreitungssinn von P auf t, der Drehsinn von t um P und der Drehsinn von Σ um t ungeändert bleiben, wird sich in

speziellen Punkten der Sinn einer oder mehrerer dieser Bewegungen umkehren; es giebt das — den gewöhnlichen Punkt eingerechnet — acht Kombinationen. Kehrt die Schmiegungsebene ihren Drehsinn um, so muß ihre Drehung an einer bestimmten Stelle gleich Null sein, so daß dort drei Kurvenelemente oder vier benachbarte Kurvenpunkte in einer Ebene liegen, die stationäre Ebene genannt wird. Kehrt die Tangente ihren Drehsinn um, so fallen zwei Kurvenelemente oder drei konsekutive Punkte in eine Gerade, und es entsteht der Wende- oder Streckungspunkt. Kehrt der Punkt seinen Fortschreitungssinn um, so entsteht die Spitze oder der Rückkehrpunkt. Hiernach kann man sich auch über die anderen Kombinationen Klarheit verschaffen; die Besprechung der verschiedenen Möglichkeiten kann aber hier unterlassen werden.[18])

458. Die Tangente und Schmiegungsebene sollen in einem Punkte einer Raumkurve konstruiert werden. Natürlich wird es bei manchen Raumkurven infolge der Art ihrer Definition möglich sein, die Tangente und Schmiegungsebene in jedem Punkte genau zu konstruieren. Insbesondere wird man bei der Bestimmung der Tangente ganz ähnlich wie in 428 verfahren können, indem der Kurvenpunkt als Schnitt dreier Hilfsflächen erscheint, wodurch dann die Tangente als Diagonale eines unendlich kleinen Parallelepipedes definiert ist, das durch ein ähnliches endliches Parallelepiped ersetzt werden kann. Es ist leicht, Beispiele in großer Zahl hierfür anzugeben, doch soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

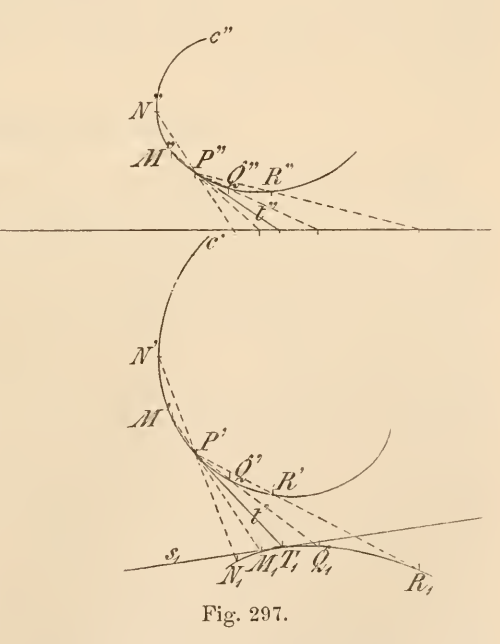


Fig. 297.

Wenn die Raumkurve in ihren beiden Projektionen gezeichnet vorliegt, so läßt sich unsere Aufgabe in folgender Weise konstruktiv durchführen (Fig. 297). Sind c', c'' die Projektionen der Raumkurve und P', P'' die eines Punktes auf ihr, so bestimmt man nach 425 die

Tangenten t' in P' an c' und t'' in P'' an c''; t', t'' sind dann die Projektionen der gesuchten Tangente t in P an c. Die gesuchte Schmiegungsebene Σ geht durch t und kann durch einen Grenzübergang definiert werden. Zieht man von P aus Strahlen nach allen Punkten der Raumkurve, so erhält man einen Kegel, dessen Mantelfläche auch t enthält, die Tangentialebene des Kegels längs der Mantellinie t (vergl. 454) ist die gesuchte Schmiegungsebene. Läßt man nämlich einen Punkt Q auf c sich nach P hin bewegen, so schneidet die Ebene tQ den Kegelmantel in den Erzeugenden t und PQ; sie wird beim Grenzübergang zur Tangentialebene des Kegels und zugleich zur Schmiegungsebene von c. Man wähle deshalb in der Nähe von P auf c beiderseitig je zwei Punkte, etwa Q, R resp. M, N und suche die Spurpunkte der Strahlen PQ, PR, PM, PN und t in einer der beiden Projektionsebenen, etwa Π_1. Dann geht die Spurkurve der Kegelfläche durch die Punkte Q_1, R_1, T_1, M_1, N_1 und kann hiernach gezeichnet werden; die Spurlinie s_1 von Σ ist jetzt als Tangente der Spurkurve im Punkte T_1 bestimmt.

Krumme Oberflächen.

459. Wir haben bereits in den abwickelbaren Flächen einen speziellen Fall der krummen Flächen kennen gelernt, und wollen nun zu den allgemeinen krummen Flächen übergehen. Wir können dieselben zunächst als Gebilde definieren, die von jeder Ebene in einer Kurve geschnitten werden. Diese Kurven können freilich auch aus mehreren Teilen, insbesondere auch aus geraden Linien bestehen. Für unsere Zwecke ist es nun unerläßlich, daß wir auf der krummen Fläche mindestens ein System von Raum- oder ebenen Kurven angeben können. Unter einem System von Kurven verstehen wir hierbei unendlich viele Kurven, die die ganze Fläche überdecken, so daß durch jeden Punkt der Fläche wenigstens eine solche Kurve hindurchgeht. Zu jeder Kurve giebt es demgemäß in dem System zwei benachbarte Kurven, die sich in ihrer Lage und zwar ihrer ganzen Erstreckung nach von jener nur unendlich wenig unterscheiden. Die Kurven des Systems können in speziellen Fällen entweder alle kongruent, oder ähnlich und nur der Größe nach verschieden sein; im allgemeinen Falle sind sie in ihrer Gestalt veränderlich, nur müssen auch dann noch zwei benachbarte Kurven bis auf unendlich kleine Unterschiede übereinstimmen. Im ersten Falle wird die Fläche erzeugt durch stetige Bewegung einer konstanten Kurve. So entstehen z. B. durch Bewegung

einer Geraden die abwickelbaren Flächen und die windschiefen Regelflächen; bei den letzteren steht der Abstand je zweier benachbarter Geraden (Erzeugenden) zu ihrem Winkel in einem endlichen Verhältnis, bei ersteren ist dieses Verhältnis unendlich klein. So entstehen z. B. durch Bewegung einer Kurve Translations-, Rotations- und Schraubenflächen, wenn die Punkte der bewegten konstanten Kurve kongruente Bahnen, Kreisbahnen um eine feste Achse oder Schraubenlinien um eine solche Achse beschreiben. (Vergl. darüber die späteren Kapitel.) Im allgemeinen Falle wird die Fläche erzeugt durch stetige Bewegung einer Kurve, die zugleich ihre Form stetig ändert. Dabei müssen natürlich die Gesetze für Bewegung und Formänderung und ihre gegenseitige Abhängigkeit gegeben sein.

460. Die Tangente einer Fläche wird, wie bei den Kurven, durch einen Grenzübergang definiert, indem man zunächst eine Gerade durch zwei getrennte Punkte der Fläche legt und diese dann sich gegenseitig nähern und schließlich zusammenfallen läßt. Zieht man auf einer Fläche irgend eine Kurve, so ist jede ihrer Tangenten auch Tangente der Fläche und enthält zwei unendlich nahe Punkte derselben. In jedem Punkte P einer Fläche giebt es unendlich viele Tangenten, die im allgemeinen in einer Ebene — der Tangentialebene der Fläche in P — liegen. Zieht man nämlich irgend zwei Tangenten t_1, t_2 im Punkte P der Fläche, so schneidet die Ebene t_1t_2 die Fläche in einer Kurve, die in P einen Doppelpunkt besitzt, da sowohl t_1 als t_2 mit der Schnittkurve im Punkte P zwei unendlich nahe Punkte gemein haben. Jede Gerade der Ebene t_1t_2 durch den Punkt P hat mit der Kurve und sonach mit der Fläche zwei zusammenfallende Punkte gemein, d. h. sie ist Tangente der Fläche; hiermit ist aber unsere Behauptung erwiesen. Es kann allerdings in einzelnen Punkten der Fläche vorkommen, daß jede Gerade durch ihn die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet; ein solcher Punkt heißt dann Knotenpunkt unserer Fläche, jede Ebene durch ihn schneidet eine Kurve aus, die in ihm einen Doppelpunkt besitzt. Denn, giebt es eine Gerade t_3 durch P, die dort die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet und nicht in der Ebene t_1t_2 liegt, so enthält jede Ebene durch t_3 außer t_3 noch eine weitere Tangente der Fläche im Punkte P und damit unendlich viele Tangenten.

461. Daß die Tangenten in einem Punkte P einer Fläche im allgemeinen in einer Ebene liegen, kann noch klarer durch folgende Überlegung eingesehen werden, die an die obige Definition der Fläche

anknüpft. Wir gehen zu diesem Zwecke von dem Kurvensysteme aus, durch das die Fläche erzeugt worden ist, und betrachten die durch P verlaufende Kurve k des Systems und ihre Nachbarkurve l. Wir wählen dann auf l zwei unendlich nahe Punkte A und B, deren Entfernung von P ebenfalls unendlich klein ist, so daß das Dreieck APB unendlich klein ist, aber endliche Winkel zeigt. Teilen wir jetzt den Kurvenbogen AB durch Punkte $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$ — wo die Zahl n über jede Grenze wachsen mag — so sind die Geraden $PC_1, PC_2 \ldots PC_n$ Tangenten unserer Fläche; diese schließen aber mit der Ebene APB unendlich kleine Winkel ein, können also als in dieser Ebene liegend angesehen werden. Daß eine Gerade PC_i mit der genannten Ebene einen unendlich kleinen Winkel einschließt, folgt daraus, daß die Entfernung des Punktes C_i von der Sehne AB, und damit auch von der Ebene APB, unendlich klein von der 2. Ordnung ist, wenn AB und damit PA, PB und PC_i unendlich klein von der 1. Ordnung ist.

462. Die Senkrechte im Berührungspunkte P der Tangentialebene heißt die Flächennormale im Punkte P; die Ebenen durch diese Normale liefern die Normalschnitte der Fläche. Die Krümmung kann nun für alle Normalschnitte den gleichen Sinn haben, d. h. ihre Krümmungsradien, die ja in die Normale fallen, können alle von P aus gleich gerichtet sein; dann liegt die Fläche in der Umgebung von P ganz auf der einen Seite der Tangentialebene und heißt dort elliptisch gekrümmt. Die Tangentialebene schneidet demnach die Fläche in einer Kurve, die P zum isolierten Doppelpunkt hat; das einfachste Beispiel bildet die Kugel.

Die Krümmung kann aber auch für einen Teil der Normalschnitte im Punkte P den entgegengesetzten Sinn haben, wie für den andern Teil; die Normalschnitte berühren dann die Tangentialebene im Punkte P von verschiedenen Seiten. Die Fläche liegt in der Umgebung von P auf beiden Seiten der Tangentialebene und heißt dort hyperbolisch gekrümmt. Die Tangentialebene schneidet die Fläche in einer Kurve, die in P einen Doppelpunkt mit reellen Ästen hat. Den Übergang von einem Teil der Normalschnitte zum andern bilden die beiden Normalschnitte mit der Krümmung Null, die also P zum Wendepunkt haben. Die beiden eigentlichen Tangenten der in der Tangentialebene liegenden Schnittkurve, die die beiden reellen Kurvenäste im Doppelpunkte P berühren, haben nämlich mit ihr — wie der Übergang zeigt — drei zusammenfallende Punkte gemein; somit haben sie auch mit der Fläche und mit dem zugehörigen

Normalschnitt drei zusammenfallende Punkte gemein; diese Geraden sind demnach Wendetangenten der sie enthaltenden Normalschnitte und werden als Haupttangenten der Fläche im Punkte P bezeichnet.

463. Schneidet die Tangentialebene in einem Punkte P die Fläche in einer Kurve mit einer Spitze in P, so heißt die Fläche in P parabolisch gekrümmt. Alle Normalschnitte in P berühren die Tangentialebene von der nämlichen Seite, nur ein Normalschnitt hat den Punkt P zum Wendepunkt, da es nur eine eigentliche Tangente in der Spitze giebt. In einem Punkte parabolischer Krümmung fallen hiernach die beiden Haupttangenten zusammen. Die Fläche liegt in der Umgebung von P auf einer Seite der Tangentialebene bis auf eine zugespitzte Partie, die von den beiden in der Spitze zusammenlaufenden Kurvenästen begrenzt wird.

Im allgemeinen bilden auf einer Fläche die Punkte parabolischer Krümmung eine Raumkurve, die allerdings in mehrere Teile zerfallen kann. Die Kurve parabolischer Krümmung trennt die elliptisch gekrümmten und die hyperbolisch gekrümmten Flächenteile.

Die zugleich der Fläche angehörigen Elemente der Haupttangenten in benachbarten Flächenpunkten lassen sich stetig aneinanderreihen und erzeugen so Kurven auf der Fläche, die man als Haupttangentenkurven bezeichnet. Reelle Kurven dieser Art existieren nur auf den hyperbolisch gekrümmten Teilen einer Fläche und, wo sie an die Kurve parabolischer Krümmung herantreten, kehren sie unter Bildung einer Spitze wieder um. Bei den abwickelbaren Flächen und bei den Kegel- und Cylinderflächen ist die Krümmung in jedem Punkte parabolisch. Denn jede Tangentialebene berührt längs einer Geraden, der Erzeugenden; für jeden Punkt P derselben fallen die beiden Haupttangenten zusammen, nämlich in die Erzeugende selbst. In der nächsten Umgebung jedes solchen Punktes liegt die Fläche ganz auf einer Seite ihrer Tangentialebene und reicht nur längs der Erzeugenden an sie heran.

464. Die Tangenten, die man von einem Raumpunkte Q aus an eine Fläche legen kann, bilden eine Kegelfläche (vergl. 474), d. h. ihre Berührungspunkte liegen auf einer Kurve der Fläche. Die Tangentialebenen in den Punkten dieser Kurve gehen durch Q und umhüllen jene Kegelfläche. In der That, berührt eine Tangentialebene durch Q die Fläche in einem Punkte P, so ist dieser für ihre Schnittkurve ein Doppelpunkt und die Verbindungslinie QP vertritt zwei zusammenfallende Tangenten, wie der Grenzprozeß unmittelbar erkennen läßt. Denn dreht man die Tangentialebene um QP um einen unendlich

kleinen Winkel, so liefert sie in ihrer neuen Lage eine Schnittkurve ohne Doppelpunkt, die sich von der Schnittkurve mit Doppelpunkt in der Tangentialebene nur unendlich wenig unterscheiden kann, nur hat sich der Doppelpunkt aufgelöst. Die entstehende neue Kurve muß dann die Tangente QP und eine zweite Tangente aus Q aufweisen, die ihr unendlich nahe ist. Die Figuren zeigen diese Übergänge beim isolierten Doppelpunkt zu einem kleinen Oval, beim Doppelpunkt mit sich schneidenden Ästen zu zwei getrennten Ästen, bei der Spitze zu einem Kurvenast und einem kleinen Oval.

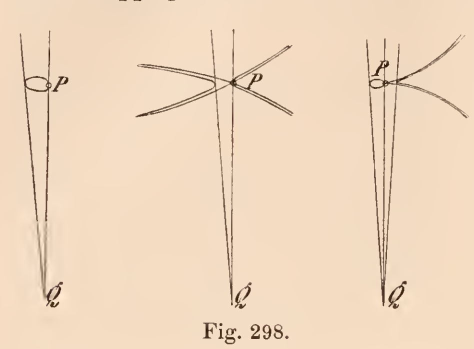


Fig. 298.

SIEBENTES KAPITEL.

Kugel, Cylinder, Kegel.

Kugel, Cylinder und Kegel, ihre Projektionen, Eigen- und Schlagschatten.

465. Von der Darstellung einer krummen Oberfläche gilt ganz das Gleiche, was schon früher von der Darstellung einer Ebene oder eines Stückes einer Ebene gesagt wurde. Es kann nicht unmittelbar entschieden und auch nicht direkt aus der Zeichnung entnommen werden, welches die beiden Projektionen eines durch gewisse Angaben bestimmten Punktes der Oberfläche sind. Vielmehr muß das Entstehungsgesetz der Oberfläche in einer Form bekannt sein, die uns gestattet, ein oder mehrere Kurvensysteme derselben in ihren beiden Projektionen zu zeichnen. Ist dann die eine Projektion eines Punktes der Fläche gegeben, so zeichnet man eine durch ihn verlaufende erzeugende Kurve in der gleichnamigen Projektion, sodann ihre andere Projektion, worauf sich auf dieser auch die andere Projektion des gemeinten Punktes ergiebt.

Ist die Oberfläche durch eine Randkurve begrenzt, so begrenzen deren Projektionen auch die Projektionen der Oberfläche.

466. Wir betrachten zuerst das Verhalten einer krummen Oberfläche gegen die projizierenden Strahlen, indem wir uns auf eine einzige Projektionsebene und das zugehörige System paralleler projizierender Strahlen beschränken. Wir nehmen an, daß die Oberfläche aus einem einzigen Stück bestehe, da wir für jeden ihrer Bestandteile die gleiche Betrachtung anstellen können. Trifft jeder projizierende Strahl die Fläche entweder nur in einem Punkte oder gar nicht, so ist sie in ihrer ganzen Ausdehnung sichtbar; der Flächenrand scheidet die Strahlen, welche die Fläche treffen, von denen, die sie nicht treffen. Giebt es projizierende Strahlen, die die Fläche in mehreren Punkten schneiden, so ist sie teilweise sichtbar und teilweise unsichtbar. Auf dem sichtbaren Teil der Fläche liegt der erste Durchstoßpunkt S_1 des Strahles, wenn wir ihn in der Projektionsrichtung durchlaufen, der zweite S_2 auf dem unsichtbaren Teile. Die nächste Umgebung von S_1 wird sichtbar, die von S_2 unsichtbar sein, beide Bereiche können nun weiter und weiter ausgedehnt werden, wobei ihre Randkurven immer von dem nämlichen projizierenden Cylinder ausgeschnitten werden mögen. Die beiden Bereiche, in denen S_1 resp. S_2 liegen, werden im allgemeinen, wenn so weit wie möglich ausgedehnt, längs einer Kurve aneinander grenzen; diese muß man überschreiten, um aus dem sichtbaren Bereich in den unsichtbaren zu gelangen und umgekehrt. Der projizierende Strahl durch jeden Punkt dieser Kurve muß dort die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden oder tangieren. Es kann dieses entweder so geschehen, daß der Bereich, in dem S_1 liegt, den andern längs einer Kurve durchdringt, dann vertauschen sich Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit der beiden Bereiche zu beiden Seiten der Durchdringungskurve — die man als Doppelkurve bezeichnet. Oder die Kurve, die den sichtbaren Teil der Fläche von dem unsichtbaren scheidet, hat die Eigenschaft, daß die projizierenden Strahlen durch ihre Punkte die Fläche berühren; diese Strahlen bilden dann eine Cylinderfläche, welche unsere Oberfläche längs jener Kurve berührt, aber außerdem noch durchdringen kann. Ganz ähnliche Resultate gewinnt man, wenn man den zweiten und dritten Durchstoßpunkt S_2 und S_3 eines projizierenden Strahles mit der Oberfläche und die sie einschließenden Bereiche betrachtet, nur kann man diese Bereiche nicht mehr als sichtbare und unsichtbare unterscheiden. Man kann demgemäß den Satz aussprechen: Alle projizierenden Strahlen, die eine Oberfläche berühren,

bilden eine Cylinderfläche, welche jene längs einer Kurve berührt (die mehrteilig sein kann); diese Kurve auf der Oberfläche heißt der wahre Umriß und ihre Projektion der scheinbare Umriß. In dem wahren Umriß grenzen zwei Flächengebiete aneinander, deren Projektionen aufeinander fallen; jede Kurve der Oberfläche, die den wahren Umriß schneidet, projiziert sich als Kurve, die den scheinbaren Umriß berührt. Im allgemeinen wird es schwierig sein, auf einer Fläche hiernach den wahren Umriß zu bestimmen, d. h. Punkte zu finden, in denen eine Tangente parallel zur Projektionsrichtung existiert. Nun liegen aber alle Tangenten in einem gewöhnlichen Punkte einer Oberfläche nach 461 in einer Ebene — seiner Tangentialebene, es läßt sich also auch die Definition geben: Auf dem wahren Umriß liegen alle Punkte, deren Tangentialebenen der Projektionsrichtung parallel sind. Hierauf werden wir in den meisten Fällen die Konstruktion beliebig vieler Punkte des Umrisses gründen können.

467. Setzen wir an die Stelle der projizierenden Strahlen parallele Lichtstrahlen, so wird das bisher Gesagte zu Recht bestehen bleiben, wenn wir einige einfache Abänderungen im Ausdruck treffen. Alle die Fläche berührenden Lichtstrahlen bilden einen Cylinder; die Kurve, längs der er die Fläche berührt, heißt Eigenschattengrenze, Lichtgrenze oder Grenzkurve. Die Tangentialebenen in den Punkten der Grenzkurve sind den Lichtstrahlen parallel. Die Grenzkurve trennt immer zwei Flächenteile, von denen der eine im Eigenschatten, der andere entweder im Lichte oder im Schlagschatten liegt. Denn von den Durchstoßpunkten eines Lichtstrahles mit einer Oberfläche liegt der erste im Licht, der zweite, vierte u. s. w. im Eigenschatten, der dritte, fünfte u. s. w. im Schlagschatten.

468. Eine Kugel, die Lichtgrenze auf ihr sowie ihren Schlagschätten zu zeichnen. Da jede Tangentialebene einer Kugel auf dem Radius ihres Berührungspunktes senkrecht steht und also auch gleiches für jede Tangente gilt, so erkennt man, daß der wahre Umriß ein größter Kreis ist, dessen Ebene den Kugelmittelpunkt enthält und auf der Projektionsrichtung normal, d. h. der bezüglichen Projektionsebene parallel ist. Ganz ebenso bildet die Lichtgrenze einen größten Kreis, dessen Ebene zur Lichtstrahlrichtung senkrecht ist.

Sind also M', M'' die Projektionen des Kugelmittelpunktes, so sind die scheinbaren Umrisse k' und i'' Kreise, deren Radien dem

Kugelradius r gleich sind und die M' resp. M'' zu Mittelpunkten haben. Die anderen Projektionen dieser Kreise sind parallele Linien zur x-Achse durch M'' resp. M' (Fig. 299).

Die Lichtgrenze u ist ein größter Kreis, dessen Ebene Γ senkrecht zum Lichtstrahl l ist; ihre Projektionen u' und u'' sind Ellipsen. Sind AB und CD zwei Durchmesser des Kreises u und ist $AB \parallel \Pi_1$ eine Hauptlinie, $CD \perp AB$ eine Falllinie von Γ, so ist $A'B'$

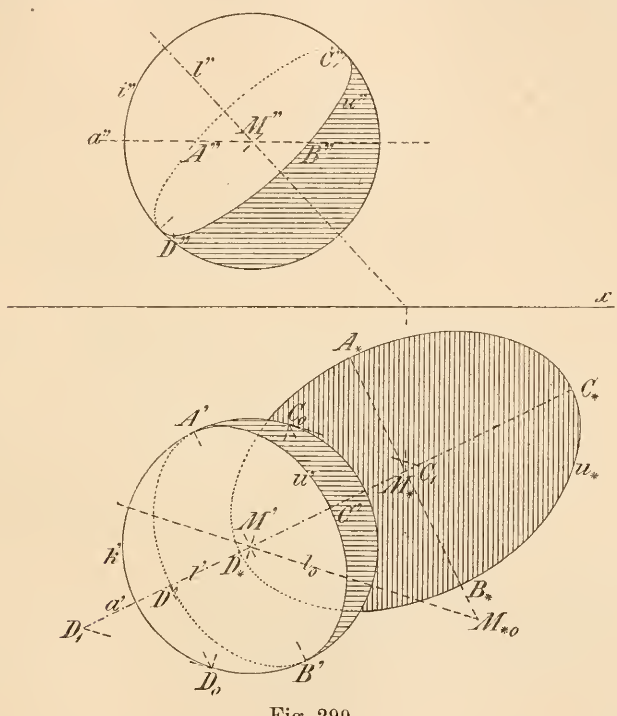


Fig. 299.

($\#\, AB$) die große und $C'D'$ ($\perp A'B'$) die kleine Achse der Ellipse u'. Legt man durch M den Lichtstrahl l und durch ihn die erste projizierende Ebene, so schneidet diese auf Γ die Gerade CD aus. Diese Ebene dreht man um die Gerade a parallel zu Π_1, so nimmt M_* die Lage M_{*0} $\left(M_* M_{*0} = (M'' \dashv x)\right)$, also l die Lage $l_0 = M' M_{*0}$ und CD die Lage $C_0 D_0 \perp l_0$ an. Durch Zurückdrehen findet man dann $C'D'$ (wo $C_0 C' \perp a'$). Ganz in der gleichen Weise kann man die Achsen der Ellipse u'' finden. Die Aufrißprojektionen A, B, C, D sind offenbar A'', B'', C'', D'', wo $(C'' \dashv a'') = C_0 C'$ ist.

Der Schlagschatten u_* von u auf die Horizontalebene ist natürlich wieder eine Ellipse; die Schlagschatten der rechtwinkligen

Durchmesser AB und CD von u, nämlich A_*B_* und C_*D_*, stehen aufeinander senkrecht, bilden also die Achsen der Ellipse u_*. Da $AB \parallel \Pi_1$, so ist $A_*B_* \#\!\# A'B'$; um C_*D_* zu finden, suchen wir zuerst den Schatten von CD auf eine Horizontalebene durch den Kugelmittelpunkt. Die Lichtstrahlen durch C und D liegen aber mit l in einer Vertikalebene, die wir bereits oben um eine Achse a parallel zu Π_1 gedreht haben. Bei dieser Drehung werden die genannten Lichtstrahlen parallel zu l_0 und ihre Schnittpunkte C_1, D_1 mit a sind zugleich die Schnittpunkte jener Lichtstrahlen durch C und D mit der horizontalen Hilfsebene, da sie sich bei der Drehung ja nicht ändern. Nun hat man nur noch $M_*C_* = M_*D_* = M'C_1 = M'D_1$ zu machen. Man kann die Punkte C', D', C_*, D_* auch dadurch bestimmen, daß man die erste projizierende Ebene von l um die vertikale Achse durch M zum Aufriß parallel dreht. Dann erscheint im Aufriß der Durchmesser CD normal zum mitgedrehten Lichtstrahl und kann samt seinem Schatten leicht gezeichnet werden. Schließlich hat man wieder zurückzudrehen.

Fällt ein Teil des Schlagschattens in den Aufriß, so kann man entweder wie vorher die Achsen der Schlagschattenellipse im Aufriß bestimmen, oder man konstruiert zu einzelnen Punkten den Aufrißschatten aus dem Grundrißschatten. Sind P_* und P^* die Schatten von P im Grund- und Aufriß, und projiziert man sie auf die x-Achse, so liegt der erste mit der Projektion des zweiten auf einer Parallelen zu l' und der zweite mit der Projektion des ersten auf einer Parallelen zu l''.

469. Eine Cylinderfläche entsteht, wenn eine Gerade parallel mit sich selbst so fortbewegt wird, daß sie dabei ständig eine feste Kurve, die Leitkurve oder Grundkurve, schneidet. Die einzelnen Lagen der bewegten Geraden heißen Mantellinien oder Erzeugende. Die erzeugte Fläche wird von jeder Ebene, die den Mantellinien parallel ist, in einer Anzahl Mantellinien geschnitten. Man kann diese konstruieren, indem man die Cylinderfläche und die Ebene mit einer Hilfsebene schneidet; Spurkurve und Spurgerade in dieser schneiden sich dann in Punkten der gesuchten Mantellinien. Hält man eine Mantellinie fest und dreht die Ebene um sie, so bewegen sich deren weitere Schnittgeraden. Setzt man die Drehung fort, bis die erwähnte Spurgerade der Ebene die Spurkurve der Cylinderfläche berührt, so fallen zwei Schnittlinien zusammen, die Ebene berührt in dieser Lage die Fläche längs einer Mantellinie. In der That tangiert jede Gerade dieser Ebene die Cylinderfläche, da zwei ihrer Schnittpunkte auf jener Mantellinie zusammen-

fallen. Kennt man von einer Cylinderfläche irgend eine, alle Mantellinien schneidende, ebene oder Raumkurve und die Richtung ihrer Mantellinien, so ist sie bestimmt. Jene Kurve kann nämlich als Leitkurve dienen.

470. Der wahre Umriß einer Cylinderfläche besteht aus einer Anzahl Mantellinien, da in allen Punkten einer solchen die nämliche Tangentialebene berührt. Sind m', m'' die Projektionen

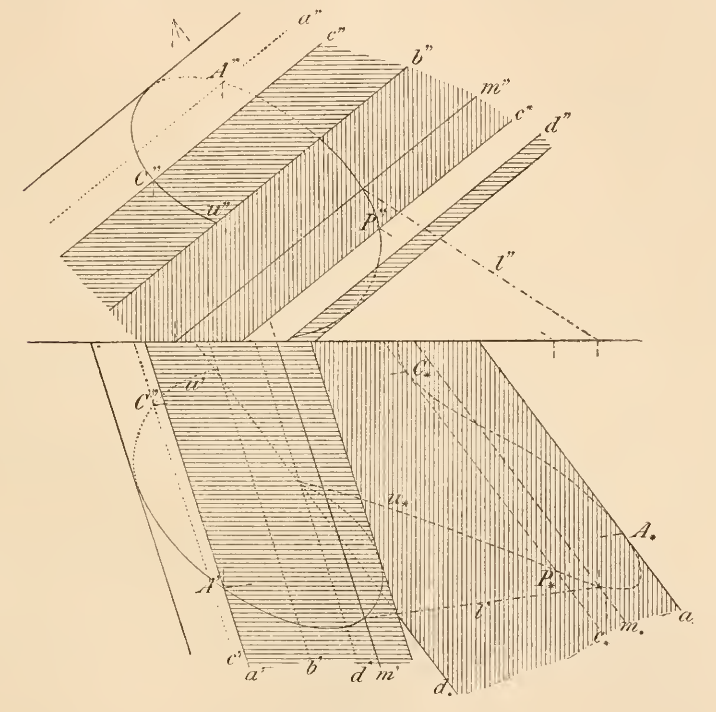


Fig. 300.

einer Mantellinie und u', u'' die einer beliebigen Kurve der Cylinderfläche, so bestehen die scheinbaren Umrisse aus denjenigen Tangenten von u' resp. u'', die zu m' resp. m'' parallel laufen. Auch die Lichtgrenze besteht aus einer Anzahl Mantellinien, längs deren die Tangentialebenen parallel zum Lichtstrahl sind. Ist u_* und m_* der Horizontalschatten von u und m (Fig. 300) und zieht man an u_* Tangenten parallel zum m_*, so bilden diese die Horizontalspuren von Ebenen, die zu den Lichtstrahlen parallel sind und die Cylinderfläche tangieren. Ist a_* eine solche Tangente und A_* ihr Berührungspunkt mit u_*, so lege man durch A_* einen Lichtstrahl, der u in

einem Punkte A schneidet; die Mantellinie a durch A bildet dann einen Teil der Lichtgrenze, trennt also ein im Eigenschatten liegendes Flächengebiet von einem andern, das sich im Licht oder im Schlagschatten befindet. Ebenso findet man die Lichtgrenze c, ihr Schlagschatten c_* kommt indessen auf der Horizontalebene nicht wirklich zu stande, da er in das Innere des Schlagschattens des Cylinders fällt. Es giebt deshalb eine zweite Mantellinie, deren Schatten ebenfalls nach c_* fällt, sie geht durch den Punkt P von u, dessen Schatten $P_* = c_* \times u_*$ ist, und empfängt von c Schlagschatten.

Das Verfahren läßt sich vereinfachen, wenn die Kurve u auf der Cylinderfläche in einer Ebene E liegt. Dann bestimme man den Schatten von m auf E, etwa m^*, und lege an u Tangenten parallel zu m^*; die Mantellinien durch ihre Berührungspunkte bilden die Lichtgrenze. Wirft eine Mantellinie Schlagschatten auf einen Teil der Cylinderfläche, so ist dieser wieder eine Mantellinie; beide besitzen in der Ebene E Spurpunkte auf u, deren Verbindungslinie zu m^* parallel ist.

471. Nachdem wir hiermit die allgemeinen Methoden kennen gelernt haben, wollen wir dieselben auf einzelne Fälle anwenden. Wir werden dabei annehmen, daß die Cylinderfläche von zwei ebenen parallelen Schnitten begrenzt sei und sie kurz als Cylinder bezeichnen. Wie man solche ebene Schnitte findet, davon wird weiterhin noch die Rede sein.

Sei die Grundebene E und in ihr als Grundkurve eines Cylinders eine Ellipse u durch ihre erste Projektion u', sowie die Richtung m seiner Mantellinien gegeben; es sollen die Projektionen des Cylinders, sein Eigen- und Schlagschatten gefunden werden.

Seien e_1, e_2 die Spuren von E, seien ferner M' der Mittelpunkt und $A'B'$, $C'D'$ zwei konjugierte Durchmesser von u' und bilde MN (als Parallele zu den Mantellinien) die Cylinderachse (Fig. 301). Man findet dann sofort die konjugierten Durchmesser $A''B''$, $C''D''$ der Ellipse u'' (denn AB, CD liegen in E) und kann daraus die Ellipsen u' und u'' selbst zeichnen. Der scheinbare Umriß in Π_1 wird von den beiden Tangenten von u' gebildet, die zu $M'N'$ parallel laufen; ihre Berührungspunkte liegen aber auf dem Durchmesser $J'K'$, der zu $M'N'$ konjugiert ist. Zeichnet man demnach in A' die Tangente und Normale von u' und bestimmt auf der letzteren den Punkt P_0, so daß $P_0A' = M'C' = M'D'$ wird, so ist der Kreis um P_0 mit dem Radius P_0A' zu u' affin und die gemeinsame Tangente die Affinitäts-

achse, wodurch sich unmittelbar zu $M'N'$ der konjugierte Durchmesser $J'K'$ der Lage und Länge nach ergiebt. Ganz ebenso bestimmt sich der scheinbare Umriß in Π_2. Um die Mantellinien der Lichtgrenze und ihre Spurpunkte F, G auf u in E zu finden, suchen wir zunächst den Schatten N^* von N auf E; F' und G' sind dann die Berührungspunkte der beiden Tangenten von u', die zu $M'N^{*\prime}$

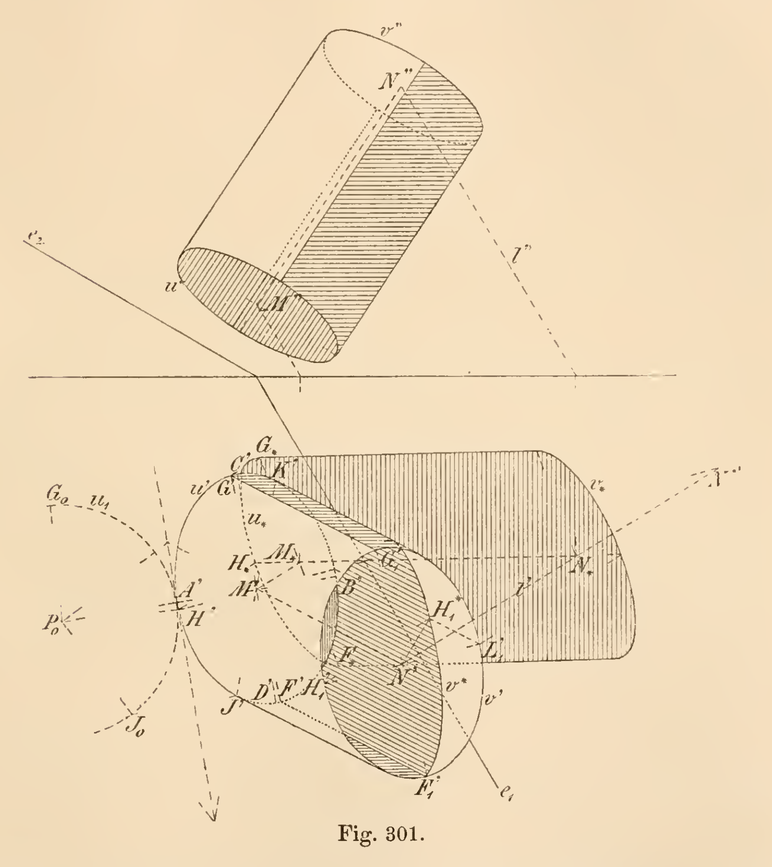


Fig. 301.

parallel sind, sie liegen also auf dem hierzu konjugierten Durchmesser.

Der Schlagschatten des Cylinders auf die Horizontalebene besteht aus zwei Halbellipsen und ihren parallelen gemeinsamen Tangenten. Konstruiert man den Schatten $F_*M_*G_*H_*N_*$ von $FMGHN$, so sind F_*M_* und H_*M_* konjugierte Halbmesser der Schattenellipse u_* und die Tangenten in F_* und G_* an u_*, die parallel zu $H_*M_*N_*$ sind, bilden die Schlagschattengrenze. Da die Ellipsen mit den

Mittelpunkten M und N kongruent und parallel sind, so sind auch ihre Schatten kongruent; u' und u_* sind affin, e_1 ist die Affinitätsachse.

Wäre die Grundkurve u des Cylinders keine Ellipse, sondern eine beliebige Kurve, so wäre die Konstruktion genau dieselbe geblieben, nur hätten wir die Tangenten und ihre Berührungspunkte nach den im vorigen Kapitel angeführten Methoden bestimmen müssen.

472. Denken wir uns den Cylinder hohl, so wird ein Teil seines oberen Randes v Schatten auf die innere Cylinderfläche werfen. Empfängt eine Mantellinie den Schatten einer anderen, so muß sie mit ihr in einer Parallelebene zum Lichtstrahle liegen, d. h. in einer Ebene, die zu MNN^* parallel ist. MN^* ist aber die Spur dieser Ebene in E, jene Parallelebene besitzt also in E und in der Ebene der Ellipse v Spuren, die zu MN^* parallel laufen. Ist demnach die Sehne $Q'R'$ von v' parallel zu $M'N^{*\prime}$, so wirft die Mantellinie durch Q und damit Q selbst seinen Schatten auf die Mantellinie durch R, wodurch sich Q^* sofort ergiebt, da $Q'Q^* \parallel l'$ ist. Der Schlagschatten v^* von v auf dem Cylinder verläuft offenbar von F_1 nach G_1 und man kann in der geschilderten Weise beliebig viele Punkte von ihm zeichnen. Es bildet indes v^* eine Halbellipse, von der $F_1'N' = N'G_1'$ und $H_1{}^*N'$ ein Paar konjugierte Halbmesser sind ($H_1'L_1' \parallel M'N^{*\prime}$ und $H_1'H_1{}^* \parallel l'$). In 506 wird nämlich gezeigt, daß zwei Cylinder, die sich in einer Ellipse durchschneiden, noch eine zweite Ellipse gemein haben; die beiden Ellipsen besitzen einen gemeinsamen Durchmesser und sind affin. Durch v geht nun außer dem gegebenen Cylinder noch ein Cylinder, dessen Mantellinien den Lichtstrahlen parallel laufen, sie durchdringen sich — abgesehen von v — noch in der Schlagschattenellipse v^*.

473. Wir wollen uns noch die Frage nach den Tangentialebenen eines Cylinders aus einem gegebenen Punkte vorlegen. Die Tangentialebene in einem Punkte des Cylinders berührt ihn längs der Mantellinie, die jenen Punkt enthält; alle Tangentialebenen sind also den Mantellinien parallel. Legt man demnach durch den gegebenen Punkt eine Parallele zu den Mantellinien, so müssen die gesuchten Tangentialebenen diese Parallele enthalten. Die Spuren der Tangentialebenen in E sind also die von dem Schnittpunkt der Parallelen mit E an u gelegten Tangenten; dadurch ergeben sich denn auch die Berührungslinien jener Ebenen. Würde man sich den gegebenen Punkt als Lichtquelle vorstellen, so würden die Berührungslinien die Lichtgrenzen auf dem Cylinder bedeuten. In der Fig. 301 ist die letzte Konstruktion nicht durchgeführt.

474. Eine Kegelfläche entsteht durch Bewegung einer Geraden, von der ein Punkt festgehalten wird und die an einer festen Leitkurve oder Grundkurve hingleitet. Die einzelnen Lagen der bewegten Geraden heißen Mantellinien oder Erzeugende, der gemeinsame feste Punkt die Spitze oder der Scheitel der Kegelfläche. Die erzeugte Fläche wird von jeder Ebene durch ihre Spitze in einer Anzahl Mantellinien geschnitten, die man dadurch konstruiert, daß man Kegelfläche und Ebene mit einer Hilfsebene schneidet; Spurkurve und Spurgerade schneiden sich dann in den Spurpunkten der gesuchten Mantellinien. Hält man eine solche fest und dreht die Ebene um sie, so bewegen sich die andern Schnittgeraden. Setzt man die Drehung fort bis die Spurgerade der Ebene die Spurkurve der Kegelfläche berührt, so fallen zwei Mantellinien zusammen; die Ebene berührt in dieser Lage die Fläche längs dieser Mantellinie. In der That tangiert jede Gerade dieser Ebene die Kegelfläche, da zwei ihrer Schnittpunkte auf jener Mantellinie zusammenfallen.

Kennt man von einer Kegelfläche die Spitze und irgend eine ebene oder Raumkurve, die alle Erzeugenden schneidet, so ist sie bestimmt.

475. Der wahre Umriß einer Kegelfläche besteht aus einer Anzahl Mantellinien, da in den Punkten einer solchen die gleiche Tangentialebene berührt. Sind S', S'' die Projektionen der Spitze und u', u'' die einer beliebigen Kurve der Kegelfläche (die alle Mantellinien schneidet), so bestehen die scheinbaren Umrisse aus den von S' resp. S'' an die Kurve u' resp. u'' gelegten Tangenten. Auch die Lichtgrenze besteht aus einer Anzahl Mantellinien; längs derselben sind die Tangentialebenen parallel zum Lichtstrahl. Sind S_* und u_* die Horizontalschatten von S und u, so sind die Tangenten von S_* an u_* die Horizontalspuren von Ebenen, die den Lichtstrahl SS_* durch die Kegelspitze enthalten und die Fläche tangieren. Ist a_* eine solche Tangente und A_* ihr Berührungspunkt auf u_*, so lege man durch A_* einen Lichtstrahl, der u in einem Punkte A schneidet; die Mantellinie SA bildet dann einen Teil der Lichtgrenze (Fig. 302).

Liegt die Kurve u der Kegelfläche in einer Ebene E, so verfährt man am bequemsten in folgender Weise. Man suche den Schatten von S auf E, etwa S^*, und lege von S^* Tangenten an u, dann bilden die Mantellinien durch ihre Berührungspunkte die Lichtgrenze. Wirft eine Mantellinie Schlagschatten auf einen Teil der Kegelfläche, so ist ihr Schatten wieder eine Mantellinie; beide

besitzen in der Ebene E Spurpunkte auf u, deren Verbindungslinie durch S^* hindurchgeht (ihre Schatten in E decken sich).

Eine Kegelfläche, die durch die Spitze und einen ebenen Schnitt als Grundkurve begrenzt wird, heißt kurz Kegel. In 92—94 und 248—252 sind ausführlich die Eigenschaften der geraden

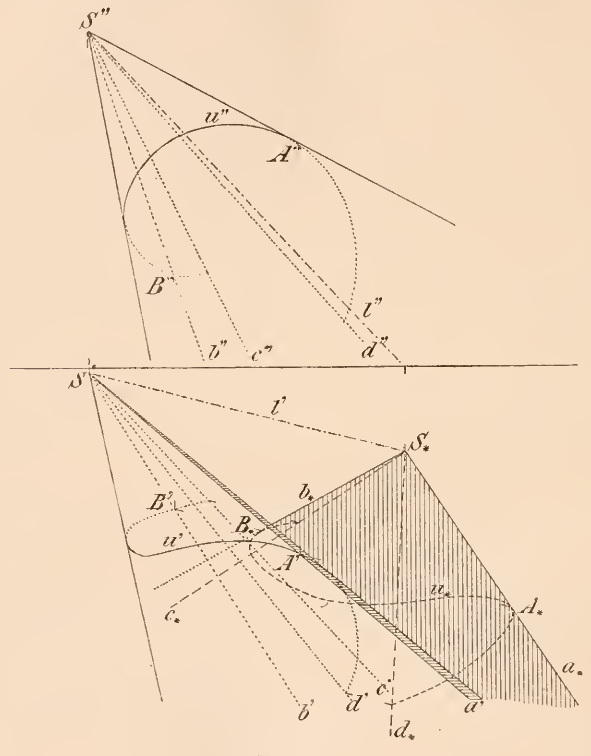


Fig. 302.

und schiefen Kreiskegel behandelt worden, auf die hier nochmals verwiesen sein mag.

476. Einen geraden Kreiskegel zu zeichnen, wenn die Basisebene E, seine Höhe h, sowie Mittelpunkt O und Radius r seines Grundkreises u gegeben sind; Eigen- und Schlagschatten zu bestimmen (Fig. 303).

Man legt durch O eine Hilfsebene Π_3 senkrecht zu e_1 und zeichnet in ihr einen Seitenriß. Zunächst ergiebt sich e_3 und O''', dann $O'''S''' \perp e_3$ und $= h$ und als Seitenriß des Kegels das Dreieck $A'''B'''S'''(A'''B''' = 2\,r)$. Hieraus findet man unmittelbar S', S'' (in der Figur liegt S in Π_1) und die Achsen $A'B'$ und $C'D' = 2r$ von u';

die beiden Tangenten von S' an u' bilden dann den scheinbaren Umriß für die erste Projektion. Um die Berührungspunkte $J'K'$ dieser Tangenten zu konstruieren, lege man u um e_1 nach u_0 nieder und benutze die Affinität von u_0 und u'. Sucht man zu S' den

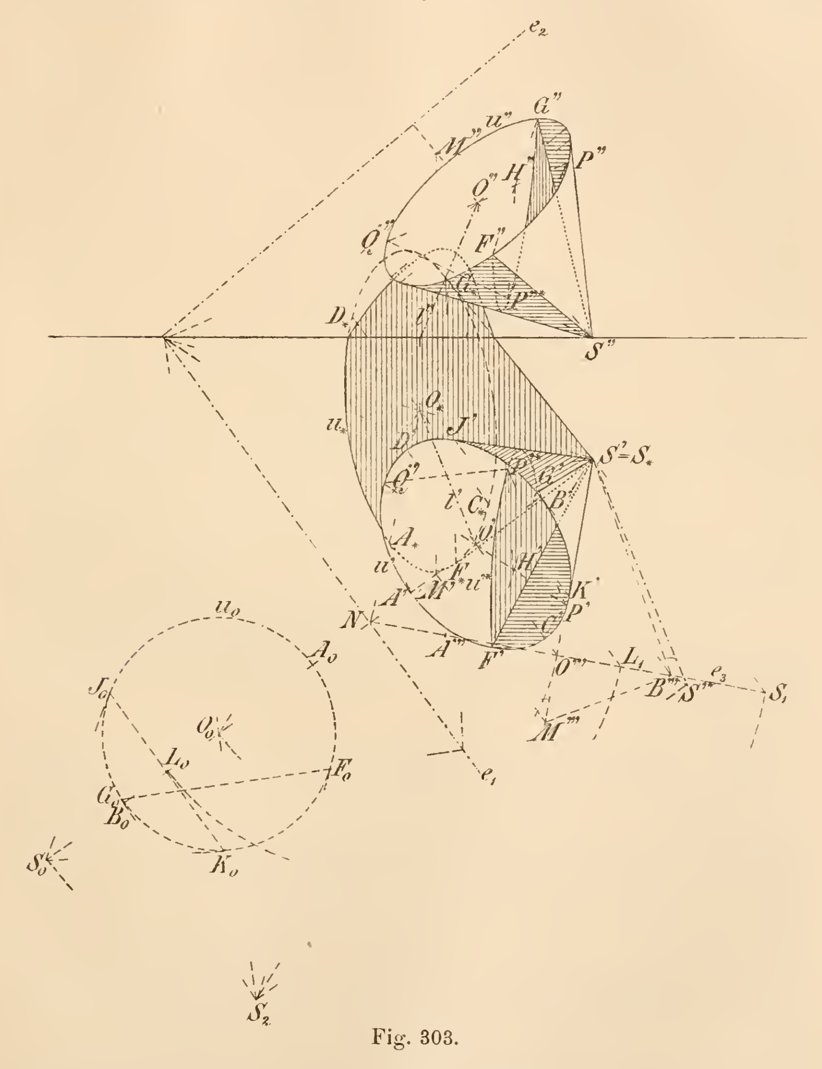


Fig. 303.

affinen Punkt S_0 ($S'S_1 \parallel e_1$, $S_1N = S_0N$), zieht die Kreistangenten S_0J_0 und S_0K_0, so sind die affinen Linien $S'J'$, $S'K'$ die gesuchten Umrißlinien ($L_0N = NL_1$, $J'K' = J_0K_0$ durch L_1). Im Aufriß kann man ganz analog verfahren. Man kann die Tangenten $S'J'$ und $S'K'$

auch noch einfacher durch folgende Überlegung gewinnen. Man denke sich eine Kugel, die den Kegelmantel längs u berührt; der Seitenriß ihres Mittelpunktes M ist $M'''(M'''B''' \perp B'''S''')$ und ihr Radius $= M'''B'''$. Grundriß und Aufriß der Kugel sind Kreise mit dem gleichen Radius und den Mittelpunkten M' resp. M''. Die Tangenten an diese Kreise aus den Punkten S' bezw. S'' und ihre Berührungspunkte fallen zusammen mit den gesuchten Tangenten an u' bezw. u'' und ihren Berührungspunkten. In der That berührt jede Ebene, die den Kegel längs einer Mantellinie berührt, die Hilfskugel in dem auf u gelegenen Endpunkte der Mantellinie. Ist diese Tangentialebene zu einer Projektionsebene senkrecht, so liefert sie eine Umrißlinie des Kegels und einen Punkt auf dem Kugelumriß, der zugleich dem Kreise u angehört, was unsere Behauptung beweist.

Um den Horizontalschatten des Kegels zu konstruieren, zeichnen wir zunächst den Schatten $A_*B_*C_*D_*S_*(C_*D_* = C'D')$; dann sind A_*B_* und C_*D_* zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse u_* und die Tangenten von S_* an u_* bilden die Grenzlinien des Schlagschattens. Um sie zu zeichnen, benutze man die Affinität von u_0 und u_* (e_1 Affinitätsachse), suche zu S_* den affinen Punkt S_2 und lege an u_0 die Tangenten S_2F_0 und S_2G_0. Bestimmt man zur Berührungssehne F_0G_0 rückwärts die affine Strecke F_*G_*, so ist sie die Berührungssehne der von S_* an u_* gelegten Tangenten. Aber auch u_0 und u' sind affine Kurven (e_1 Affinitätsachse) und die zu F_0G_0 affinen Punkte $F'G'$ von u' ergeben auf dem Kegel die Lichtgrenzen $S'F'$ und $S'G'$, woraus sich dann leicht $S''F''$ und $S''G''$ finden lassen.

477. Nehmen wir an, daß der Kegel hohl sei, so wirft ein Teil des Randes u Schlagschatten auf das Innere des Kegelmantels. Zwei Mantellinien, von denen eine auf die andere Schatten wirft, werfen den gleichen Schatten auf Π_1, man kann also mit Hilfe des Horizontalschattens zu jeder Mantellinie die von ihr Schatten empfangende Mantellinie des Kegels finden, und somit beliebig viele Punkte des Schattens u^* von u auf die Kegelfläche. Noch besser benutzt man, um Punkte dieses Schattens u^* zu konstruieren, den Schatten S^* von S auf E. Empfängt nun eine Mantellinie den Schatten einer andern, so liegen ihre Spurpunkte auf u in E mit S^* in gerader Linie.

Nach 506 durchdringen sich Cylinder- und Kegelfläche, die einen Kegelschnitt gemeinsam haben, noch in einem zweiten; die gemeinsame Sehne beider Kegelschnitte schneidet die Flächen in zwei Punkten, in denen sie die gleiche Tangentialebene aufweisen.

Der Schatten u^* erscheint aber als Schnitt der Kegelfläche mit einem Cylinder, dessen Grundkurve der Kreis u ist und dessen Mantellinien zu den Lichtstrahlen parallel sind. Es ist deshalb u^* ein Kegelschnitt und FG ist die gemeinsame Sehne von u und u^*. Die Kurven u und u^* sind affin, da sie auf dem nämlichen Cylinder liegen, FG ist die Affinitätsachse, P und P^* sind ein Paar affiner Punkte ($P = u \times OS^*$, $PP^* \parallel l$, $S^*P \times SP^* = Q$ liegt auf u). Was nun für u und u^* gesagt wurde, gilt in gleicher Weise für u' und $u^{*\prime}$ (resp. für u'' und $u^{*\prime\prime}$). Die Affinitätsachse ist $F'G'$, ein Paar affiner Punkte sind P' und $P^{*\prime}$; hiernach ist aber die Ellipse $u^{*\prime}$ leicht als affine Kurve zu u' zu zeichnen.

Liegt noch die Frage nach den Tangentialebenen eines Kegels aus einem gegebenen Punkte vor, so bemerkt man zunächst, daß jede solche Ebene längs einer Mantellinie berührt, also durch die Spitze S hindurchgeht. Die gesuchten Tangentialebenen enthalten demnach die Gerade ST, wenn T der gegebene Punkt ist. Ist $U = ST \times \mathsf{E}$, so müssen die Spurlinien unserer Tangentialebenen in E durch U gehen und die Kurve u berühren, sie können mithin gezeichnet werden. In der Figur ist diese Konstruktion nicht durchgeführt.

478. Von einem Kegel ist der Scheitel S und die Grundkurve u bekannt, die eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein kann; es sollen seine Achsen bestimmt werden.

Wir haben im vorausgehenden Kapitel gesehen, daß die Polareigenschaften eines Kegelschnittes bei Centralprojektion sich nicht ändern; hieraus lassen sich unmittelbar die Polareigenschaften des Kegels erschließen. Hat eine Kegelfläche den Scheitel S und die Grundkurve u und stellen A und a irgend einen Pol und seine Polare in Bezug auf u dar, so heißt $SA = a_c$ der Polstrahl der Ebene $Sa = \mathsf{A}$ in Bezug auf die Kegelfläche und umgekehrt heißt A die Polarebene des Strahles a_c. Alle Kegelsehnen (d. h. Strecken, deren Endpunkte auf dem Kegel liegen) werden, falls sie selbst oder ihre Verlängerungen a_c schneiden, durch a_c und A harmonisch geteilt. Speziell werden alle Kegelsehnen, die zu a_c parallel sind, durch A halbiert. Analog werden alle Sehnen, die durch einen Punkt M von a_c gehen und zu A parallel sind, in M halbiert, oder mit andern Worten: die Mittelpunkte aller zu einer Ebene A parallelen Kegelschnitte liegen auf dem zu A gehörigen Polstrahl a_c. Diese Kegelschnitte sind natürlich ähnliche und ähnlich gelegene Kurven und zwar Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln; unter ihnen befindet sich der Ebene durch S entsprechend ein Punkt, eine

doppelte Gerade oder ein Geradenpaar. Steht ein Pohlstrahl auf seiner Polarebene senkrecht, so bildet er eine Achse und seine Polarebene eine Haupt- oder Symmetrieebene des Kegels; letztere halbiert alle zu ihr senkrechte Sehnen, erstere trägt die Mittelpunkte aller zu ihr senkrechten Schnittkurven. Durch jede Kegelachse gehen zwei Hauptebenen, nämlich die Ebenen, welche die Achsen der zu ihr senkrechten Kegelschnitte enthalten; denn sie halbieren die zu ihnen senkrechten Sehnen. Analog liegen in jeder Hauptebene zwei Kegelachsen; sie sind den Achsen der zu ihr parallelen Kegelschnitte parallel. Jeder Kegel besitzt demnach drei zu einander rechtwinklige Achsen, die zu zwei und zwei die drei Hauptebenen bestimmen (vergl. 252). Zunächst haben wir dabei vorausgesetzt, daß immer eine Achse existiert, die weitere Darlegung wird die Richtigkeit dieser Voraussetzung ergeben.

479. Zwei Strahlen durch S, von denen jeder in der Polarebene des anderen liegt, heißen harmonisch oder konjugiert. Zu jedem Strahl durch S giebt es einen harmonischen, rechtwinkligen Strahl, er bildet die Schnittlinie der zu jenem Strahl durch S gelegten Normalebene mit seiner Polarebene. Nur zu den Achsen sind alle Strahlen der zugehörigen Hauptebene rechtwinklig und zugleich harmonisch. Seien nun $\mathsf{\Lambda}$ und M zwei beliebige Ebenen durch den Scheitel S des Kegels, l und m ihre Spuren in der Ebene Π der Grundkurve u, l_n und m_n ihre Normalen in S, l_c und m_c ihre Polstrahlen; die Spurpunkte dieser Geraden in Π mögen L_n, M_n, L_c, M_c respektive sein. Bezeichnen wir ferner mit A den Spurpunkt eines Strahles a durch S, mit A_n die Normalebene zu a in S, mit A_c die Polarebene von a, mit a_n resp. a_c die Spurlinien dieser Ebenen, dann ist $a_1 = \mathsf{A}_n \times \mathsf{A}_c$ der harmonische rechtwinklige Strahl zu a und $A_1 = a_n \times a_c$ sein Spurpunkt. Beschreibt nun a einen Strahlbüschel in der Ebene $\mathsf{\Lambda}$ mit dem Scheitel S, so beschreibt A_n einen dazu projektiven Ebenenbüschel mit der Achse l_n und A_c einen projektiven Ebenenbüschel mit der Achse l_c. In der Ebene Π durchläuft dann der Spurpunkt A von a die Punktreihe l, während der Spurpunkt A_1 des zu a harmonischen, rechtwinkligen Strahles a_1 einen Kegelschnitt l_1 durchläuft; dieser Kegelschnitt wird erzeugt durch zwei projektive Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen a_n und a_c sich um die Scheitel L_n und L_c drehen, er enthält deshalb die Punkte L_n und L_c. In gleicher Weise werden den Punkten einer Geraden m von Π die Punkte eines Kegelschnittes m_1 entsprechen, wenn wir die Spurpunkte harmonischer rechtwinkliger Strahlen kurzweg als entsprechende Punkte be-

zeichnen (Fig. 304). Dem Punkte $W = l \times m$ entspricht ein gemeinsamer Punkt W_1 von l_1 und m_1; diese Kegelschnitte müssen sich deshalb mindestens noch in einem weiteren Punkte X_1 schneiden. Zu X_1 giebt es mithin je einen entsprechenden Punkt auf l und m; zu $SX_1 = x_1$ giebt es also zwei harmonische rechtwinklige Strahlen, d. h. x_1 ist eine Achse unseres Kegels, der nach Obigem noch zwei weitere Achsen besitzen muß. Die Kegelschnitte l_1 und m_1 schneiden sich — abgesehen von dem zu $l \times m$ entsprechenden Punkte — in den Spurpunkten X_1, Y_1, Z_1 der drei Kegelachsen x_1, y_1, z_1.

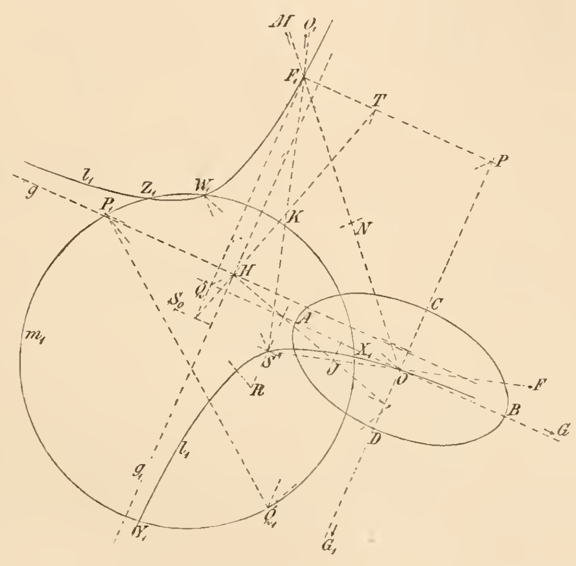


Fig. 304.

480. Hiernach genügt es zu zwei beliebigen Geraden l und m die entsprechenden Kegelschnitte l_1 und m_1 wirklich zu zeichnen, um ihre Schnittpunkte und damit die Achsen des Kegels zu gewinnen. Zur Erzeugung des Kegelschnittes l_1 dienen zwei projektive Strahlbüschel; der eine hat seinen Scheitel im Pole L_c von l in Bezug auf u; seine Strahlen sind die Polaren der bezüglichen Punkte von l. Der andere hat seinen Scheitel in L_n; seine Strahlen stehen senkrecht auf den Verbindungslinien der bezüglichen Punkte von l mit S', wo S' die Projektion von S auf Π bedeutet. Ist L_2 der Fußpunkt des von S' auf l gefällten Lotes, so liegt L_n auf der Verlängerung dieses Lotes $S'L_2$ über S' hinaus und genügt der Relation $S'L_2 \,.\, S'L_n = h^2$, wenn man unter $h = SS' = S'S_0$ die Höhe des Kegels versteht, da ja $\angle\, L_2SL_n$ ein rechter Winkel ist. Jeder Geraden

in Π entspricht ein Kegelschnitt durch die Punkte X_1, Y_1, Z_1; unter allen diesen Kegelschnitten wird man zwei besondere auswählen, die zur genauen Auffindung ihrer Schnittpunkte am meisten geeignet erscheinen. Als besonders geeignet ist die gleichseitige Hyperbel anzusehen, die der unendlich fernen Geraden entspricht, und der Kreis durch die Punkte X_1, Y_1, Z_1. Auf die Konstruktion und die Eigenschaften dieser beiden Kurven wollen wir jetzt näher eingehen.

Sei l die unendlich ferne Gerade, so fallen L_c und L_n respektive mit dem Mittelpunkte O von u und S' zusammen. Zu einem unendlich fernen Punkte, d. h. zu einer Richtung, erhält man den entsprechenden Punkt, indem man den zu dieser Richtung konjugierten Durchmesser von u mit der zur Richtung senkrechten Geraden durch S' schneidet. Dem unendlich fernen Punkte G der Achse AB von u entspricht demgemäß der unendlich ferne Punkt G_1 der Achse CD und umgekehrt; dem unendlich fernen Punkt F von $S'O$ entspricht der Punkt F_1, wobei $F_1S' \perp S'O$ und F_1O, FO konjugierte Durchmesser von u sind. Der unendlich fernen Geraden entspricht deshalb der Kegelschnitt l_1, der die fünf Punkte O, S', F_1, G, G_1 enthält; demnach ist l_1 eine Hyperbel, deren Asymptoten zu den Achsen AB und CD von u parallel sind; eine solche Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten nennt man g l e i c h s e i t i g. Nun liegen je zwei konjugierte Durchmesser einer Hyperbel zu ihren Asymptoten harmonisch (nach 290); bei der gleichseitigen Hyperbel liegen deshalb je zwei konjugierte Durchmesser symmetrisch zu den Asymptoten. Der Mittelpunkt H unserer Hyperbel l_1 ergiebt sich hiernach als Schnitt zweier Durchmesser, von denen der eine durch die Mitte J der Sehne $S'O$ geht und mit der Achse AB den gleichen Winkel einschließt wie diese Sehne, während der andere die Mitte K der Sehne F_1S' enthält und mit dieser gegen die Achse AB gleich geneigt ist; denn jeder Durchmesser halbiert die Sehnen, die dem konjugierten Durchmesser parallel sind. Zeichnet man also drei Rechtecke, deren Seiten zu AB und CD parallel und deren erste Diagonalen $S'O$, $S'F_1$, F_1O respektive sind, so schneiden sich ihre zweiten Diagonalen im Mittelpunkt H der Hyperbel; von dieser findet man beliebig viele Punkte mittels ihrer Asymptoten g und g_1 und der bekannten Punkte. Weiterhin wird noch eine Methode angegeben, um beliebige Durchmesser der Hyperbel l_1 direkt zu bestimmen.

481. Zur Erlangung des Kreises durch die Punkte X_1, Y_1, Z_1 bedürfen wir eines Satzes, der zunächst hier abgeleitet werden soll.

Einer beliebigen Geraden i entspricht in der oben geschilderten Weise ein Kegelschnitt i_1, jeder Punktreihe auf i entspricht eine zu ihr projektive Punktreihe auf i_1. Wählen wir auf i irgend eine Punktinvolution mit den Doppelpunkten J^u und J^v, so entspricht ihr auf i_1 eine Punktinvolution mit den Doppelpunkten J_1^u und J_1^v. Die Verbindungslinien der Punktepaare dieser Involution auf i_1 gehen durch das Centrum J der Involution (nach 315) und die Schnittpunkte der zugehörigen Tangentenpaare liegen auf der Achse j der Involution; dabei ist j die Polare von J in Bezug auf i_1 und geht durch die Doppelpunkte J_1^u und J_1^v der Involution. Der Geraden j entspricht ein Kegelschnitt j_1, der offenbar durch die Punkte J^u und J^v von i hindurchgeht; der Involution auf j mit den Doppelpunkten J_1^u und J_1^v entspricht auf j_1 die Involution mit den Doppelpunkten J^u und J^v, d. h. für diese Involution auf j_1 ist $i = J^u J^v$ die Achse und der Pol J von i in Bezug auf j_1 ist das Centrum. Hieraus fließt der Satz:

Sucht man zu zwei beliebigen Geraden i und j die entsprechenden Kegelschnitte i_1 und j_1, so entspricht der Involution der Punktepaare auf i, die hinsichtlich j_1 konjugiert sind, die Involution auf i_1, deren Achse j ist; ebenso entspricht der Involution der Punktepaare auf j, die hinsichtlich i_1 konjugiert sind, die Involution auf j_1, deren Achse i ist. Dieser Satz ist allerdings zunächst nur bewiesen, wenn i und j_1, also auch i_1 und j sich schneiden; er gilt indes allgemein, wie unten noch gezeigt werden soll. Die Kegelschnitte i_1 und j_1 haben die Punkte X_1, Y_1, Z_1 und außerdem den zu $i \times j$ entsprechenden Punkt gemein.

482. Nun betrachten wir die unendlich ferne Gerade l und auf ihr die Involution, deren Punktepaare sich aus O (und also aus jedem endlichen Punkte) durch rechtwinklige Strahlen projizieren; dieser Involution auf l entspricht eine Involution auf der Hyperbel l_1, von der G, G_1 und O, F_1 zwei Punktepaare sind. Denn G, G_1 gehören der Involution auf l an, also die entsprechenden Punkte G_1, G der Involution auf l, ebenso bilden F und der unendlich ferne Punkt O_1 von $S'F_1$ ($S'F \perp S'O_1$) ein Punktepaar jener Involution, also die entsprechenden Punkte F_1 und O ein Punktepaar der Involution auf l_1. Das Centrum der Involution auf l_1 ist der Schnittpunkt $GG_1 \times OF_1$, d. h. der unendlich ferne Punkt M auf OF_1; ihre Achse ist die Polare m von M in Bezug auf l_1, d. h. der Hyperbeldurchmesser HN ($NO = NF_1$). Dieser Geraden m entspricht ein Kegelschnitt m_1 durch X_1, Y_1, Z_1, für den die Punktepaare der Involution auf l kon-

jugierte Punkte sind, für den also je zwei konjugierte Durchmesser aufeinander senkrecht stehen; der Kegelschnitt m_1 ist mithin der Kreis durch die Punkte X_1, Y_1, Z_1.

Die Punkte G, G_1, O, F_1 bilden aber ein der Hyperbel l_1 eingeschriebenes Viereck, von dem sich ein Paar Gegenseiten, nämlich GG_1 und OF_1 in M schneiden; die Punkte $P = OG_1 \times F_1G$ und $Q = OG \times F_1G_1$ liegen also auf der Polaren m von M und sind konjugiert in Bezug auf l_1. Nach dem vorausgeschickten Satze entspricht der Involution der hinsichtlich l_1 konjugierten Punkte von m eine Involution auf dem Kreise m_1, deren Achse die unendlich ferne Gerade l ist, deren Punktepaare also auf den Durchmessern von m_1 liegen. Die Punkte P_1, Q_1, die jenen Punkten P und Q entsprechen, sind somit die Endpunkte eines Durchmessers des Kreises m_1. In P_1 schneiden sich die Polare von P in Bezug auf u und die Gerade RP_1, wenn $RP_1 \perp S'P$, $S'T . S'R = (S'S_0)^2 = h^2$, $T = RS' \times F_1P$, $RT \parallel OP$; ähnlich findet sich Q_1. Der Kreis m_1 und die gleichseitige Hyperbel l_1 liefern die Spurpunkte X_1, Y_1, Z_1 der drei Achsen unseres Kegels, sie schneiden sich noch in einem Punkte W_1, der dem Punkte $m \times l$, d. h. dem unendlich fernen Punkte von PQ entspricht ($W_1S' \perp PQ$, $\angle W_1OA = \angle S'OA$, $H = PQ \times W_1S'$). Eine Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung besteht darin, daß S' der Höhenschnittpunkt des Spurendreiecks $X_1Y_1Z_1$ sein muß.

483. Um den Beweis des oben genannten Satzes in allgemein gültiger Form zu erbringen, können wir in folgender Weise verfahren. Zunächst erinnern wir daran, daß die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte durch vier feste Punkte einen Punkt gemein haben (407); zu jedem Punkt giebt es also einen weiteren, der ihm in Bezug auf alle die Kegelschnitte jenes Büschels konjugiert ist.

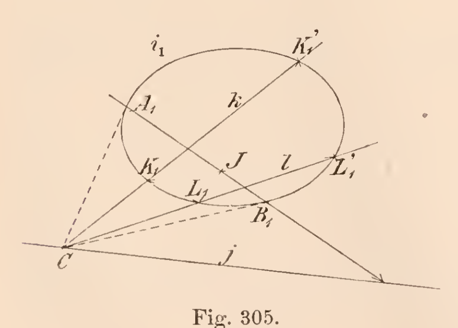


Fig. 305.

Wir kehren nun zurück zu den Geraden i und j und den Kegelschnitten i_1 und j_1, die ihnen in dem früher angegebenen Sinne entsprechen. Legen wir durch J — den Pol von j in Bezug auf i_1 — eine beliebige Gerade, die i_1 in A_1 und B_1 schneidet (Fig. 305), so müssen wir zeigen, daß die entsprechenden Punkte A und B auf i in Bezug auf j_1 konjugiert sind. Ist C der Pol von A_1B_1 in Bezug auf i_1, so

entsprechen den Geraden durch C Kegelschnitte, die alle die vier Punkte X_1, Y_1, Z_1, C_1 enthalten, wenn C_1 der entsprechende Punkt zu C ist; zu diesen Kegelschnitten gehört auch j_1, da C auf j liegt. Sind aber k und l zwei Gerade durch C, die i_1 in den Punkten K_1, K_1' respektive L_1, L_1' schneiden, so schneiden die entsprechenden Kegelschnitte k_1 und l_1 die Gerade i in den entsprechenden Punkten K, K' respektive L, L'. Da jedoch auf i_1 die Punktepaare K_1, K_1' und L_1, L_1' durch A_1, B_1 harmonisch getrennt werden, so werden auch auf i die Punktepaare K, K' und L, L' durch A, B harmonisch getrennt, d. h. A und B sind konjugierte Punkte in Bezug auf die beiden Kegelschnitte k_1 und l_1, woraus denn nach dem oben citierten Satze folgt, daß A und B auch hinsichtlich des Kegelschnittes j_1 konjugiert sind.

Kugel, Cylinder, Kegel; ihre ebenen Schnitte und Abwickelungen.

484. Eine Kugel mit einer Ebene E von vorgegebenen Spuren e_1, e_2 zu schneiden (Fig. 306).

Da die Schnittkurve ein Kreis ist, ihre Projektionen aber Ellipsen, so genügt es, zwei rechtwinklige Durchmesser dieses Kreises zu bestimmen, deren Projektionen konjugierte Durchmesser der Ellipsen sind. Wir legen nun durch den Kugelmittelpunkt O eine Ebene Δ senkrecht zu e_1; sie ist Symmetrieebene für die Kugel und die Ebene E, also auch für den Schnittkreis u, d. h. $f = \mathsf{E} \times \Delta$ ist ein Durchmesser von u. Seine Endpunkte A, B bestimmt man am besten, indem man Δ um eine horizontale Achse a durch O in die Lage Δ_0 parallel zu Π_1 dreht. Dabei geht der Schnitt von Δ mit

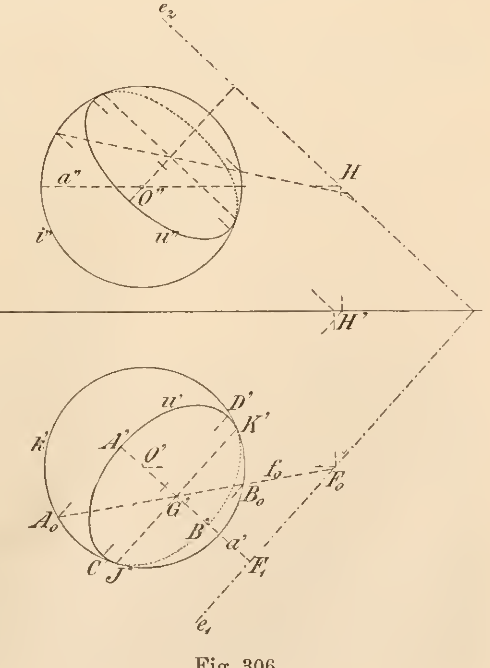


Fig. 306.

der Kugel in k' und f in $f_0 = F_0 G'$ über $(F_0 F_1 = (O'' \dashv x)$, $G = f \times a)$. Aus $A_0 = f_0 \times k'$ und $B_0 = f_0 \times k'$ ergiebt sich sofort die kleine Achse $A'B'$ von u'; ihre große Achse ist $C'D' = A_0 B_0$ und ihre Berührungspunkte J', K' mit k' liegen auf $G'H'$ $(H = a'' \times e_2)$, da GH die Schnittlinie von E mit der Ebene des Umrisses k ist. Im Aufriß bestimmt man entweder die konjugierten Durchmesser $A''B''$ und $C''D''$, oder man verfährt wie beim Grundriß.

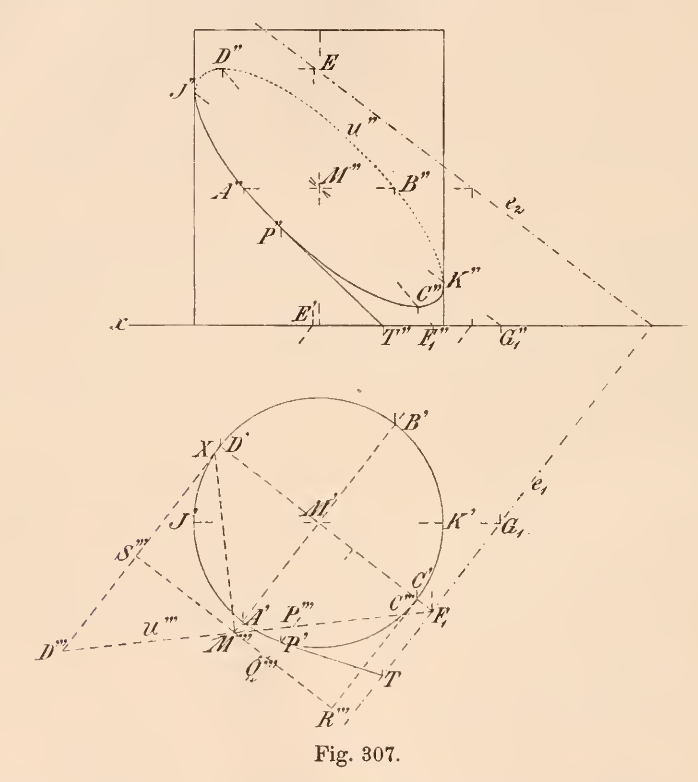


Fig. 307.

485. Will man die Schnittkurve einer Ebene E mit einer beliebigen Cylinderfläche bestimmen, so sucht man die Schnittpunkte von E mit den Mantellinien des Cylinders, indem man projizierende Ebenen durch sie legt. Ist auf der Cylinderfläche eine Raumkurve u gelegen, deren Projektionen u' und u'' man kennt, so geht durch jeden Punkt P von u eine Mantellinie m. Die projizierende Ebene mm' schneidet E in einer Geraden s und der Aufriß des Schnittpunktes $Q = m \times$ E ist $Q'' = m'' \times s''$. Da die projizierenden Ebenen durch die Mantellinien parallel sind, so sind es auch ihre Schnittlinien mit E, wovon man Gebrauch machen

kann; dann hat man nur noch ihre ersten Spurpunkte, die auf e_1 liegen, nötig.

Soll eine solche Cylinderfläche abgewickelt werden, so muß man zunächst einen ebenen Schnitt senkrecht zu den Mantellinien ausführen und erhält so eine Kurve v, die die Mantellinien senkrecht durchschneidet. Beim Abwickeln des Cylinders, den man als Prisma mit sehr vielen, sehr schmalen Seiten auffassen kann, werden die Mantellinien parallel, und der Normalschnitt v geht in eine zu diesen senkrechte Gerade über (da er sie alle rechtwinklig schneidet). Man wird deshalb durch Niederlegen der Ebene E um e_1 in Π_1 die wahre Gestalt v_0 von v zeichnen (v_0 und v' sind affin), dann v_0 nach 445 durch Teilen in kleine Strecken und geradliniges Aneinanderreihen derselben rektifizieren. Um zugleich mit dem Cylinder die Kurve u abzuwickeln, zieht man durch die Teilpunkte von v' die Projektionen der Mantellinien und die entsprechenden Mantellinien auf der abgewickelten Fläche; auf den letzteren sind die Strecken zwischen den abgewickelten Kurven proportional den Strecken zwischen u' und v' auf den ersteren. In der Abwickelung des Cylinders bildet die Kurve u mit den Mantellinien die gleichen Winkel wie auf der ursprünglichen Fläche.

486. Schnitt eines geraden Kreiscylinders, dessen Grundkreis in Π_1 liegt, mit einer Ebene E, Abwickelung dieser Kurve mit dem Cylindermantel (Fig. 307 u. 308).

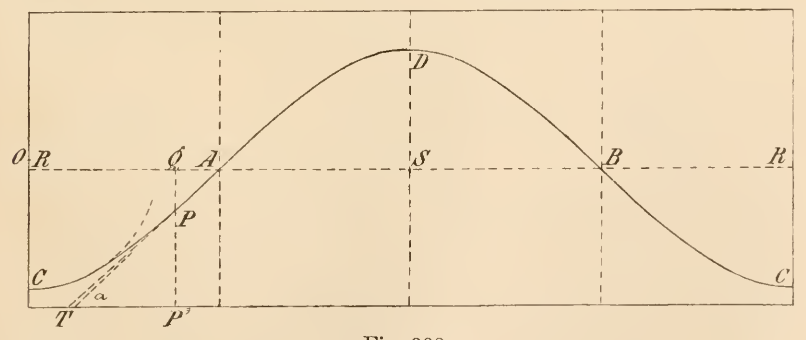


Fig. 308.

Die Schnittkurve ist eine Ellipse, die zu dem Grundkreise affin ist; man erhält zwei konjugierte Durchmesser derselben, wenn man durch die Cylinderachse irgend zwei zu einander rechtwinklige Hilfsebenen legt und diese mit E schneidet. Legt man speziell durch die Cylinderachse eine Ebene senkrecht und eine Ebene parallel

zur Spur e_1, so erhält man rechtwinklige konjugierte Durchmesser, d. h. die Achsen der Schnittellipse u. Die kleine Achse AB ist als Hauptlinie gleich dem Durchmesser $2r$ des Grundkreises, die große Achse CD ist als Falllinie gleich $2r : \cos\alpha$, wenn α der Neigungswinkel der Schnittebene E gegen Π_1 ist. Um die zweite Projektion der Falllinie zu finden ist in der Figur der erste Spurpunkt F_1 und der Punkt D benutzt, durch den die Hauptlinie DE gelegt wurde. $A''B''$ und $C''D''$ sind konjugierte Durchmesser der Ellipse u'', ihre Berührungspunkte J'', K'' mit dem Umriß erhält man durch Anwendung einer Hilfsebene durch die Cylinderachse parallel zu Π_2 ($J''K'' \parallel e_2$), denn eine solche schneidet den Cylinder in Mantellinien, die im Aufriß als Umrißlinien erscheinen.

487. Zur Abwickelung des Cylindermantels mit der Ellipse u ist noch in der Ebene $CDC'D'$ ein Seitenriß gezeichnet worden ($D'D'' = (D'' \dashv x)$), in der die Ellipse als Gerade u''' erscheint. Der abgewickelte Cylindermantel bildet ein Rechteck von der Höhe des Cylinders und von der Breite $2r\pi$ (näherungsweise $6\frac{2}{7}r$). Die Horizontalebene durch M schneidet den Cylinder in einem Kreise, dessen Abstand vom Grundkreise gleich $M'''M'$ ist; die Punkte A, R, B, S (wobei RC, SD Mantellinien sind) teilen diesen Kreis in vier gleiche Teile, die man in der Abwickelung zunächst einträgt. In dieser bestimmt man weiter C und D ($CR = DS = D'''S'''$), dann geht die abgewickelte Ellipse durch $CADBC$, ihre Tangenten in C und D sind parallel der Grundlinie des Rechtecks, ihre Tangenten in A und B schließen mit dieser den Winkel $\alpha = \angle M''F_1M'$ ein. A und B sind Wendepunkte der abgewickelten Kurve nach 452, weil die Tangentialebenen des Cylinders in A resp. B auf der Ebene der Ellipse u senkrecht stehen. Je vier symmetrische Punkte von u haben von dem Kreise $ARBS$ gleichen Abstand, wie man aus dem Seitenriß ersieht; die abgewickelte Ellipse besteht deshalb aus vier symmetrischen Teilen. Um weitere Punkte von ihr zu erhalten, teile man den Viertelkreis AR in mehrere gleiche Teile, ziehe die zugehörigen Mantellinien, entnehme aus dem Seitenriß die Abstände der auf ihnen liegenden Ellipsenpunkte von dem Kreise, und trage diese Abstände in der abgewickelten Figur an den entsprechenden Teilpunkten von AR senkrecht zu AR auf ($AQ = \text{Bog}\, AQ = \text{Bog}\, A'P'$, $QP = Q'''P'''$). Die Tangente in einem Punkte P der Ellipse u projiziert sich im Grundriß als Tangente des Kreises im Punkte P', ihr Spurpunkt T liegt auf e_1, woraus sich dann ihr Aufriß ergiebt. Der Neigungswinkel der Tangente PT gegen die Mantellinie bestimmt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $PP'T$ und ist gleich

$\angle$ *TPP'*, und da derselbe bei der Abwickelung erhalten bleibt, hat man in der abgewickelten Figur nur das genannte Dreieck einzutragen, um die bezügliche Tangente der abgewickelten Ellipse zu erhalten.

Der Krümmungsradius OC im Punkte C der abgewickelten Ellipse ist nach 452 gleich dem Krümmungsradius ϱ der Ellipse im Punkte C dividiert durch den Cosinus des Neigungswinkels der Ebene E gegen die Tangentialebene des Cylinders in C, oder es ist: $OC = \varrho : \sin\alpha$. Da aber die Halbachsen der Ellipse: $r : \cos\alpha$ und r sind, so wird: $\varrho = r^2 : \frac{r}{\cos\alpha} = r\cos\alpha$, und: $OC = r\operatorname{cotg}\alpha$. Errichtet man demnach in M''' auf $C'''D'''$ eine Senkrechte, die $D'''D'$ in X scheidet, so ist $S'''X = r\operatorname{cotg}\alpha = OC$.

488. Schnitt eines schiefen Kreiscylinders, dessen Grundkreis in Π_1 liegt, mit einer Ebene E; Abwickelung dieser Kurve mit dem Cylindermantel (Fig. 309 u. 310).

Die Schnittkurve ist wiederum eine Elllipse u, die zum Grundkreis k affin ist; ebenso ist ihre Projektion u' affin zu k, e_1 ist die Affinitätsachse. Legt man durch die Cylinderachse a zwei Ebenen, deren Spuren in Π_1 zu einander rechtwinklig sind, so sind ihre Schnittlinien mit E zwei konjugierte Durchmesser von u. Die Endpunkte dieser Durchmesser liegen auf den bezüglichen Mantellinien, die jene Ebenen aus dem Cylinder ausschneiden. Zur Durchführung dieser Konstruktion benutze man eine Hilfsebene $\Pi_4 \parallel \Pi_1$ durch den oberen Endkreis des Cylinders und zeichne die Spur e_4 von E in Π_4. So z. B. schneidet die Ebene durch a mit der Spur HJ in Π_1 und der Spur H_1J_1 in Π_4 die Ebene E in EE_1, wo $E = HJ \times e_1$ und $E_1' = H_1'J_1' \times e_4'$ ist ($e_4' \parallel e_1$, $H_1'J_1' \parallel H_1J_1$). Da aber H, J die Spurpunkte der Umrißlinien des Cylinders sind, so schneidet EE_1' ihre Projektionen in den Punkten H_2', J_2', wo sie von u' berührt werden, zugleich ist $O_2' = EE_1' \times a'$ der Mittelpunkt von u'. Legt man durch a eine Ebene, deren erste Spur zum Aufriß parallel ist, so schneidet sie den Cylinder in den Mantellinien, die in Π_2 als Umriß erscheinen; ihre Schnittlinie mit E hat in Π_1 und Π_4 die Spurpunkte F und F_1 ($O_1'F_1' \parallel OF \parallel x$) und es schneidet $F''F''_1$ die genannten Umrißlinien in ihren Berührungspunkten R_2'' und S_2'' mit u''. Die angegebene Konstruktion wird hinfällig für die zu Π_1 senkrechte Ebene Π_3 durch a, die wir deshalb um ihre Spur a' umlegen. Wir bestimmen zunächst a''' durch Umlegen von O_1 nach O_1'' und GG_1''' durch Umlegen von G_1 nach G_1''' ($G_1 = \Pi_3 \times e_4$), dann trifft $GG_1 = \Pi_3 \times$ E den Cylinder in den Ellipsenpunkten K_2, L_2,

deren Umlegungen K_2''', L_2''' sich als Schnittpunkte von GG_1''' mit den zu a''' parallelen Mantellinien KK_2''' und LL_2''' ergeben. Hieraus findet man dann K_2' und L_2' und den Mittelpunkt O_2' von u' aus seiner Umlegung $O_2''' = a''' \times GG_1'''$. $J_2'H_2'$ und $K_2'L_2'$ sind konjugierte Durchmesser der Ellipse u', die sich hiernach konstruieren läßt. Sucht man ihre Aufrisse, so erhält man konjugierte Durch-

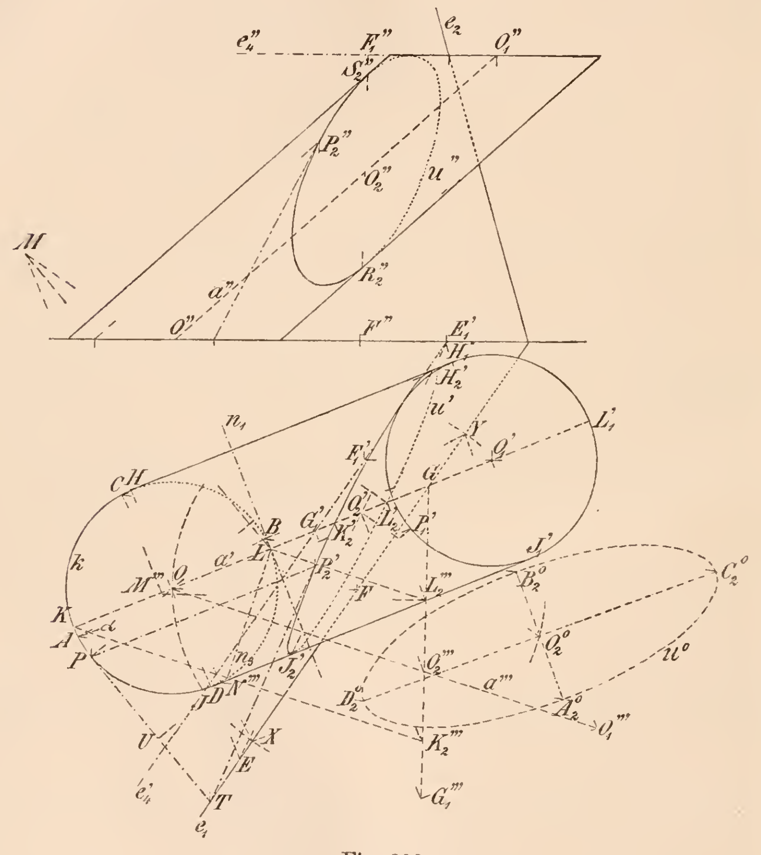


Fig. 309.

messer von u'', oder man sucht den konjugierten Durchmesser zu $R_2''S_2''$, der in a'' liegt.

Die Methode des Umlegens kann man natürlich auch benutzen, um den Schnittpunkt P_2 einer beliebigen Mantellinie PP_1 mit E zu konstruieren. Wie die Ebene Π_3 das Dreieck KK_2G enthält, dessen Umlegung $KK_2'''G$ gezeichnet wurde, so enthält die projizierende

Ebene durch PP_1 ein zu jenem ähnliches Dreieck, dessen Seiten beim Umlegen zu den Seiten des Dreiecks $KK_2'''G$ parallel werden. Da eine Ecke P unseres Dreiecks auf k, eine zweite auf e_1 liegt, so ergiebt sich P_2''' als dritte Ecke desselben und daraus dann P_2' (in der Figur ist diese Konstruktion nicht durchgeführt).

Die wahre Gestalt u^0 der Ellipse u gewinnt man durch Umlegen der Ebene E um e_1, dadurch gelangt O_2 nach O_2^0 ($O_2'''O_2' = O_2O_2'$). Die gesuchte Ellipse u^0 ist aber — ganz ebenso wie u — zu dem Kreise k affin und e_1 ist die Affinitätsachse; da man nun ein Paar affiner Punkte O und O_2^0 kennt, kann man hiernach u^0 zeichnen. Den Achsen von u^0 entsprechen beim Kreise zwei rechtwinklige Durchmesser; schneiden die Achsen e_1 in den Punkten X und Y, so sind XO und YO die entsprechenden Kreisdurchmesser. Es werden demnach X und Y aus e_1 durch einen Kreis ausgeschnitten, dessen Mittelpunkt auf e_1 liegt und der durch O und O_2^0 geht. Die Endpunkte der Kreisdurchmesser sind A, B, C, D, die affinen Punkte A_2^0, B_2^0, C_2^0, D_2^0 sind die Endpunkte der Achsen von u^0.

489. Zur Abwickelung der Mantelfläche des Cylinders führen wir einen Normalschnitt mit den Spuren n_1 und n_3 in Π_1 resp. Π_3 aus; seine Schnittellipse v, die k in L berührt, schneidet alle Mantellinien rechtwinklig und geht bei der Abwickelung in eine Gerade über. Wir teilen nun den Grundkreis von L ausgehend in eine Anzahl gleicher Teile, etwa 24, und bezeichnen sie mit: $1\,(=L)$, $2, 3\ldots$, $7\,(=J)$, $8, \ldots, 13\,(=K)$, $14, \ldots, 19\,(=H)$, $20, \ldots 24$; die zugehörigen Mantellinien schneiden v in den Punkten: 1_v, 2_v, 3_v, ... und u in den Punkten 1_u, 2_u, 3_u, ... Die wahre Länge von KN ergiebt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $KN'''L$, das in Fig. 310 noch einmal eingetragen ist; die Strecken 22_v, 33_v, 44_v, ... verhalten sich zu KN, wie die Abstände der Punkte 2, 3, 4, ... von n_1 zu KL. Lotet man also die Punkte 2, 3, 4, ... auf LK, so sind die Abstände der Lotpunkte von LN den Strecken 22_v, 33_v, 44_v, ... resp. gleich, d. h. die abgewickelten Punkte 2, 3, 4, ... liegen auf den durch die Lotpunkte gezogenen Parallelen zu LN, während die Abwickelung von v in die Verlängerung von LN fällt. Bedenkt man noch, daß die gleichen Kreisbogen 12, 23, 34, ... ihre Länge bei der Abwickelung nicht ändern (451) und daß die Bogen sowohl bei k als bei seiner Abwickelung näherungsweise durch die Sehnen ersetzt werden können, so ergiebt sich die Gleichheit der Sehnen 12, 23, 34, ... des abgewickelten Kreises k. Die Abwickelung von k besteht aus vier symmetrischen Teilen LJ, JK, KH, HL, dabei sind L und K Scheitel-, H und J Wendepunkte. Die Wendetangente in J schließt mit den

Mantellinien den $\angle NKL = \alpha$ ein; der Krümmungsradius in K ist gleich dem Radius von k dividiert durch $\cos \alpha$.

Durch die abgewickelten Punkte 1, 2, 3, 4, ... ziehen wir die Mantellinien und tragen auf ihnen die Strecken 11_u, 22_u, 33_u, ... auf, so erhalten wir Punkte der abgewickelten Ellipse u. Die Strecke 11_u ist $= LL_2'''$, die andern Strecken werden aus Dreiecken gewonnen, die zu $\triangle LL_2'''G$ ähnlich sind. Die zu LG homologen Seiten der ähnlichen Dreiecke gehen von den Punkten 2, 3, 4, ... aus, sind zu LG parallel und haben ihre andern Endpunkte auf e_1. Zieht

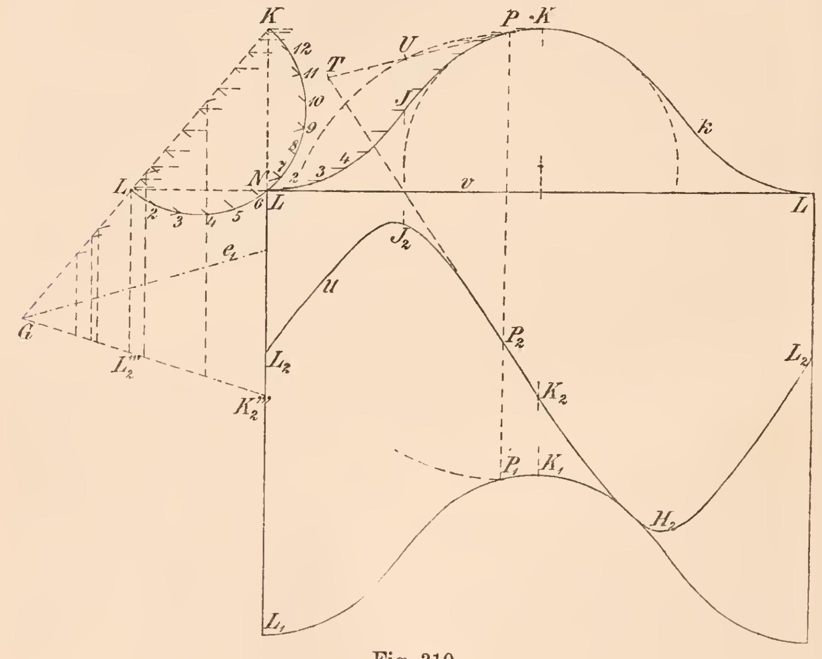


Fig. 310.

man also durch 2, 3, 4, ... Parallele zu e_1 und durch ihre Schnittpunkte mit LG Parallele zu LL_2''', so werden auf diesen Parallelen durch die Geraden GL und GL_2''' Strecken begrenzt, die den gewünschten Strecken 22_u, 33_u, 44_u, ... gleich sind. Die Abwickelung von u besteht aus zwei symmetrischen Teilen $L_2J_2K_2$ und $K_2H_2L_2$; denn zwei benachbarte Durchmesser von u schneiden auf u zwei Elemente aus, die gleich lang sind und gegen die Mantellinien die gleiche Neigung besitzen.

Ein Punkt P_2 von u, in dem die Tangentialebene des Cylinders auf E senkrecht steht, liefert bei der Abwickelung einen Wende-

punkt. Eine zu jener Tangentialebene parallele Ebene erhält man also, wenn man durch einen beliebigen Punkt, etwa L_2, eine Mantellinie und eine Normale zu E zieht. L ist der erste Spurpunkt der Mantellinie, M der erste Spurpunkt der Normalen ($L_2'M \perp e_1$, $L_2'''M''' \perp GG_1'''$, $M'''M \perp a'$); LM ist demnach zur Spurlinie jener Tangentialebene parallel, deren Spur PT den Kreis k in P berührt ($PT \parallel LM$, $PO \perp LM$). Die Tangente von k in P und die Tangente von u in P_2 schneiden e_1 in dem nämlichen Punkte T und bilden das Dreieck PP_2T; in der Abwickelung bilden die Tangenten in P und P_2 das kongruente Dreieck PP_2T. Um dieses zu zeichnen verlängert man die Mantellinie bis P_1 und fällt von P_1 auf PT das Lot P_1U in der ursprünglichen Figur, bestimmt die Abwickelung von P und überträgt das rechtwinklige Dreieck P_1UP, von dem man PP_1 und PU kennt, trägt PT von P aus auf PU auf und verbindet T mit P_2, so ist P_2T die gesuchte Wendetangente von u, PT die Tangente des abgewickelten Kreises k. Die gleiche Konstruktion läßt sich für die Tangente in jedem Punkte der abgewickelten Ellipse u anwenden; der Krümmungsradius in einem solchen Punkt ergiebt sich aus 444 und 452.

490. Schnitt und Abwickelung eines geraden Kreiskegels, dessen Grundkreis in der ersten Projektionsebene liegt (Fig. 311 und 312).

Man lege durch die Spitze S des Kegels eine Ebene senkrecht zu der ersten Spur e_1 der Schnittebene E; sie enthält die Kegelachse und steht auf E senkrecht, auf der sie eine Falllinie f ausschneidet; f ist dann offenbar Symmetrielinie oder Achse des gesuchten Kegelschnittes u. Durch Umlegen jener Ebene in Π_1 gelangt S nach S_0 und der Punkt G der Falllinie nach G_0 ($G'H' \parallel e_1$, $G''H \parallel x$, $G_0G' = HH'$); $F_1G_0 = f_0$ schneidet dann die umgelegten Mantellinien S_0A, S_0B in den Punkten J_0 resp. K_0. Hieraus ergeben sich sofort die beiden Projektionen der Achse JK von u und damit der Mittelpunkt O von u als Mittelpunkt von JK; die zweite Achse von u ist die durch O gehende erste Hauptlinie von E. Um ihre Endpunkte L, M zu finden, benutzen wir eine Ebene, die durch diese Achse und den Scheitel S geht, also die Gerade SO enthält; ihre Spurlinie geht durch Q ($Q = S_0O_0 \times f''$), ist zu e_1 parallel und schneidet den Grundkreis k in C und D. Diese Ebene enthält die Mantellinien SC und SD, auf ihnen liegen die Endpunkte L und M der zweiten Achse, deren Projektionen man also zeichnen kann. Die Ebene durch die Kegelachse parallel zum Aufriß enthält die Mantellinien, welche in Π_2 als Umriß erscheinen; die Projektion ihrer Schnittlinie mit

E schneidet dieselben in den Berührungspunkten X'' und Y'' von u''. Durch Umlegen von u um e_1 gewinnt man die wahre Gestalt u^0 der Schnittkurve ($F_1O_0 = F_1O^0$ etc.). Beliebig viele Punkte von u kann man einfach dadurch konstruieren, daß man durch S irgend welche Ebenen Δ legt, diese mit der Kegelfläche und E schneidet und so jedesmal zwei Punkte von u bekommt. Man gebraucht dabei eine horizontale Hilfsebene durch S, nimmt die erste Spur d_1 von Δ beliebig an, zieht durch S ihre zu d_1 parallele Hilfsspur d_3 und

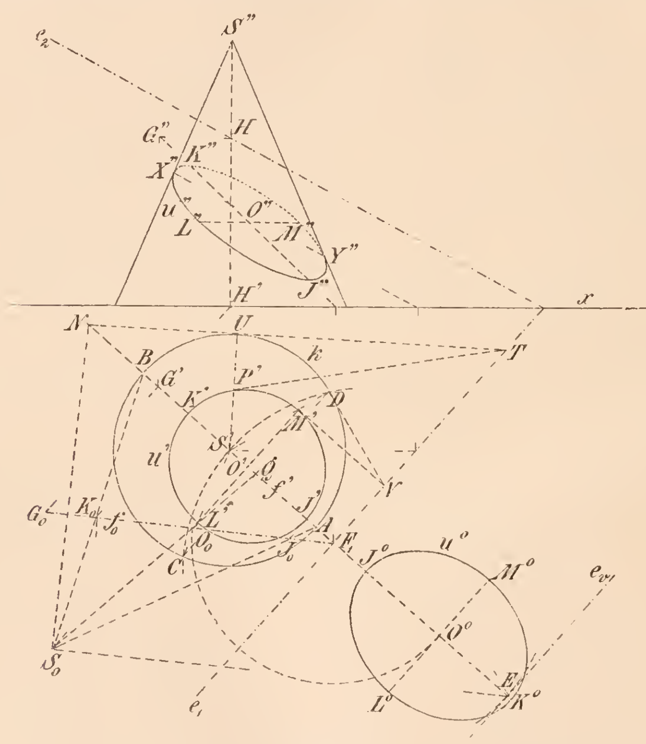


Fig. 311.

sucht die Hilfsspur e_3 von E; die Schnittlinie $\Delta \times$ E, d. h. die Verbindungslinie von $d_1 \times e_1$ und $d_3 \times e_3$, schneidet die bezüglichen Mantellinien in Punkten der Kurve u. Die Konstruktion ist in der Figur nicht durchgeführt, da sie schon beim Cylinder behandelt ist. Der Kreis k und die Schnittkurve u' sind nach 162 perspektive Figuren, S' ist das Centrum, e_1 die Achse der Perspektivität, e_v ihre Verschwindungslinie($S_0E \parallel f_0$, $e_v \parallel e_1$ geht durch E). Dem Pol Q von e_v in Bezug auf k entspricht der Mittelpunkt O' von u'; die Tan-

genten von E an k berühren in C und D und diesen Punkten entsprechen die Endpunkte L' und M' der zweiten Achse von u'. Ist $V = e_1 \times ED$, so ist $VM' \parallel ES'$, denn E ist der Verschwindungspunkt der Kreistangente DE. Auch die Kurven u^0 und k sind perspektiv, e_1 ist die Achse, das Centrum liegt auf f' um die Strecke S_0E über E hinaus (vergl. 164).

491. Beim Abwickeln des Kegelmantels gehen die Mantellinien in Strahlen durch den festen Punkt S und der Grundkreis k in einen Kreisbogen mit dem Radius S_0A über; die Länge dieses Kreisbogens wird gleich der Peripherie von k, was man durch Übertragen kleiner Teilstücke — etwa 24 Teile — erzielt. Der Kreissektor, der den abgewickelten Kegelmantel darstellt, hat einen Centriwinkel von

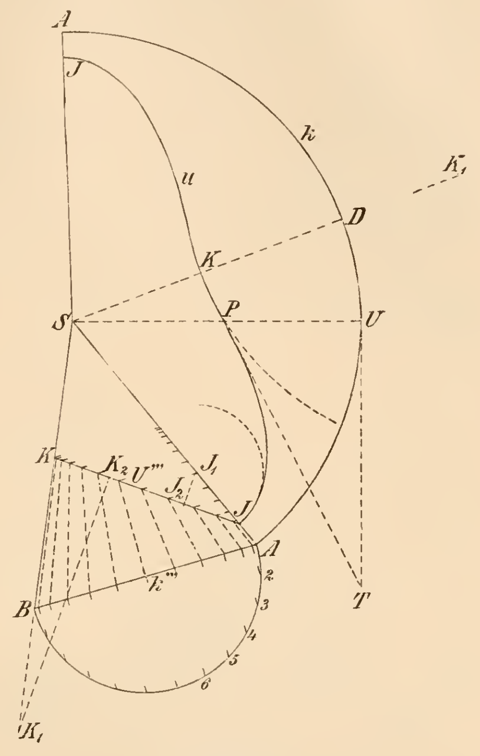


Fig. 312.

$4R \cdot \frac{S'A}{S_0A}$. In Fig. 312 ist noch der in ABC liegende Seitenriß des Kegels eingezeichnet, in dem sich u als gerade Linie projiziert, so daß man unmittelbar die Projektionen der einzelnen Mantellinien und ihrer zwischen k und u liegenden Teile, sowie deren wahre Längen entnehmen kann, die man dann auf die abgewickelten Mantellinien aufträgt. Um die Wendepunkte des abgewickelten Kegelschnittes zu bestimmen, suchen wir die Tangentialebenen des Kegels auf, die zu E senkrecht sind, indem wir von S ein Lot auf E fällen, und von seinem ersten Spurpunkte $N (S_0N \perp f_0)$ die beiden Tangenten an k ziehen. Diese Tangenten sind die ersten Spurlinien der gesuchten Tangentialebenen; berührt eine derselben den Kegel längs der Mantellinie SU, und trägt diese den Punkt P von u, so wird P bei der Abwickelung zum Wendepunkt. Schneidet die

Kreistangente NU die Spur e_1 in T, so ist PT die Tangente von u im Punkte P; die bezüglichen Tangenten der abgewickelten Kurven k und u bilden ein rechtwinkliges Dreieck PUT, das zu dem $\triangle PUT$ der ursprünglichen Figur kongruent ist. Ganz ebenso wie die Wendetangente in P überträgt man auch andere Tangenten in die Abwickelung. Die Punkte J und K sind Scheitelpunkte der abgewickelten u, die zugehörigen Krümmungsradien JJ_1 und KK_1 findet man nach 452 als $\varrho : \cos \angle SJK$ und $\varrho : \cos \angle BKJ$, wenn ϱ den Krümmungsradius der Ellipse u^0 in den Punkten J^0 und K^0 bedeutet ($JJ_2 = KK_2 = \varrho$, $J_1J_2 \perp JK$, $K_1K_2 \perp JK$).

492. Schnitt und Abwickelung eines schiefen Kreiskegels, dessen Grundkreis in der ersten Projektionsebene liegt (Fig. 313 u. 314).

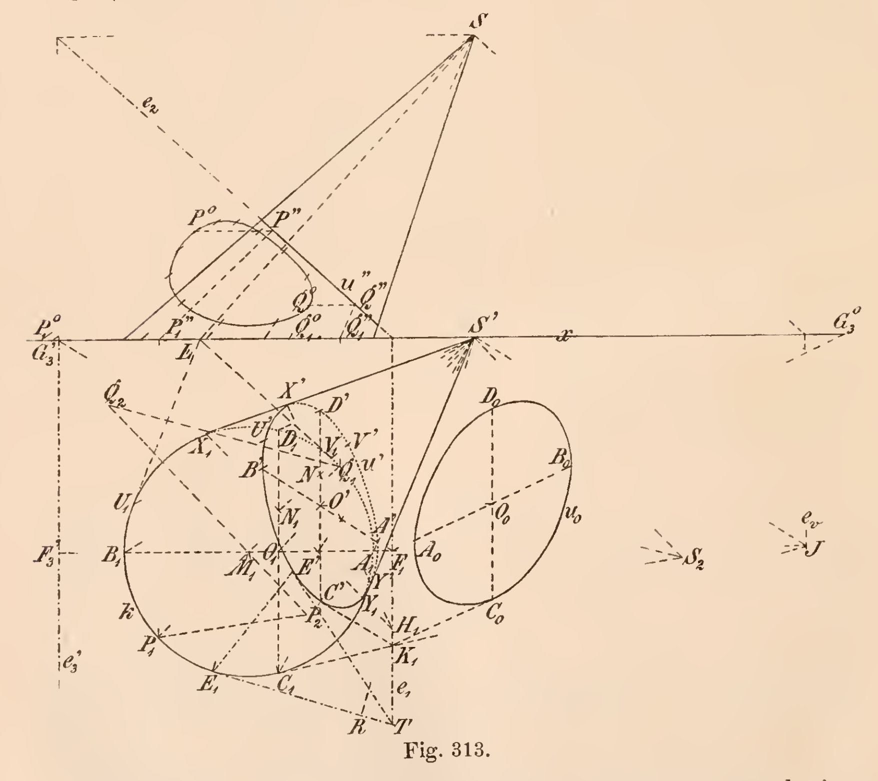


Fig. 313.

Wir benutzen außer der Ebene Π_1 des Grundkreises k noch eine zweite Horizontalebene Π_3 durch den Scheitel S des Kegels; die Ebene E hat dann die parallelen Spuren e_1 und e_3 ($e_3' \parallel e_1$). Eine beliebige Spurlinie d_1 in Π_1 und eine zu ihr parallele Spurlinie d_3

durch S bestimmen eine Ebene, deren Schnittlinie mit E die Spurpunkte $d_1 \times e_1$ und $d_3 \times e_3$ besitzt und aus dem Kegel die nach den Schnittpunkten von d_1 und k verlaufenden Mantellinien ausschneidet; dadurch ergeben sich jedesmal zwei Punkte von u'. Nimmt man speziell als Spurlininie d_1 den Durchmesser $A_1B_1 \perp e_1$ an, so sind $A' = S'A_1 \times F_1G_3'$ und $B' = S'B_1 \times F_1G_3'$ Endpunkte eines Durchmessers von u' ($F_1 = A_1B_1 \times e_1$, $G_3'S' \parallel A_1B_1$, $G_3' = G_3'S' \times e_3'$); denn $A'B'$ halbiert alle Sehnen von u', die zu e_1 parallel sind, und somit ist O' der Mittelpunkt von u' ($O'A' = O'B'$). Jede Ebene durch SO liefert nun einen Durchmesser von u, ihre Spurlinie muß durch

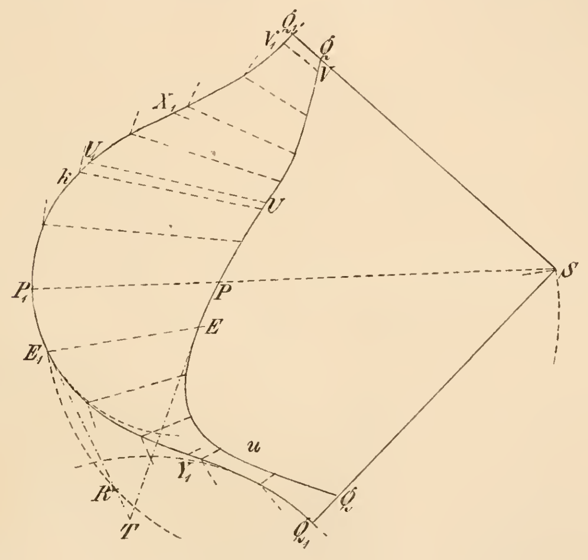


Fig. 314.

O_1 gehen ($O_1 = A_1B_1 \times S'O'$); die Spurlinie $C_1D_1 \parallel e_1$ durch O_1 liefert insbesondere den zu $A'B'$ konjugierten Durchmesser $C'D'$ ($C'D' \parallel e_1$). Durch Umlegen dieser Durchmesser um e_1 in Π_1 erhält man die konjugierten Durchmesser A_0B_0, C_0D_0 von u_0. Sind X_1 und Y_1 die Berührungspunkte der Umrißlinien mit k, so enthält die Ebene SX_1Y_1 den wahren Umriß; schneidet man also X_1Y_1 mit e_1 in H_1 und die Parallele zu X_1Y_1 durch S' mit e_3' in H_3', so trifft H_1H_3' den Umriß in den Berührungspunkten X' und Y' von u' ($N_1 = C_1D_1 \times X_1Y_1$, $N_1S' \times C'D' = N'$, $H_1N' = X'Y'$).

Faßt man (nach 162) k und u' als perspektive Figuren mit dem Centrum S' und der Achse e_1 auf, so ist e_3' die Fluchtlinie und e_v die Verschwindungslinie, wobei $e_v \parallel e_1$ ebensoweit von e_1 absteht wie

S' von e_3'. Die Polare des Punktes $J = A_1B_1 \times e_v$ muß wieder C_1D_1 und O_1 der Pol von e_v sein (JC_1 berührt k in C_1). J, O_1 und der unendlich ferne Punkt von e_v bilden ein Poldreieck von k; das Bild von e_v fällt ins Unendliche, also ergeben die Bilder von A_1B_1 und C_1D_1 konjugierte Durchmesser von u' ($A'B' \parallel S'J$ geht durch F_1, $C'D' \parallel e_1$ geht durch O', wo O' das Bild von O_1 ist). Ist K_1 der Schnittpunkt von e_1 mit der Kreistangente JC_1, so ist $C'K_1 \parallel S'J$ die Tangente von u' in C' und C_0K_1 die Tangente von u_0 in C_0.

493. Zur Abwickelung des Kegelmantels nehmen wir die Ebene SP_1Q_1, die ihn in zwei symmetrische Teile zerlegt, und teilen den Kreisumfang von k von P_1 ausgehend in lauter gleiche Stücke, etwa 24; die zugehörigen Mantellinien zerlegen den Kegelmantel in 24 Teile. Annäherungsweise kann nun der Kegel durch eine 24-seitige Pyramide ersetzt werden, deren Seitenflächen Dreiecke sind, die je zwei Mantellinien zu Seiten und gleiche Sehnen des Grundkreises zu Grundlinien haben. Die Abwickelung geschieht durch Nebeneinanderlegen der genannten Seitenflächen, wozu man die Längen der nach den 24 Teilpunkten laufenden Mantellinien braucht. Diese Längen findet man unter Benutzung einer Aufrißebene, die durch S senkrecht zu e_1 gelegt ist, indem man die einzelnen Mantellinien um SS' in diese Aufrißebene dreht ($S'P_1 = S'P_1{}^0$, $SP_1 = SP_1{}^0$, $SQ_1 = SQ_1{}^0$ etc.); hierbei ergeben sich auch ihre Schnittpunkte mit u ($P = SP_1 \times \mathsf{E}$, $P'' = SP_1'' \times e_2$, $P_0P'' \parallel x$, $P_0 = P^0P'' \times SP_1{}^0$ etc.). Beim Abwickeln von k gelangen die 24 Teilpunkte auf 13 Kreise um den gemeinsamen Mittelpunkt S, deren Radien den bezüglichen Mantellinien gleich sind; die Radien für den größten und kleinsten sind SP_1 und SQ_1; die Abstände je zweier aufeinanderfolgender Teilpunkte auf der Abwickelung von k sind der Seite des k eingeschriebenen regulären 24-Ecks gleich. Auf den 24 abgewickelten Mantellinien (in der Figur sind nur 12 eingezeichnet) trägt man noch die von der Schnittkurve u begrenzten Teilstücke auf ($SQ = SQ^0$, $SP = SP^0$, etc.) und gewinnt so Punkte der abgewickelten u.

Die Tangente im Punkte E von u liegt in E und in der Tangentialebene, die den Kegel längs SEE_1 berührt und deren Spurlinie E_1T den Kreis k in E_1 berührt; deshalb ist $T = E_1T \times e_1$ der Spurpunkt der gesuchten Tangente (TE' berührt u' in E'). Macht man $S'R \perp E_1T$ und überträgt man das rechtwinklige $\triangle SE_1R$ sowie E_1T in die abgewickelte Figur, so ist E_1R die Tangente des abgewickelten Kreises k im Punkte E_1 und es ist ET die Tangente der abgewickelten Kurve u, da ihr Neigungswinkel gegen SE derselbe ist wie $\angle E_1ET$ auf dem Kegelmantel selbst.

Die Wendepunkte der abgewickelten k sind X_1 und Y_1 nach 452, denn die Tangentialebenen längs der Umrißlinien SX_1 und SY_1 sind zu Π_1 senkrecht. Die Wendepunkte der abgewickelten u sind U und V, wenn die Tangentialebenen längs der Kanten SU und SV auf E senkrecht stehen, d. h. wenn sie das von S auf E gefällte Lot SL enthalten ($SL \perp e_2$). L ist der erste Spurpunkt dieses Lotes und die Tangenten von L an k sind die ersten Spurlinien der genannten Tangentialebenen; ihre Berührungspunkte U_1 und V_1 sind die ersten Spurpunkte der beiden Mantellinien, deren Abwickelungen die gesuchten Wendepunkte tragen. Die Punkte P_1 und Q_1 sind für die abgewickelte k Scheitelpunkte, deren Krümmungsradien P_1P_2 und Q_1Q_2 sind; denn $\angle S_2Q_1S' = \angle Q_2Q_1M_1$ und $\angle S_2P_1S' = \angle P_2P_1M_1$ ($S_2S' \parallel Q_2M_1P_2 \perp S'M_1$, $S_2S' = SS'$) sind die Neigungswinkel von SQ_1 und SP_1 gegen Π_1, und es ist $P_1P_2 = r : \cos P_2P_1M_1$ und $Q_1Q_2 = r : \cos Q_2Q_1M_1$.

494. Die geodätischen Kurven auf dem geraden Kreiskegel (Fig. 315).

Nach 453 verstehen wir unter einer geodätischen Kurve auf einer abwickelbaren Fläche eine solche, die bei der Abwickelung in eine Gerade übergeht. Wickeln wir also die Mantelfläche des geraden Kreiskegels ab, wobei wir einen Kreisausschnitt erhalten (vergl. 491), so entspricht jede Gerade auf dem abgewickelten Mantel einer geodätischen Linie auf dem Kegel. Zu allen Geraden auf ersterem, deren Abstände von S unter sich gleich sind, gehören kongruente geodätische Linien auf letzterem; überhaupt sind je zwei geodätische Linien des Kegels ähnliche Kurven. Soll eine geodätische Linie zwei Punkte P und Q der Kegelfläche verbinden, so suche man die entsprechenden Punkte in der Abwickelung auf, verbinde sie durch eine Gerade u und konstruiere nun zu dieser die entsprechende Kurve u auf der Kegelfläche. Zu diesem Zweck teilt man den Grundkreis k in eine Anzahl gleicher Teile, zieht die nach den Teilpunkten verlaufenden Mantellinien, bestimmt ihre Abwickelungen, deren Schnittpunkte mit der Geraden u man wieder auf den Kegel überträgt. Die Linie $SA_1 \perp u$ liefert den Punkt $A = SA_1 \times u$, der dem Scheitel der geodätischen Linie entspricht; die Linien SB_1 sind beide Abwickelungen der nämlichen Mantellinie SB_1 (Bog A_1B_1 ist gleich dem halben Umfang von k), deshalb entsprechen ihre auf der Geraden u liegenden Punkte B einem Doppelpunkt B der geodätischen Linie. In der Figur ist ein Teil des Kegelmantels doppelt abgewickelt, weil die geodätische Linie einen Teil der Mantellinien zweimal trifft.

495. In der Abwickelung sind SC_1 und SD_1 zu u parallel, auf dem Kegel tragen deshalb die Mantellinien SC_1 und SD_1 die unendlich fernen Punkte der geodätischen Linie. Die Tangente in einem Punkte P der geodätischen Linie schließt mit der Erzeugenden $SP8$ den gleichen Winkel ein, wie die Gerade u mit der abgewickelten $SP8$. Der Spurpunkt Q jener Tangente liegt deshalb auf der Kreistangente des Punktes 8 in der Entfernung $Q8$, die wir aus der

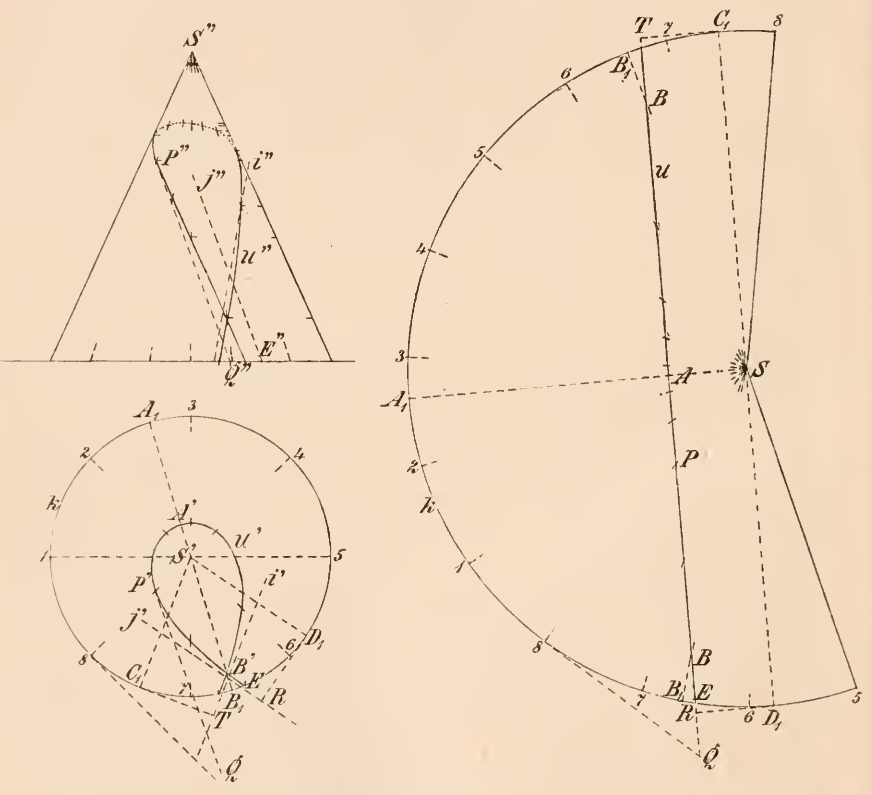


Fig. 315.

Abwickelung entnehmen können; ihre Projektionen sind QP' und $Q''P''$. Ganz ebenso erhält man als Spurpunkte der Asymptoten von u — d. h. der Tangenten in den unendlich fernen Punkten — die Punkte R und T; sie liegen auf den Tangenten der Punkte D_1 und C_1 respektive und die Strecken D_1R und C_1T sind den bezüglichen Strecken in der Abwickelung gleich. Die Asymptoten i, j selbst sind zu den Geraden SC_1 und SD_1 parallel, ihre Projektionen also zu $S'C_1$, $S'D_1$, $S''C_1''$, $S''D_1''$.

Die Projektion u' ändert den Sinn ihrer Krümmung nicht, dagegen u''; als Wendepunkte von u'' projizieren sich die Punkte von u, deren Schmiegungsebenen auf Π_2 senkrecht stehen; die ersten Spurlinien dieser Schmiegungsebenen stehen also auf der x-Achse senkrecht. Bestimmt man demnach die Spurkurve der abwickelbaren Fläche unserer geodätischen Linie und legt an sie Tangenten senkrecht zur x-Achse, zieht durch ihre Berührungspunkte die bezüglichen Tangenten an k und durch deren Berührungspunkte die Mantellinien, so schneiden diese aus u die Punkte aus, die sich im Aufriß als Wendepunkte projizieren. Läßt man in der Figur einen Punkt auf u von E nach P wandern, so beschreibt die zugehörige Tangente in Π_1 eine Spurkurve, die E mit Q verbindet; dieses Kurvenstück EQ besitzt eine zur x-Achse senkrechte Tangente, woraus sich der zugehörige Wendepunkt auf $P''E''$ mit seiner Tangente ergiebt (in der Figur ist die Konstruktion weggelassen).

Durchdringung von Kugel-, Cylinder- und Kegelflächen.

496. Um die Durchdringungslinie oder Schnittkurve zweier beliebiger Oberflächen zu zeichnen, muß man eine Reihe einzelner Punkte von ihr bestimmen. Dieses geschieht dadurch, daß man auf beiden Oberflächen Kurven aufsucht, die sich wirklich schneiden und so in den Schnittpunkten Punkte der Durchdringungslinie liefern. Schneidet man die gegebenen Oberflächen mit einer dritten, so erhält man auf denselben Kurven, deren Schnittpunkte auf der Durchdringungslinie liegen. Hiermit wird scheinbar unsere ursprüngliche Aufgabe: die Schnittkurve zweier Oberflächen zu finden, auf eine kompliziertere Aufgabe: die beiden Oberflächen mit einer dritten zu schneiden, zurückgeführt; da man indessen die dritte oder Hilfsoberfläche beliebig wählen darf, so läßt sich diese Wahl so treffen, daß die Schnittkurven mit den gegebenen Oberflächen leicht angegeben werden können. Es kommt also bei der Konstruktion der Durchdringungslinie zweier Flächen im wesentlichen darauf an, geeignete Hilfsflächen ausfindig zu machen. In den allermeisten Fällen benutzt man Ebenen als Hilfsflächen und es ist in jedem einzelnen Falle zu überlegen, welche Hilfsebenen am besten geeignet sind, um die Konstruktion so viel wie möglich zu vereinfachen. Häufig können Hilfsebenen parallel oder senkrecht zu einer Projektionsebene Verwendung finden, wobei dann die eine Projektion der in den Hilfsebenen liegenden Schnittkurven als gerade Linie erscheint.

497. Auf den Cylinder- und Kegelflächen liegen gerade Linien, die Erzeugenden oder Mantellinien; die Hilfsebenen zur Konstruktion der Durchdringungslinie zweier solcher Flächen wählt man deshalb so, daß sie beide Flächen in Erzeugenden schneiden. Handelt es sich dabei um zwei Kegel, so müssen die Hilfsebenen durch die Verbindungslinie ihrer Scheitel gelegt werden; handelt es sich um einen Kegel und einen Cylinder, so legt man die Hilfsebenen durch die Gerade, die durch den Scheitel des Kegels parallel zu den Mantellinien des Cylinders verläuft; sollen endlich zwei Cylinderflächen zum Durchschnitt gebracht werden, so nimmt man lauter Hilfsebenen, die den Erzeugenden beider parallel sind. Um die Mantellinien zu bestimmen, die eine Hilfsebene aus einer Cylinder- oder Kegelfläche ausschneidet, deren ebene Basiskurve man kennt, hat man nur die Schnittgerade der Hilfsebene und Basisebene mit der Basiskurve zu schneiden; durch diese Schnittpunkte verlaufen die gesuchten Mantellinien. Welcher Art die Basiskurve ist, ist hierbei gleichgültig.

498. Die Durchdringung zweier Cylinderflächen zu finden, deren Grundkurven Kegelschnitte sind (Fig. 316). Der eine Cylinder möge eine kreisförmige Basis k in Π_1, der andere eine elliptische c in einer Ebene E mit den Spuren e_1, e_2 besitzen, die Aufrißebene Π_2 möge auf E senkrecht stehen ($e_1 \perp x$). Wir ziehen zunächst durch einen beliebigen Punkt Q Parallele zu den Mantellinien des einen und des andern Cylinders, deren erste Spurpunkte R_1 und S_1 wir aufsuchen. Die ersten Spurlinien der zu den Erzeugenden beider Cylinder parallelen Hilfsebenen sind dann zu R_1S_1 parallel; ihre Spurgeraden in der Basisebene E des zweiten Cylinders sind parallel zu TU und deren Projektionen zu TU' ($T = e_1 \times R_1S_1$, $U'' = e_2 \times QS_1''$, U' auf $Q'S_1$). Zieht man demnach durch einen beliebigen Punkt auf e_1 Parallele zu R_1T und TU', schneidet erstere mit k, letztere mit c' und legt durch diese Schnittpunkte die Projektionen der Erzeugenden der bez. Cylinder, so durchkreuzen sie sich in vier Punkten der Projektion u' der Durchdringungslinie. Die Kurve u' berührt die scheinbaren Umrißlinien beider Cylinder je zweimal; die Berührungspunkte können auch konjugiert imaginär sein. Die Berührungspunkte der Umrißlinie, die c' in A' berührt, erhält man, wenn man durch A' eine Parallele zu $U'T$ und durch ihren Schnittpunkt V mit e_1 eine Parallele zu TR_1 zieht; letztere schneidet k in O und P; die zugehörigen Mantellinien enthalten dann die Berührungspunkte J' resp. K'. Ganz analog erhält man die Berührungspunkte von u'' mit den Umrißlinien des Aufrisses, indem man die Hilfsebenen durch die be-

züglichen Mantellinien legt. Die Hilfsebenen, welche den ersten Cylinder berühren, deren erste Spuren also k tangieren, schneiden den zweiten Cylinder in zwei Mantellinien, die von u und deren Projektionen von u' resp. u'' berührt werden. Ebenso schneiden die Hilfsebenen, die den zweiten Cylinder berühren, deren Spuren in E

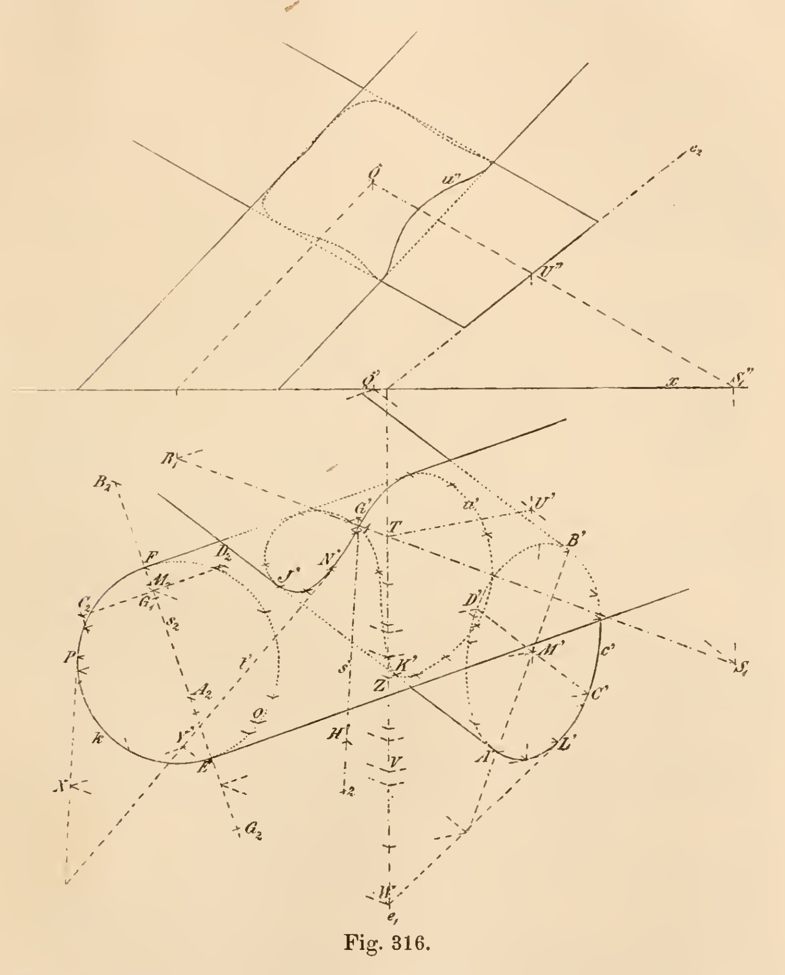


Fig. 316.

also c tangieren, den ersten Cylinder in je zwei Mantellinien, deren Projektionen u' resp. u'' berühren.

Die Tangente t von u in einem Punkte N erscheint als Schnitt der beiden Ebenen, die die Cylinder längs der bez. Erzeugenden NP resp. NL tangieren. Die Spur der einen in Π_1 berührt k in P, die Spur der andern in E berührt c in L und ihre Projektion be-

rührt c in L'. Die Hilfsebenen schneiden diese beiden Tangentialebenen in Geraden, die zu den bez. Mantellinien parallel laufen, daraus ergiebt sich die Konstruktion eines Punktes von t. Die Spur WX ($\| R_1 T$) der Hilfsebene schneidet die genannten Tangenten von k und c' in X und W (wobei $W = e_1 \times WL$ gewählt ist); sind dann XY' und WY' respektive parallel zu den Umrißlinien des ersten und zweiten Cylinders, so ist Y' ein Punkt von t'; mit Hilfe des ersten Spurpunktes $t' \times PX$ läßt sich unmittelbar t'' zeichnen. Was die Sichtbarkeit von u' und u'' anlangt, so ist zu bemerken, daß nur solche Teile dieser Kurven sichtbar sein können, die sich auf den sichtbaren Teilen beider Cylinder befinden. Man sucht also bei beiden Cylindern die sichtbaren Teile auf und zwar so, als ob jeder nur allein vorhanden wäre; sie werden von den Umrißlinien begrenzt; ein Punkt von u' (oder u'') ist dann sichtbar, wenn die Erzeugenden durch ihn bei beiden Cylindern auf den sichtbaren Teilen ihrer ersten (oder zweiten) Projektion liegen. Die sichtbaren Teile von u' resp. u'' endigen auf den Umrißlinien.

499. Jede beliebige Projektion von u zeigt zwei Doppelpunkte — gewöhnliche oder isolierte oder imaginäre — wie wir jetzt nachweisen wollen. Wir werden im Folgenden speziell die Doppelpunkte von u' bestimmen, die Betrachtungen bleiben indessen mit geringen Modifikationen für jede beliebige Projektionsrichtung gültig. Alle zu Π_1 normale Sehnen des ersten Cylinders werden durch eine Ebene halbiert, die auch die Berührungspunkte der zu Π_1 normalen Cylindertangenten und somit die Umrißlinien des Cylinders enthält (vergl. 478); die erste Spur dieser Ebene ist EF, wenn E und F die Spurpunkte der Umrißlinien sind. Ebenso halbiert eine Ebene die zu Π_1 normalen Sehnen des zweiten Cylinders, sie enthält seine Umrißlinien und schneidet seine Basisebene E in AB. Die Schnittlinie beider Ebenen sei s, die erste projizierende Ebene durch s schneide den ersten Cylinder in dem Kegelschnitt i, den zweiten in dem Kegelschnitt j. Die Linie s halbiert zugleich die zu Π_1 senkrechten Sehnen von i und von j; s ist deshalb ein gemeinsamer Durchmesser von i und j; die zu s konjugierten Durchmesser von i und j stehen auf Π_1 senkrecht. Die vier Schnittpunkte von i und j liegen paarweise auf zwei Normalen zu Π_1, ihre ersten Projektionen liefern die beiden Doppelpunkte von u'; es kommt also nur noch darauf an, die Schnittpunkte von i und j zu finden.

Um zunächst die Projektion s' von s zu zeichnen, auf der die gesuchten Doppelpunkte von u' liegen, haben wir die beiden Ebenen, die die Umrißlinien unserer Cylinder enthalten, zum Schnitt zu

bringen; eine von ihnen besitzt die Spur EF in Π_1, die andere die Spur AB in E. Ihre Schnittlinien mit einer Hilfsebene sind den bezüglichen Umrißlinien parallel; die Hilfsebene durch einen Punkt Z von e_1 schneidet Π_1 in ZM_2 ($\parallel TR_1$) und E in ZM ($\parallel TU$, $ZM' \parallel TU'$); durch M_2 auf EF und durch M' auf $A'B'$ zieht man die Parallelen zu den bez. Umrißlinien; sie treffen sich in einem Punkte G' von s'. Ganz analog ergiebt sich der Punkt H' von s'. Die Schnittpunkte von i und j bestimmt man nun nicht direkt, sondern projiziert beide Kurven durch Strahlen parallel zu den Mantellinien des ersten Cylinders auf Π_1. Bezeichnet man mit i_2 und j_2 diese Projektionen von i und j, so ist $i_2 = k$ und zugleich $EF = s_2$ die gleichnamige Projektion von s; die eine Achse A_2B_2 von j_2 liegt auf s_2, die andere C_2D_2 steht in M_2 darauf senkrecht, da ja beim Kreise konjugierte Durchmesser zu einander senkrecht sind. Die Punkte A_2, B_2, M_2, C_2, D_2 liegen hierbei auf Parallelen zu R_1T, die e_1 in den nämlichen Punkten treffen, wie die Geraden durch A', B', M', C', D', die zu $U'T$ parallel sind ($A'V \parallel U'T$, $VA_2 \parallel TR_1$ u. s. w.); denn je zwei entsprechende Punkte A', A_2 u. s. w. liegen in einer der parallelen Hilfsebenen.

Wir haben nun die Schnittpunkte von k und j_2 zu bestimmen, wobei wir nach 396 u. ff. verfahren könnten, indem wir an dem unendlich fernen Punkte von C_2D_2 die Involution gemeinsamer harmonischer Polaren und ihre Doppelstrahlen bestimmen. Die ersten Projektionen der zugehörigen Mantellinien des ersten Cylinders decken sich dann paarweise und tragen die beiden Doppelpunkte 1, 2 von u' (in der Figur ist 1 ein gewöhnlicher, 2 ein isolierter Doppelpunkt). Die vier Schnittpunkte von k und j_2 liegen paarweise auf zwei zu s_2 normalen Geraden g_1 und g_2; k, j_2 und das Geradenpaar g_1g_2 bilden also drei Kegelschnitte eines Büschels mit den nämlichen vier Grundpunkten und werden deshalb von jeder Geraden in drei Punktepaaren einer Involution geschnitten. Loten wir alle diese Involutionen auf s_2, so haben dieselben alle ein Punktepaar gemein, nämlich das Punktepaar $G_1 = g_1 \times s_2$, $G_2 = g_2 \times s_2$; wir können dieses also als gemeinsames Punktepaar zweier Involutionen finden. Die eine Involution ist bestimmt durch die beiden Punktepaare E, F und A_2, B_2; zwei Punktepaare einer andern Involution erhalten wir, indem wir k und j_2 mit einer Geraden schneiden und die Schnittpunkte auf s_2 loten; am besten wählt man dazu die Gerade durch C_2 parallel zu s_2, die also j_2 berührt. Das Aufsuchen des gemeinsamen Punktepaares G_1, G_2 zweier Involutionen geschieht dann nach 353. Die Bestimmung der Doppelpunkte von u'' kann

analog vorgenommen werden. Die Doppelpunkte von u' können entweder reell oder konjugiert imaginär sein, je nachdem das gemeinsame Punktepaar der beiden Involutionen reell oder imaginär ist. Die reellen Doppelpunkte sind entweder beide gewöhnliche oder beide isolierte, oder es giebt unter ihnen einen gewöhnlichen und einen isolierten, je nachdem k und j_2 vier, oder keinen, oder zwei reelle Punkte gemeinsam haben.

500. Durchdringung eines geraden Kreiskegels mit einem geraden Kreiscylinder (Fig. 317). Der Basiskreis k des Kegels liege in Π_1, der Basiskreis c des Cylinders in einer beliebigen Ebene E mit den Spuren e_1 und e_2, und es sei c^0 der um e_1 in Π_1 umgelegte Kreis c. Zur Konstruktion benutzen wir eine Seitenrißebene Π_3, die zu Π_1 senkrecht und zu den Mantellinien des Cylinders parallel ist, also auf e_1 senkrecht steht; gleichzeitig soll Π_3 durch den Scheitel S des Kegels gehen ($y = \Pi_3 \times \Pi_1$, $y \perp e_1$). Wir suchen dann die dritte Spur e_3 von E und mit ihrer Hilfe die kleine Achse $B'C$ von c' ($Y = y \times e_1$, $YB''' = CB^0$), wonach sich dann der Grundriß des Cylinders ergiebt. Nun ziehen wir durch S eine Parallele a zu den Erzeugenden des Cylinders, sie liegt in Π_3 und schneidet Π_1 in A_1 und E in A_2 ($a''' \perp e_3$, $a''' \times y = A_1$, $a''' \times e_3 = A_2'''$, $A_2'A_2''' \perp y$). Alle Hilfsebenen durch die Achse a schneiden sowohl aus dem Cylinder wie aus dem Kegel Mantellinien, ihre Schnittpunkte gehören der Durchdringungskurve u an. Jede Hilfsebene besitzt in Π_1 eine durch A_1 verlaufende Spur und in E eine durch A_2 verlaufende Spur, beide Spuren schneiden sich auf e_1. Verbindet man also irgend einen Punkt von e_1 einerseits mit A_1, andererseits mit A_2', so schneidet erstere Linie k in zwei Punkten und bestimmt so zwei Erzeugende des Kegels, während letztere Linie c' in zwei Punkten trifft und so zwei Erzeugende des Cylinders bestimmt; die vier Schnittpunkte dieser Erzeugenden liegen auf u. Anstatt nun c' mit den Strahlen durch A'_2 zu schneiden, ist es zweckmäßig, die Ebene E um e_1 in Π_1 umzulegen und c^0 mit den Strahlen durch $A_2{}^0$ zu schneiden. So erhält man z. B. auf der Umrißlinie des Cylinders, die c' in E' berührt, die Berührungspunkte F' und G' von u', indem man den Punkt $A_2{}^0E^0 \times e_1$ mit A_1 verbindet, diese Linie mit k in F_1 und G_1 schneidet; dann liegt F' auf $S'F_1$ und G' auf $S'G_1$. Berührt $A_2{}^0U$ den Kreis c^0 in H^0 und schneidet A_1U den Kreis k in J_1 und K_1, so berühren $S'J_1$ und $S'K_1$ die Kurve u' in J' und K', wo H^0, J', K' auf einer Parallelen zu y liegen. Berührt A_1V den Kreis k in L_1 und schneidet $A_2{}^0V$ den Kreis c^0 in M^0 und N^0, so werden die zugehörigen Erzeugenden des Cylinders von u

berührt, so die Erzeugende durch M im Punkte L ($M^0L' \parallel y$, $S'L_1 \times M^0L' = L'$). Im besonderen schneidet Π_3 Cylinder und Kegel

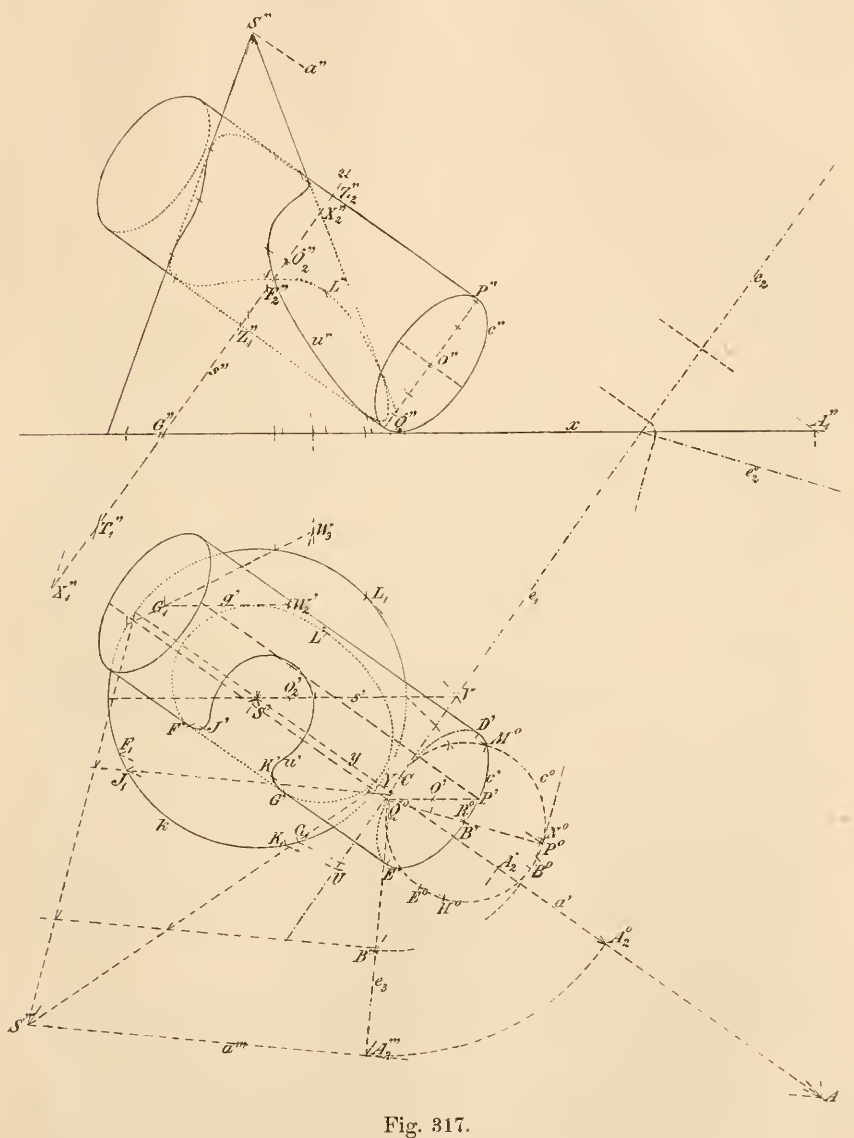


Fig. 317.

in Erzeugenden, deren Schnittpunkte aus dem Seitenriß entnommen werden können, man erhält so die vier Schnittpunkte von u' mit y.

Um den Aufriß u'' der Durchdringungslinie genau zu zeichnen,

verfährt man am besten so, daß man für jeden Punkt von u'' die zweiten Projektionen der beiden Mantellinien, die ihn enthalten, aufsucht. Die Mantellinien des Kegels ergeben sich unmittelbar im Aufriß; um diejenigen des Cylinders zu gewinnen, machen wir folgende Überlegung. Die projizierenden Ebenen durch die Erzeugenden des Cylinders stehen auf Π_2 und auf E, also auch auf e_2 senkrecht; sie schneiden deshalb E in zu e_2 senkrechten Geraden. Legt man diese Geraden mit der Ebene E um e_1 in Π_1 nieder, so sind sie zu e_2^0 senkrecht, wenn e_2^0 die mit E niedergelegte zweite Spur bedeutet. Der zu e_2 parallele Durchmesser PQ des Kreises c erscheint im Aufriß als die zu e_2 parallele Achse $P''Q''$ von c'', deren Endpunkte den Umrißlinien des Cylinders angehören; um sie zu zeichnen, benutzt man den zu e_2^0 parallelen Durchmesser P^0Q^0 von c^0, lotet P^0, Q^0 auf e_2^0 und überträgt sie von da auf e_2; durch diese Punkte gehen dann die verlängerten Umrißlinien. Die ersten Projektionen dieser Umrißlinien gehen verlängert durch die Punkte P^0 resp. Q^0, sie enthalten je zwei Punkte von u', die von je zwei Erzeugenden des Kegels ausgeschnitten werden, deren erste Spurpunkte auf den Verbindungslinien von A_1 mit $e_1 \times P^0A_2^0$ resp. $e_1 \times Q^0A_2^0$ liegen. Hiernach ergeben sich die Berührungspunkte von u'' mit den Umrißlinien des Cylinders und ganz analog mit den Umrißlinien des Kegels, wenn man Hilfsebenen durch a benutzt, die sie enthalten. Ist L'' irgend ein Punkt von u'', so sind seine Abstände von den Umrißlinien des Cylinders gleich den gegenseitigen Abständen der drei projizierenden Ebenen durch die bezüglichen Erzeugenden des Cylinders. Da aber PQ ($\| e_2$) zu den projizierenden Ebenen normal ist, so haben ihre Schnittpunkte mit PQ die gleichen Abstände wie sie selbst; diese Schnittpunkte sind P, Q und R, wenn $MR \perp PQ$ und M der auf c liegende Endpunkt der durch L gehenden Mantellinie des Cylinders ist. Die Abstände des Punktes L'' von den Umrißlinien des Cylinders sind demnach gleich R^0P^0 resp. R^0Q^0 ($M^0R^0 \perp P^0Q^0$, $L'M^0 \| y$); u'' berührt im Punkte L'' die Projektion der bez. Mantellinie des Cylinders, da u die Mantellinie selbst in L berührt. Ganz analog können wir für jeden Punkt von u'' die durch ihn verlaufende Erzeugende des Cylinders finden.

Die Sichtbarkeit der Kurven u' und u'' ergiebt sich wie in der vorausgehenden Aufgabe, indem man beim Cylinder und Kegel, und zwar bei jedem für sich allein, die sichtbaren Teile aufsucht; die Punkte der Kurven u' resp. u'', die den sichtbaren Teilen beider Flächen angehören, sind selbst sichtbar. Die sichtbaren Teile der Kurven u' und u'' enden auf den Umrißlinien der Flächen.

501. Die Projektionen der Durchdringungskurve u unserer Flächen zeigen wie im vorhergehenden Beispiele je zwei Doppelpunkte. Wir wollen hier die Konstruktion der Doppelpunkte von u'' besprechen, die sich zur früheren im wesentlichen analog gestaltet. Alle zu Π_2 normalen Sehnen des Kegels werden von einer zu Π_2 parallelen Ebene durch S halbiert, alle zu Π_2 normalen Sehnen des Cylinders werden von einer Ebene halbiert, welche die Mantellinien durch P und Q enthält, die im Aufriß als Cylinderumriß erscheinen. Die Schnittlinie s beider Ebenen ergiebt sich hieraus; $s' \parallel x$ geht durch S', $s'' \parallel e_2$ geht durch O_2'', wenn O_2 der Schnittpunkt der Cylinderachse mit s ist ($O'O_2' \parallel y$, $O''O_2'' \perp e_2$). Die Ebene durch s senkrecht zu Π_2 schneidet den Kegel in einer Ellipse i_2, deren eine Achse X_1X_2 ist (X_1'' und X_2'' liegen auf den Umrißlinien des Kegels), sie schneidet den Cylinder in einer Ellipse j_2, deren eine Achse Z_1Z_2 ist (Z_1'' und Z_2'' liegen auf dem Umriß des Cylinders). Die vier Schnittpunkte von i_2 um j_2 haben dann folgende Eigenschaften (vergl. 396 u. ff.). Ihre Projektionen auf Π_2 fallen paarweise in die Doppelpunkte 1 und 2 von u'' zusammen. Jede Gerade in der Ebene der beiden Kegelschnitte i_2 und j_2 schneidet diese in zwei Punktepaaren, deren Projektionen auf Π_2 zwei Punktepaare einer Involution liefern, der auch das Punktepaar 1, 2 angehört. So bilden X_1'', X_2''; Z_1'', Z_2'' und 1, 2 drei Punktepaare einer Involution. Eine zweite Involution erhalten wir, wenn wir im Endpunkte W_2 der zweiten Achse von j_2 die Tangente g von j_2 ziehen ($g' \parallel s'$, $g'' = s''$). Um die Schnittpunkte T_1, T_2 von g mit dem Kegel zu gewinnen, schneiden wir den Kegel mit der Ebene Sg, deren erste Spur G_1W_3 ist (G_1 ist die erste Spur von g und W_3 die erste Spur von SW_2, $W_2'' = O_2''$); G_1W_3 schneidet dann auf k die Spurpunkte der Mantellinien des Kegels aus, die T_1, T_2 enthalten. Die drei Punktepaare O_2'' (doppelt), $T_1''T_2''$ und 1, 2 bilden dann ebenfalls eine Involution und aus beiden Involutionen ergeben sich 1 und 2 nach 353.

502. Durchdringung von Kugel und Kegel (Fig. 318). Hierbei wird man stets Hilfsebenen in Anwendung bringen, die das von dem Kegelscheitel auf eine Projektionsebene gefällte Lot enthalten; außerdem wird man eine zweite Projektionsebene wählen, die zur Ebene der Basiskurve des Kegels senkrecht steht. In der Figur ist der Einfachheit halber die Basiskurve c des Kegels in Π_1 angenommen; S', S'' sind die Projektionen des Scheitels, k' und l'' die scheinbaren Umrißkreise der Kugel. Sind von c ein Paar konjugierte Halbmesser MA und MB gegeben, so zeichne man einen zu c affinen Kreis c_1 mit dem Radius MA; dann ist B_1 der affine

Punkt zu B, S_1 der affine Punkt zu S' ($B_1M \perp AM$, $S'S_1 \parallel BB_1$, $S'S_2 \parallel BM$, $S_1S_2 \parallel B_1M$). Sind J_1, K_1 die Berührungspunkte der Tangenten von S_1 an c_1 und J, K die affinen Punkte auf c, so sind $S'J$ und $S'K$ die Umrißlinien des Kegels. Um nun einzelne Punkte der Durchdringungslinie u bezw. ihrer Projektion u' zu finden, ziehe man durch S_1 Sehnen des Kreises c_1, z. B. C_1D_1, suche die affine Sehne CD der Ellipse c und bestimme die Durchstoßpunkte

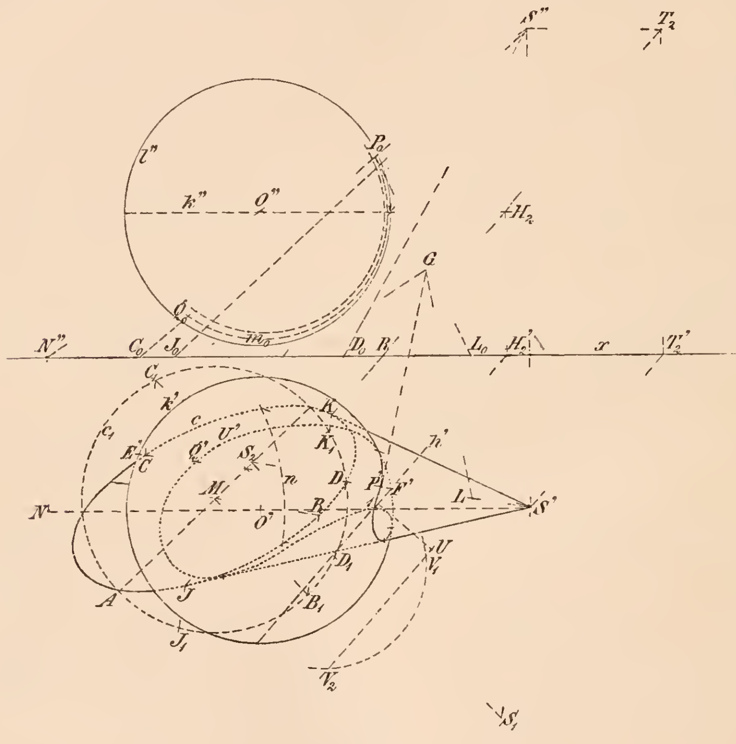


Fig. 318.

der Mantellinien SC und SD mit der Kugel. Die Ebene SCD ($\perp \Pi_1$) schneidet auf der Kugel einen Kreis m mit dem Durchmesser EF aus; diese Ebene drehen wir samt dem Kreise m und den Geraden SC und SD um die Achse SS', bis sie zu Π_2 parallel wird. Im Aufriß erhält man dann den Kreis m_0 und die Linien $S''C_0$ und $S''D_0$ und ihre Schnittpunkte P_0 und Q_0 ($S''D_0$ und m_0 schneiden sich in der Figur nicht), die durch die Drehung aus den in der Ebene SCD liegenden Punkten P und Q von u hervorgegangen sein müssen; es finden sich also $P'S'$ und $Q'S'$ gleich den Abständen der Punkte P_0

resp. Q_0 von $S''S'$. Verfährt man in der geschilderten Weise mit der Umrißlinie $S'J$ des Kegels, so erhält man auf ihr die Berührungspunkte mit u'. Die Berührungspunkte von u' und k' liegen offenbar auf den Projektionen der Mantellinien, die k treffen; diese Mantellinien liegen also noch auf einem zweiten Kegel, dessen Scheitel S und dessen Basiskurve k ist. Der letztgenannte Kegel besitzt als erste Spurkurve einen Kreis n mit dem Mittelpunkt N — dem Spurpunkt von SO — und einem Radius, der sich zum Kugelradius verhält, wie $S''N'' : S''O''$. Die Spurkurven c und n beider Kegel schneiden sich in Punkten, die mit S' verbunden auf dem Kreise k' seine Berührungspunkte mit u' ergeben. Über die Sichtbarkeit von u' entscheidet man wie in den früheren Beispielen. Der Aufriß ist in der Figur weggelassen, würde indessen leicht hinzuzufügen sein.

Die Tangente im Punkte P von u ist die Schnittlinie der Tangentialebene im Punkte P der Kugel mit der Tangentialebene an den Kegel längs der Erzeugenden SC. Die Tangente CG im Punkte C von c ist die Spur der letzteren Ebene, die Spur LG der ersteren Ebene ist senkrecht zu $O'P'$ und enthält den Spurpunkt L der Tangente des Kreises m im Punkte P $\big(P_0L_0$ Tangente von m_0, $LS' = (L_0 \dashv S''S')\big)$; dann ist $P'G$ die Tangente von u' im Punkte P'.

503. Die Bestimmung der Doppelpunkte 1 und 2 von u' geschieht analog zu den früheren Beispielen. Alle zu Π_1 normalen Kugelsehnen werden durch die Ebene des Umrisses k halbiert, ebenso alle zu Π_1 normalen Kegelsehnen durch die Ebene der Umrißlinien SJ und SK. Denn Endpunkte, Mittelpunkt und unendlich ferner Punkt einer solchen Sehne liegen harmonisch, also auch die Spurpunkte der von S durch sie gelegten Strahlen, die auf einer Geraden durch S' liegen; zwei derselben fallen auf c, einer nach S', der vierte also auf die Polare JK des Punktes S' in Bezug auf c. Beide Ebenen schneiden sich in einer Geraden h $(h \parallel JK \parallel ST_2,\ H_2 = k'' \times RT_2)$, deren Projektion h' die Doppelpunkte von u' trägt. Die projizierende Ebene durch h schneidet die Kugel in einem Kreise i_2 und den Kegel in einer Ellipse j_2; h ist zugleich Durchmesser von i_2 und Achse von j_2, so daß ihre vier Schnittpunkte paarweise auf zwei Senkrechten von Π_1 liegen und bei der Projektion in die Doppelpunkte 1 und 2 von u' zusammenfallen. Für die Konstruktion der Schnittpunkte von i_2 und j_2 gilt das in den vorangehenden Beispielen Gesagte und soll hier nicht wiederholt werden, nur sei hinzugefügt, daß die eine Achse von j_2 durch den Umriß SJ und SK begrenzt wird, die andere also im Mittelpunkt darauf senk-

recht steht; ihre Länge ergiebt sich durch Umlegen der bezüglichen projizierenden Ebene. Von den Involutionen, denen das Punktepaar 1, 2 angehört, wird hier eine bestimmt durch die Punktepaare $h' \times k'$ und $h' \times S'J$, $h' \times S'K$, eine zweite wird definiert durch Lotung der Punktepaare U (doppelt) und V_1, V_2 auf h'.

504. Eigenschaften der Durchdringungskurve u zweier Kegelflächen Λ_1 und Λ_2, die eine beliebige Lage zu einander haben.[19]) Die Cylinderflächen erscheinen als spezielle Fälle der Kegelflächen und brauchen nicht besonders behandelt zu werden. Zunächst ist zu erkennen, daß jede Ebene die Kurve u in vier Punkten schneidet; es sind dies die vier gemeinsamen Punkte der beiden Kegelschnitte, die die Ebene aus den beiden Flächen ausschneidet. Die vier Punkte können alle reell sein, oder es ist ein Paar konjugiert imaginär, oder es sind zwei Paare konjugiert imaginär (vergl. 401). Die Durchdringungskurve u zweier Kegelflächen wird deshalb als Raumkurve 4. Ordnung bezeichnet, man nennt nämlich Ordnung einer Raumkurve die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Ebene. Seien nun S_1 und S_2 die Scheitel unserer Kegelflächen und s ihre Verbindungslinie, so giebt es zu s eine Polarebene Σ_1 in Bezug auf den Kegel Λ_1 und eine Polarebene Σ_2 in Bezug auf Λ_2 (vergl. 478); beide mögen sich in t schneiden. Eine beliebige Ebene E durch s enthält zwei Erzeugende a_1, b_1 von Λ_1 und zwei Erzeugende a_2, b_2 von Λ_2 und die vier Punkte $E_1 = a_1 \times a_2$, $E_2 = a_1 \times b_2$, $E_3 = a_2 \times b_1$, $E_4 = b_1 \times b_2$ von u. Der Punkt $E_1E_4 \times E_2E_3 = J$ liegt auf t; denn J liegt auf Σ_1 und auf Σ_2, da $G = s \times E_1E_4$ und J die Strecke E_1E_4 harmonisch trennen, diese aber eine gemeinsame Sehne beider Kegel bildet. Die Ebene tG schneidet Λ_1 resp. Λ_2 in den Kegelschnitten l_1 resp. l_2, die sich — abgesehen von E_1 und E_4 — noch in zwei weiteren Punkten F_1F_4 treffen, deren Verbindungslinie wiederum durch G geht. Denn t ist die Polare von G in Bezug auf die beiden Kegelschnitte l_1, l_2 — t liegt ja in Σ_1 und Σ_2 —, nach 401 liegen also die Punkte $F_1E_1 \times F_4E_4 = T_1$ und $F_1E_4 \times F_4E_1 = T_2$ auf t, während $E_1E_4 \times F_1F_4 = G$ der Pol von t für l_1 und l_2 ist. Zugleich ist T_1 der Pol von GT_2 und T_2 der Pol von GT_1 für beide Kegelschnitte l_1, l_2, d. h. die Ebene sT_1 ist die Polarebene von S_1T_2 in Bezug auf Λ_1, und von S_2T_2 in Bezug auf Λ_2, und ebenso ist sT_2 die Polarebene von S_1T_1 in Bezug auf Λ_1 und von S_2T_1 in Bezug auf Λ_2. Auf jeder Geraden durch T_1 werden mithin beide Kegelsehnen durch T_1 und die Ebene sT_2 harmonisch getrennt; haben beide Sehnen also einen Endpunkt gemein, so haben sie auch den zweiten End-

punkt gemein. Jede Gerade durch T_1, die nach einem Punkte von u gezogen ist, trifft u noch zum zweiten Male; Gleiches gilt für die Geraden durch T_2. Demnach bilden T_1 resp. T_2 die Scheitel zweier Kegel K_1 resp. K_2, deren Erzeugende die Kurve u je zweimal treffen; also ganz so wie es sich mit den Erzeugenden der Kegel Λ_1 und Λ_2 verhält. Jede Ebene durch T_1 schneidet den Kegel K_1 in zwei reellen oder konjugiert imaginären Erzeugenden, auf denen paarweise die vier Schnittpunkte der Ebene mit u liegen; jede Ebene schneidet somit den Kegel K_1 in einer Kurve 2. Ordnung — die von jeder Geraden der Ebene in zwei reellen oder konjugiert imaginären Punkten getroffen wird. Die früher von uns untersuchten Kegelschnitte sind solche Kurven 2. Ordnung und umgekehrt ist jede Kurve 2. Ordnung ein solcher Kegelschnitt. Die Durchdringungskurve u liegt auf vier Kegelflächen 2. Ordnung.

505. Projiziert man die Kurve u durch parallele Strahlen, oder durch Strahlen aus einem Centrum, so erhält man eine Kurve 4. Ordnung u' mit zwei Doppelpunkten. Der Beweis hierfür ist dem in den vorangehenden Beispielen gegebenen völlig analog und kann deshalb übergangen werden. Die Kurve u' besitzt ferner acht Doppeltangenten, denn jeder der vier Kegel durch u zeigt bei der Projektion als wahren Umriß zwei Gerade, die von u in je zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten werden; die acht scheinbaren Umrißlinien sind dann die Doppeltangenten. Die Doppeltangenten können natürlich auch paarweise imaginär werden.

Die Punkte von u liegen paarweise auf Erzeugenden des Kegels K_1 (Gleiches gilt für die übrigen Kegel) und werden durch T_1 und die Ebene $S_1S_2T_2$ harmonisch getrennt, die Tangenten in den Punkten eines solchen Paares liegen in der bezw. Tangentialebene des Kegels K_1 und schneiden sich in einem Punkte der Ebene $S_1S_2T_2$. Zu jedem Punkte von u lassen sich mit Hilfe des Tetraëders $S_1S_2T_1T_2$ noch sieben weitere Punkte von u ableiten. Acht derartig zusammengehörige Punkte liegen sowohl paarweise auf vier Strahlen durch S_1, wie auf vier Strahlen durch S_2, wie auf vier Strahlen durch T_1 und auf vier Strahlen durch T_2; je zwei dieser acht Punkte werden entweder durch eine Ecke des Tetraëders $S_1S_2T_1T_2$ und seine Gegenseite oder durch ein Paar Gegenkanten harmonisch getrennt. Die Punkte von u in den Tetraëderseiten haben stationäre Schmiegungsebenen (vergl. 457).

Es ist noch zu erwähnen, daß bei der obigen Betrachtung die Punkte F_1 und F_4 konjugiert imaginär sein können; dann werden

auch die Scheitel T_1 und T_2 und damit die bezw. Kegel imaginär; die Kurve u liegt nur noch auf zwei reellen Kegeln.

506. Spezielle Durchdringungskurven zweier Kegelflächen Λ_1 und Λ_2. Zwei Kegelflächen, die denselben Kegelschnitt a enthalten, haben noch einen weiteren Kegelschnitt b gemein. Seien S_1 und S_2 die Scheitel der Kegel, ferner A die Ebene des Kegelschnittes a, endlich q die Polare des Punktes $Q = \mathsf{A} \times S_1S_2$ in Bezug auf die Kurve a. Legen wir nun durch S_1S_2 eine beliebige Ebene, die a in A_1 und A_2 schneidet, so gehören die Punkte $S_1A_1 \times S_2A_2 = B_1$ und $S_1A_2 \times S_2A_1 = B_2$ der Durchdringungskurve b an, die eine ebene Kurve sein muß. Die vier Erzeugenden bilden nämlich ein Vierseit und es liegen die Punkte A_1, A_2, Q und $A_1A_2 \times B_1B_2$ harmonisch und ebenso die Punkte S_1, S_2, Q und $S_1S_2 \times B_1B_2 = R$; d. h. die Gerade B_1B_2 liegt in der Ebene qR. Aber sowohl q wie R sind unabhängig von der Wahl der Ebene durch S_1S_2, so daß die ganze Kurve b in der Ebene qR liegt und natürlich einen Kegelschnitt bildet.

Die Kegelflächen berühren sich in den beiden Schnittpunkten von a und b; denn die Tangenten dieser Kurven in einem ihrer Schnittpunkte sind zugleich Tangenten der beiden Kegelflächen; ihre Ebene ist also für beide Flächen Tangentialebene und geht demnach auch durch ihre Scheitel. Umgekehrt zerfällt die Schnittkurve u zweier Kegel, die sich an zwei Stellen J und K berühren, in zwei Kegelschnitte. Denn eine Ebene durch J, K und einen Punkt P von u schneidet beide Kegel in Kegelschnitten, die sich in J und K berühren und durch P gehen, also zusammenfallen. Zwei Kegel mit gemeinsamem Scheitel durchschneiden sich in vier Erzeugenden. Zwei Kegelflächen, von denen jede den Scheitel der andern enthält, durchdringen sich in einem Kegelschnitt, wenn sie sich längs der Verbindungslinie der Scheitel berühren. Ist $S_1S_2 = s$ die gemeinsame Erzeugende und Σ die Ebene, die beide Kegel Λ_1 und Λ_2 längs s berührt, sind ferner a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; $d_1, d_2 \ldots$ sich schneidende Erzeugende beider Kegel und $A, B, C, D, \ldots$ ihre Schnittpunkte, so betrachten wir zwei Ebenenbüschel mit den Achsen s resp. a_1, die den Kegel Λ_1 erzeugen und zwei Ebenenbüschel mit den Achsen s resp. a_2, die den Kegel Λ_2 erzeugen. Der Ebenenbüschel $s\,(b_1, c_1, d_1, \ldots s)$ oder $s\,(b_2, c_2, d_2, \ldots s)$ ist zu den Büscheln $a_1\,(b_1, c_1, d_1, \ldots s)$ und $a_2\,(b_2, c_2, d_2, \ldots s)$ projektiv, da sie Kegelflächen miteinander erzeugen; die letzten beiden Büschel sind aber zugleich perspektiv, denn die Ebenen $a_1 s$ und $a_2 s$ sind identisch; ihre entsprechenden Ebenen schneiden sich also in den

Strahlen eines Strahlbüschels, dessen Ebene einen beiden Kegelflächen gemeinsamen Kegelschnitt enthält.

507. Eigenschaften der Raumkurven 3. Ordnung.[20]) Zwei Kegelflächen Λ_1 und Λ_2 mit einer gemeinsamen Erzeugenden s durchdringen sich noch in einer Raumkurve 3. Ordnung u. Denn jede Ebene schneidet die ganze Durchdringungskurve, die sich aus s und u zusammensetzt, in vier Punkten. Sind S_1 und S_2 die auf s liegenden Scheitel der Kegel und schneiden sich in den Punkten $A, B, C, D \ldots$ von u respektive die Erzeugenden $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 \ldots$, so ist das Ebenenbüschel $s(b_1, c_1, d_1, \ldots) = s(b_2, c_2, d_2, \ldots)$ projektiv zu den Büscheln $a_1(b_1, c_1, d_1, \ldots)$ und $a_2(b_2, c_2, d_2, \ldots)$. Die letzteren Büschel, deren Achsen sich in A schneiden, sind projektiv — aber nicht perspektiv — und erzeugen eine Kegelfläche mit dem Scheitel A, die ebenfalls durch u hindurchgeht. Jeder Punkt der Raumkurve 3. Ordnung kann als Scheitel eines Kegels 2. Ordnung dienen, der sie ganz enthält. Mit andern Worten: Die Projektion einer Raumkurve 3. Ordnung aus einem ihrer Punkte auf irgend eine Ebene ist immer ein Kegelschnitt.

Eine Raumkurve 3. Ordnung ist durch sechs von ihren Punkten bestimmt. Denn jeder dieser Punkte kann als Scheitel eines Kegels angesehen werden, der die Strahlen nach den fünf übrigen zu Erzeugenden hat, und je zwei dieser Kegel haben eine Erzeugende gemein, durchdringen sich also außerdem in der Raumkurve 3. Ordnung.

Jede Ebene hat mit der Raumkurve 3. Ordnung einen oder drei reelle Punkte gemein. Wenden wir dieses Resultat auf die unendlich ferne Ebene an, so erkennen wir, daß eine Raumkurve 3. Ordnung in einer oder in drei Richtungen ins Unendliche verläuft (in jeder Richtung zwei Äste) und daß demnach ein oder drei Cylinder durch sie hindurchgelegt werden können.

508. Die Raumkurve 3. Ordnung u als Schnitt zweier Kegel Λ_1 und Λ_2 mit einer gemeinsamen Mantellinie m zu konstruieren (Fig. 319). Wir denken uns die Spurkurven beider Kegel in einer Ebene Π bestimmt; es seien die Kegelschnitte l_1 und l_2 respektive, deren einer Schnittpunkt der Spurpunkt M von m ist; ihre andern Schnittpunkte seien A, B, C; ferner seien S_1' und S_2' die Projektionen der Scheitel S_1 und S_2 auf Π. Kennen wir noch den Abstand des Scheitels S_1 von Π, so ist die räumliche Lage beider Kegel gegeben, da $S_1S_1' : S_2S_2' = S_1'M : S_2'M$ ist. Da wir hier bloß die Projektion u' von u auf Π zeichnen wollen, kommt es auf den

Abstand $S_1 S_1'$ nicht an, der denn auch in Fig. 319 weggelassen ist. Jede Ebene durch m schneidet Π in einer Geraden durch M, und diese trifft l_1 und l_2 je in einem Punkte P_1 und P_2; $S_1 P_1$ und $S_2 P_2$ liefern einen Punkt P von u und ihre Projektionen einen Punkt P' von u'. Die Tangente t von u im Punkte P liegt in den Tangentialebenen der Kegel längs der Erzeugenden $S_1 P$ resp. $S_2 P$, deren Spurlinien die Tangenten $P_1 T$ von l_1 und $P_2 T$ von l_2 sind; ihr Schnittpunkt T ist der Spurpunkt von t, liegt also auch auf t'.

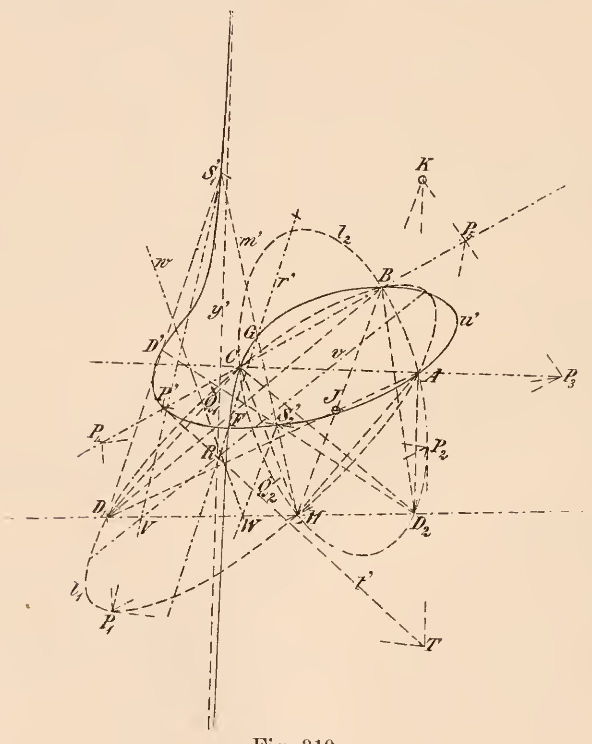


Fig. 319.

Die angegebene Konstruktion ist nur möglich, wenn die Kegelschnitte l_1 und l_2 gezeichnet vorliegen; ist dieses nicht der Fall, oder will man genauere Resultate erzielen, so muß man die projektiven Strahlbüschel benutzen, die die Kurven l_1 und l_2 erzeugen. Soll z. B. die Raumkurve 3. Ordnung durch die sechs Punkte S_1, S_2, A, B, C, D konstruiert werden, so wählen wir ABC als Projektionsebene Π, bestimmen in ihr die Spurpunkte D_1 von $S_1 D$, D_2 von $S_2 D$ und M von $S_1 S_2$, dann gehen die Spurkurven l_1 und l_2 der beiden Kegel durch die gemeinsamen vier Punkte A, B, C, M

und je einen der Punkte D_1 resp. D_2. Hiernach betrachte man l_1 als Erzeugnis der projektiven Strahlbüschel: $D_1\ (A, B, C, \ldots)$ und $M\ (A, B, C, \ldots)$. Schneiden wir den ersteren mit CB, den letzteren mit CA, so erhalten wir perspektive Punktreihen und $J = D_1A \times MB$ ist das Centrum der Perspektivität. Jede Gerade durch J schneidet CB und CA in entsprechenden Punkten der perspektiven Reihen, z. B. P_4 und P_3, die mit D_1 resp. M verbunden einen Punkt von l_1 liefern, z. B. $P_4D_1 \times P_3M = P_1$. Ebenso ist l_2 das Erzeugnis der projektiven Strahlbüschel $D_2\ (A, B, C, \ldots)$ und $M\ (A, B, C, \ldots)$, die auf CB resp. CA perspektive Punktreihen mit $K = D_2A \times MB$ als Centrum der Perspektivität ausschneiden. Jede Gerade durch K liefert zwei entsprechende Punkte der perspektiven Reihen, z. B. P_5 und P_3, die mit D_2 resp. M verbunden einen Punkt von l_2 ergeben, $P_5D_2 \times P_3M = P_2$. J und K werden auf MB durch AD_1 resp. AD_2 ausgeschnitten, man hat dann, um einen Punkt von u zu zeichnen, folgende Linien zu ziehen. Irgend einen Punkt P_3 von AC verbinde man mit J, K und M, den Punkt $P_4 = P_3J \times BC$ mit D_1 und den Punkt $P_5 = P_3K \times BC$ mit D_2, dann schneiden P_4D_1 und P_5D_2 die Gerade P_3M in P_1 resp. P_2 und $S_1P_1 \times S_2P_2 = P$ ist ein Punkt von u.

Unsere Kurve u verläuft nur einmal durchs Unendliche und es soll ihre Asymptote (d. h. die Tangente im unendlich fernen Punkt) gefunden werden. Die unendlich fernen Punkte von u liegen auf parallelen Erzeugenden der Kegel Λ_1 und Λ_2; verschiebt man Λ_1 parallel mit sich selbst im Raume bis sein Scheitel S_1 mit S_2 zusammenfällt und er die Lage $\Lambda_1{}^0$ annimmt, so kommen die parallelen Erzeugenden zur Deckung, bilden also die gemeinsamen Erzeugenden der Kegel Λ_2 und $\Lambda_1{}^0$, abgesehen von der gemeinsamen Erzeugenden m. Die Spurellipse $l_1{}^0$ des Kegels $\Lambda_1{}^0$ ist zu l_1 ähnlich und ähnlich gelegen, M ist das Ähnlichkeitscentrum, S_2' und S_1' sind entsprechende Punkte der ähnlichen Figuren, wonach $l_1{}^0$ gezeichnet werden kann. l_2 und $l_1{}^0$ schneiden sich außer M nur noch in dem reellen Punkte Q_2 ($l_1{}^0$ ist nicht verzeichnet); es sind nun S_2Q_2 und S_1Q_1 parallele Erzeugende ($Q_1 = MQ_2 \times l_1$) und die Tangenten von l_1 in Q_1 und l_2 in Q_2 schneiden sich in einem Punkte der Asymptote y ($y \parallel S_1Q_1 \parallel S_2Q_2$).

509. Die Kurve u' besitzt einen Doppelpunkt, den eine einfache Betrachtung liefert. Die zu Π normalen Sehnen des Kegels Λ_1 werden halbiert durch die Ebene seiner Umrißlinien, ihre Spur ist die Polare v von S_1' in Bezug auf l_1 (vergl. 503), und sie enthält die Gerade VS_1 ($V = v \times D_1D_2$). Ebenso halbiert die Ebene durch

S_2 und die Polare w von S_2' in Bezug auf l_2 die zu Π normalen Sehnen des Kegels Λ_2; diese Ebene enthält noch die Gerade WS_2 ($W = w \times D_1D_2$). Die Schnittlinie r beider Ebenen hat den Punkt $R = v \times w$ zur Spur und enthält außerdem den Punkt $X = VS_1 \times WS_2$. Die zu Π senkrechte Ebene durch r schneidet die beiden Kegel in zwei Kegelschnitten i_1 und i_2 respektive; r ist für beide gemeinsamer Durchmesser und halbiert die zu Π normalen Sehnen beider; die vier Schnittpunkte von i_1 und i_2 liegen also auf zwei Normalen zu Π. Die Kegelschnitte i_1, i_2 und das soeben genannte Normalenpaar bilden drei Kurven eines Büschels (mit vier gemeinsamen Grundpunkten), sie schneiden also r in drei Punktepaaren einer Involution. Das Punktepaar $r \times i_1$ liegt auf den Umrißlinien von Λ_1, das Punktepaar $r \times i_2$ auf den Umrißlinien von Λ_2 (in der Figur sind diese nicht reell); ein Punkt des dritten Paares liegt auf der Normalen zu Π, die den auf m liegenden gemeinsamen Punkt von i_1 und i_2 enthält. In der Projektion bildet hiernach der Doppelpunkt F von u' mit $G = r' \times m'$ ein Punktepaar der Involution auf r', von der ein Punktepaar von dem scheinbaren Umriß des Kegels Λ_1 und ein zweites Punktepaar von dem scheinbaren Umriß des Kegels Λ_2 ausgeschnitten wird; es läßt sich somit F nach 224 oder 318 konstruieren.

Im vorliegenden Falle giebt es keine reellen Umrißlinien von Λ_2, das bezügliche Punktepaar auf r' ist imaginär. Wir projizieren das reelle und das imaginäre Punktepaar, sowie den Punkt G aus S_2' auf w, und die so gefundenen Punkte aus einem Punkte von l_2 (z. B. von A aus) auf l_2, dann entsteht auf l_2 eine Involution. Das imaginäre Punktepaar derselben liegt auf w und das reelle auf einer Geraden, die sich leicht zeichnen läßt; das dritte Paar, von dem wir einen Punkt kennen, liegt auf einer Geraden, die sich mit jenen beiden Geraden in einem Punkte schneidet. Daraus ergiebt sich der zweite Punkt des dritten Paares und somit durch die genannten Projektionen der gesuchte Doppelpunkt F.

Die sphärischen Kegelschnitte.

510. Die Durchdringungskurve einer Kugel mit einer koncentrischen Kegelfläche heißt ein sphärischer Kegelschnitt, wenn die Kegelfläche vom zweiten Grade ist, also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel zur Leitkurve hat. Die Eigenschaften solcher sphärischer Kegelschnitte sollen hier etwas näher untersucht werden.[21]) Wir gehen dabei aus von einer uns schon aus 361 be-

kannten Figur, indem wir einen Rotationskegel mit einer beliebigen Ebene E schneiden und ihm eine Kugel einbeschreiben, die diese Ebene im Punkte F_1 berührt; F_1 ist dann der Brennpunkt der in E liegenden Schnittkurve u. Ist S der Scheitel des Kegels und O das Centrum der Kugel, so machen wir die Ebene SOF_1 zur Projektionsebene Π_1; diese steht auf E senkrecht, so daß sich u als Gerade u' mit den Endpunkten A, B projiziert, wo SA und SB die in Π_1 liegenden Mantellinien des Kegels sind (Fig. 320). Sind J und K die Berührungspunkte von SA und SB mit der Kugel, so bildet JK einen Durchmesser des Berührungskreises vom Kegel mit der Kugel, dessen Ebene zu Π_1 normal steht. Schneidet man nun den Kegel mit dem Scheitel O und der Basiskurve u mit der Kugel, so erhält man einen s p h ä r i s c h e n K e g e l s c h n i t t, dessen Eigenschaften sich in einfachster Weise ergeben.

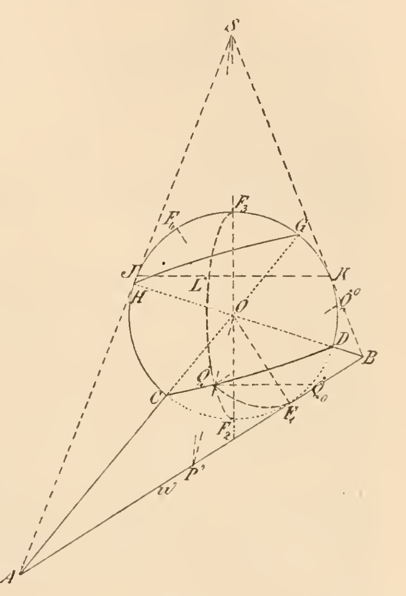


Fig. 320.

511. Die Tangenten aus einem Punkte P an eine Kugel sind gleich lang; durch Projektion dieser Tangenten vom Mittelpunkte O aus auf die Kugel erhält man gleich lange Stücke größter Kreise. Ist P ein Punkt von u, so berührt PS die Kugel, ihr Berührungspunkt L liegt auf dem Kreise mit dem Durchmesser JK und L' fällt auf JK. Die Tangenten PF_1 und PL sind gleich und Bog $QF_1 =$ Bog QL, wenn OP die Kugel in Q trifft. Der Bogen QF_1 gehört einem größten Kreise mit dem Durchmesser F_1F_4 an und der Bogen QL einem größten Kreise mit dem Durchmesser F_2F_3, der auf OS liegt. Da der Bogen QL auf dem Kreise JLK senkrecht steht, so giebt er den s p h ä r i s c h e n A b s t a n d des Punktes Q von jenem Kreise an und es e r s c h e i n t d e r s p h ä r i s c h e K e g e l s c h n i t t a l s O r t d e r P u n k t e, d i e v o n e i n e m f e s t e n P u n k t e F_1 u n d e i n e m f e s t e n K r e i s e KLJ g l e i c h w e i t a b s t e h e n, wobei diese Abstände durch Bogenstücke größter Kreise auf der Kugel zu messen sind. Dreht man den Bogen QF_1 um die Achse F_1O in Π_1, so geht er in F_1Q^0 über ($Q'Q^0 \perp OF_1$); ebenso läßt sich der Bogen QL durch Drehung

um die Achse SO in die Lage KQ_0 bringen ($Q'Q_0 \perp OS$). Demnach ist Bog $KQ_0 =$ Bog F_1Q^0, und da $BK = BF_1$, ist auch Bog $DK =$ Bog DF_1, wenn OB die Kugel in D schneidet; hieraus folgt aber durch Subtraktion Bog $DQ_0 =$ Bog DQ^0. Dies ergiebt eine einfache Konstruktion der Punkte des sphärischen Kegelschnittes. Schneidet man von D aus auf dem Kugelkreise in Π_1 gleiche Bogen ab, z. B. $DQ_0 = DQ^0$, und zieht durch die Endpunkte Senkrechte zu OF_2 und OF_1 respektive, so ist ihr Schnittpunkt die Projektion eines Punktes des sphärischen Kegelschnittes, z. B. Q'.

Da Bog $F_2Q =$ Bog F_2Q_0 und Bog $QL =$ Bog Q_0K ist, so folgt: Bog $F_2Q +$ Bog $QF_1 =$ Bog F_2K; der letztgenannte Bogen ist aber von der Lage des Punktes P unabhängig. Der sphärische Kegelschnitt erscheint also als Ort der Punkte, für die die Summe der sphärischen Abstände von zwei festen Punkten konstant ist. Unter dem sphärischen Abstand zweier Kugelpunkte ist hierbei das von ihnen begrenzte Stück eines größten Kreises zu verstehen. Die Punkte F_1 und F_2 spielen für den sphärischen Kegelschnitt ganz die gleiche Rolle wie die Brennpunkte bei einer Ellipse und werden als seine Brennpunkte bezeichnet. Aus unserem Satze folgt, daß Bog $F_2C =$ Bog F_1D sein muß, es ergiebt sich dies auch aus den Relationen: Bog $F_2J =$ Bog F_2K, Bog $CJ =$ Bog CF_1 und Bog $DF_1 =$ Bog DK; die Summe der sphärischen Abstände eines Kurvenpunktes von den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 ist demnach $=$ Bog CD, d. h. gleich dem sphärischen Abstand der Scheitel C und D.

Es ist (wenn man den Kugelradius als Längeneinheit nimmt): Bog $QF_2 = \pi -$ Bog QF_3; durch Einsetzen dieses Wertes in die Relation: Bog $QF_1 +$ Bog $QF_2 =$ Bog CD kommt: Bog $QF_3 -$ Bog QF_1 $=$ Bog DG. Wir sehen hieraus, daß auch F_1 und F_3 die gleiche Rolle spielen, deshalb nennt man F_1, F_2, F_3, F_4 die vier Brennpunkte unserer Kurve. Je nach der Auswahl zweier Brennpunkte ist die Summe oder die Differenz ihrer sphärischen Abstände von den Kurvenpunkten konstant; die bezüglichen Relationen sind:

$$\text{Bog}\,QF_1 + \text{Bog}\,QF_2 = \text{Bog}\,CD, \qquad \text{Bog}\,QF_3 - \text{Bog}\,QF_1 = \pi - \text{Bog}\,CD,$$
$$\text{Bog}\,QF_3 + \text{Bog}\,QF_4 = 2\pi - \text{Bog}\,CD, \quad \text{Bog}\,QF_4 - \text{Bog}\,QF_2 = \pi - \text{Bog}\,CD.$$

Legt man durch zwei benachbarte Punkte unserer Kurve zwei Ebenen senkrecht zu OF_1 und ebenso zwei Ebenen senkrecht zu OF_2, so ist nach dem vorausgehenden Satze der sphärische Abstand der beiden benachbarten, zu OF_1 senkrechten Kreise gleich dem sphärischen Abstand der beiden zu OF_2 senkrechten Kreise. Die

zwei Paar Kugelkreise durch die benachbarten Kurvenpunkte bilden demnach einen unendlich kleinen Rhombus, dessen Diagonale die Kurventangente in dem betreffenden Punkte ist und den Winkel der genannten Kugelkreise halbiert. Die Kugelkreise, die den Kurvenpunkt mit den Brennpunkten verbinden, stehen aber auf jenen Kreisen senkrecht und wir erhalten den Satz: Die Tangente in einem Punkte eines sphärischen Kegelschnittes halbiert den Winkel (oder Nebenwinkel) der beiden Kreisbogen, die den Punkt mit zwei Brennpunkten verbinden.

512. Die erzielten Resultate lassen sich unmittelbar auf den Kegel mit dem Scheitel O und der Leitkurve u übertragen, der unsere sphärische Kurve aus dem Kugelcentrum projiziert. Die Strahlen OF_1 und OF_2 heißen die Brennstrahlen des Kegels. Die Ebene OAB oder Π_1 ist eine Hauptebene des Kegels; die beiden Geraden, die den $\angle AOB$ und seinen Nebenwinkel halbieren, bilden zwei Achsen des Kegels, dessen dritte Achse auf Π_1 senkrecht steht (vergl. 478). Die beiden Brennstrahlen liegen zu den Achsen symmetrisch und es gilt für sie der Satz: Die Summe der Winkel, die jede Mantellinie des Kegels mit den beiden Brennstrahlen einschließt, ist konstant, nämlich $= \angle AOB$. Dabei ist natürlich auf die richtige Bildung dieser Winkel Rücksicht zu nehmen; läßt man an Stelle eines dieser Winkel den Nebenwinkel treten, so ist die Differenz der beiden Winkel konstant. Ferner ergiebt sich: die Tangentialebene längs einer Mantellinie des Kegels halbiert den einen Winkel der beiden Ebenen, die die Brennstrahlen mit der Mantellinie verbinden. Jede Ebene, die auf einem Brennstrahl des Kegels senkrecht steht, schneidet ihn in einem Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt auf dem betreffenden Brennstrahl liegt.

Die Symmetrieebenen des Kegels sind auch solche für den sphärischen Kegelschnitt, der aus zwei getrennten Teilen besteht entsprechend den beiden Mantelflächen des Kegels.

513. Bei den voranstehenden Betrachtungen hatten wir zur Erzeugung des sphärischen Kegelschnittes einen Kegel benutzt, dessen Basiskurve u zu der schneidenden koncentrischen Kugel in einer besonderen Beziehung stand, indem der Berührungspunkt der Kugel zugleich Brennpunkt von u war. Wir wollen nun zeigen, wie man im allgemeinen Fall die Brennstrahlen eines Kegels konstruieren kann und dadurch wieder zu den früheren Resultaten gelangt. O sei der Scheitel des Kegels, OM die in seinem Innern liegende Kegelachse; als Basisebene des Kegels wählen wir eine zur

Achse senkrechte Ebene, die die Kugel im Schnittpunkte M der Achse mit ihr berührt. Die große Achse der Basisellipse v sei C_1D_1; dann mag Π_1 mit der Ebene OC_1D_1 und Π_2 mit der Basisebene zusammenfallen (in der Fig. 321 ist nur eine Hälfte $C_1E_1D_1$ der umgelegten Ellipse v angegeben). Die Strahlen OC_1, OD_1, OE_1 liefern die Punkte C, D, E des sphärischen Kegelschnittes; dabei ist $OME_1{}^0$ das um OM in Π_1 umgelegte Dreieck OME_1, E^0 der umgelegte Punkt E und E' seine Projektion ($E^0 = OE_1{}^0 \times k$, $E_0E' \perp OM$). Schneidet der Kreis um O mit dem Radius OE' die Gerade CD in den Punkten G_1 und G_2, dann sind $OG_1 = f_1$ und $OG_2 = f_2$ die Brennstrahlen des Kegels, ihre Schnittpunkte F_1 und F_2 mit der Kugel die Brennpunkte des sphärischen Kegelschnittes.

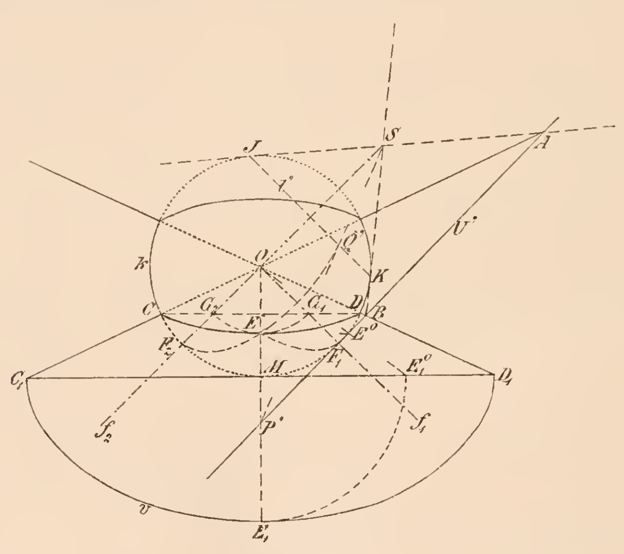


Fig. 321.

Um unsere Behauptung zu erhärten, zeigen wir zunächst, daß $\angle\, F_1OE + \angle\, F_2OE = \angle\, DOM$ ist. Die Sehne CD ist nämlich gleich der Sehne, die man durch E' senkrecht zu f_1 ziehen kann, da $OG_1 = OE'$ ist; es sind also auch die zu den Sehnen gehörigen Bogen gleich, die halben Bogen stimmen aber mit Bog MD resp. Bog EF_1 überein. Nun schneiden wir den Kegel mit einer Ebene E, die in F_1 auf f_1 senkrecht steht; dies giebt einen Kegelschnitt u (in der Figur ist es eine Hyperbel) und die Endpunkte A, B einer seiner Achsen liegen auf den Mantellinien OC und OD. Zeigt man jetzt noch, daß man durch die Kurve u einen Rotationskegel legen kann, der

der Kugel umgeschrieben ist, so folgt daraus, daß F_1 ein Brennpunkt von u ist, und man erhält so wieder die Beziehungen, wie sie sich in Fig. 320 darbieten. Zu diesem Zwecke ziehe man von A und B die Tangenten an k, deren Berührungspunkte respektive J und K seien; ihr Schnittpunkt S ist der Scheitel eines Kegels der die Kugel längs eines Kreises l mit dem Durchmesser JK berührt. Dieser Rotationskegel enthält aber die Kurve u, denn die Schnittkurve von E mit dem Rotationskegel hat mit u nach der Konstruktion die Achse AB und außerdem einen Punkt gemein, wie sogleich dargethan werden soll. Ist $P' = AB \times OM$, so ist SP' die Projektion einer Mantellinie SP des Rotationskegels, die die Kugel in Q berührt ($Q' = SP' \times JK$) und es ist $PF_1 = PQ$ (als Kugeltangenten). OP schneidet also die Kugel in einem Punkte, dessen sphärische Abstände von F_1 einerseits und dem Kugelkreise l über JK anderseits einander gleich sind und dessen Projektion in OM liegt. Diese Eigenschaften besitzt aber der Kugelpunkt E; der Strahl OEE_1 geht demnach durch P hindurch, was zu beweisen war.

Nach 510 muß OS mit dem Brennstrahl f_2 zusammenfallen; dies ergiebt sich auch direkt, denn es ist Bog CJ = Bog CF_1 ($\angle CAJ = \angle CAF_1$) und Bog CF_2 = Bog F_1D = Bog DK, also auch Bog JF_2 = Bog F_2K, d. h. F_2 liegt auf der Halbierungslinie des $\angle JSK$.

514. Die senkrechten Projektionen des sphärischen Kegelschnittes auf seine drei Symmetrieebenen sind wieder Kegelschnitte, wie im Folgenden nachgewiesen werden soll. Die Projektion auf die Ebene der Brennpunkte ist eine Ellipse c', von der zwei Stücke AB und CD im Innern des Kreises k liegen, die beiden andern AC und BD aber außerhalb sich befinden (Fig. 322). Die Punkte jener beiden Stücke bilden die Projektionen von je zwei reellen, die Punkte dieser Stücke die Projektionen von je zwei konjugiert imaginären Kurvenpunkten. Die Ellipse c' ist zu dem Kreise k affin und zwar ist AD oder BC die Affinitätsachse. In der That erhält man jeden Punkt P' dieser Kurve, wenn man auf k gleiche Bogen $AP_0 = AP^0$ abschneidet und $P'P_0 \perp OF_1$ und $P'P^0 \perp OF_2$ macht. Ist nun $L = OA \times P_0P'$, so folgt aus der erwähnten Gleichheit der Bogen, daß $LP_0 = LP^0$ wird. Die Winkel des $\triangle LP'P^0$ sind aber von der Wahl des Kurvenpunktes P' unabhängig, denn zwei seiner Seiten sind zu OF_1 resp. OF_2 senkrecht und $\angle P'LP^0 = \angle P'LA - \angle P_0LA$; demnach ist auch das Verhältnis $P'L : P^0L$ oder $P'L : P_0L$ von der Wahl des Punktes P' auf c' unabhängig. Die Kurven c' und k sind also affin, OA ist die Affinitätsachse, $P'P_0$ (oder auch $P'P^0$) sind ein

Paar affiner Punkte; infolgedessen schneiden die Tangenten von k in P_0 resp. P^0 und die Tangente von c' in P' die Gerade OA in

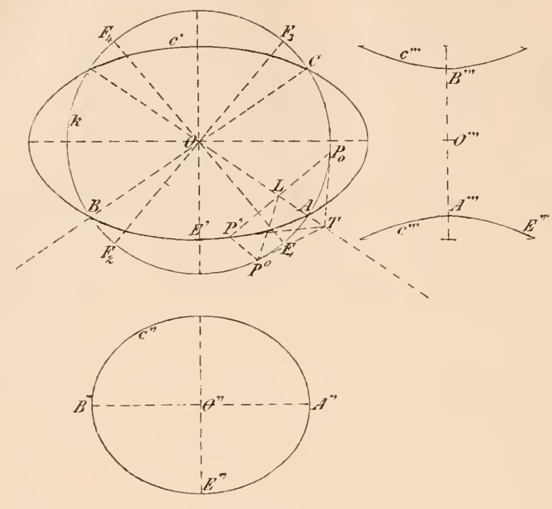


Fig. 322.

dem nämlichen Punkte T. Zu dem gleichen Resultat gelangt man auch nach 428, wenn man noch den zu P' benachbarten Punkt auf c' in Betracht zieht.

515. Seien x, y, z die Achsen des Kegels durch c, und zwar mag x den $\angle F_1OF_2$ und y seinen Nebenwinkel halbieren, wo OF_1 und OF_2 nicht durch die Kegelflächen getrennt sind, während z auf der Ebene der Brennpunkte senkrecht steht. Dann ist die Projektion c'' von c auf eine zur Ebene yz parallele Ebene eine vollständige Ellipse, deren Halbachsen gleich $\frac{1}{2}AB$ resp. EE' sind; die Projektion c''' von c auf eine zu xz parallele Ebene dagegen liefert eine Hyperbel, deren Hauptachse gleich AC ist, der reelle Teil von c ergiebt nur zwei Stücke derselben. Daß c'' und c''' wirklich Kegelschnitte sind, erkennt man folgendermaßen. Ist P ein Punkt von c und sind p_1, p_2, p_3 seine Entfernungen von den Ebenen xy, yz, xz, so ist $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = r^2$ (r = Kugelradius), da P auf der Kugel liegt. Für die Projektion P' auf xy, wobei p_2 und p_3 sich in wahrer Länge projizieren, haben wir: $\frac{p_2^2}{a_1^2} + \frac{p_3^2}{b_1^2} = 1$, wenn $a_1 < b_1$ die Halbachsen der Ellipse c' sind (vergl. 332). Aus beiden Gleichungen können wir eine Relation zwischen p_1, p_3, nämlich $p_1^2 + p_3^2 - \frac{p_3^2\, a_1^2}{b_1^2}$

$= r^2 - a_1^2$ oder: $\frac{p_1^2}{a_2^2} + \frac{p_3^2}{b_2^2} = 1$ ableiten, wo: $a_2^2 = r^2 - a_1^2$ und $b_2^2 = b_1^2(r^2 - a_1^2):(b_1^2 - a_1^2)$ ist, und ebenso eine Relation zwischen p_1 und p_2, nämlich: $p_1^2 + p_2^2 - p_2^2 \frac{b_1^2}{a_1^2} = r^2 - b_1^2$, oder: $-\frac{p_1^2}{a_3^2} + \frac{p_2^2}{b_3^2} = 1$, wo: $a_3^2 = b_1^2 - r^2$, und $b_3^2 = a_1^2(b_1^2 - r^2):(b_1^2 - a_1^2)$ ist. Diese Relationen sind aber nichts anderes als die Gleichungen der Projektionen c'' und c''', da ja p_1, p_3 bei der Projektion von c auf die Ebene yz und p_1, p_2 bei der Projektion von c auf die Ebene xz ungeändert bleiben. Die gefundenen Gleichungen beweisen also nach 332 die Behauptung.

Die stereographische Projektion.

516. Projiziert man die Punkte und Linien auf einer Kugel aus einem der Kugelfläche selbst angehörigen Punkte O auf eine Ebene Π_1, die sie in dem O diametral gegenüberliegenden Punkte O_1 berührt, so bezeichnet man dies als stereographische Projektion Von ihr sollen jetzt die wichtigsten Eigenschaften abgeleitet werden.[22]) Jeder Kegel, dessen Spitze in O liegt und der Π_1 in einem Kreise schneidet, schneidet auch die Kugel in einem Kreise (beide Kreise sind nach 251 Wechselschnitte); die stereographischen Bilder der Kugelkreise sind also wieder Kreise. Wir legen die Zeichenebene Π_2 durch den Kugeldurchmesser OMO_1 und die Kegelachse; sie schneidet die Kugel in dem größten Kreis k und den Kegel in den Mantellinien OAA_1, OBB_1, wo A, B auf der Kugel A_1, B_1 in der Ebene Π_1 liegen. Die Gerade AB schneidet die den Kreis k in O berührende Tangente t im Punkte S, dessen Polare s in Bezug auf k durch O und den Mittelpunkt N_1 von A_1B_1 geht, denn die Strahlen OA_1, OB_1, ON_1, t liegen harmonisch. Auf der Kugel liegen A, B, O, $N = s \times k$ harmonisch und es geht s als Polare von S durch den Schnittpunkt T der Tangenten von k in A und B. Hieraus fließt der Satz: Alle Kugelkreise, deren Ebenen die Tangentialebene im Centrum der stereographischen Projektion in der nämlichen Geraden schneiden, ergeben koncentrische Bildkreise; ihr Mittelpunkt N_1 ist das Bild des Berührungspunktes N der durch die Gerade an die Kugel gelegten Tangentialebene; er erscheint zugleich als Centralprojektion der Scheitel aller Kegel, die der Kugel längs jener Kreise umgeschrieben sind, aus dem Centrum O. Die Kugelkreise durch die Punkte O, N haben die Durchmesser der koncentrischen Bildkreise als Bilder.

Zwei Kurven auf der Kugel schneiden sich unter gleichem Winkel, wie ihre Bilder. Die Abbildung der sphärischen Figuren durch stereographische Projektion wird deshalb winkeltreu oder konform genannt. Unter dem Winkel zweier Kurven in einem Schnittpunkte versteht man den Winkel der bezüglichen Tangenten und man erhält offenbar die Tangenten der Bildkurven, wenn man die Tangenten der Kurven auf der Kugel von O aus projiziert. Man braucht deshalb nur zu zeigen, daß in einem beliebigne Punkte N der Kugel drei Kugeltangenten die gleichen Winkel einschließen, wie ihre Centralprojektionen aus dem Centrum O auf Π_1. Dieses folgt aber daraus, daß beim Um-

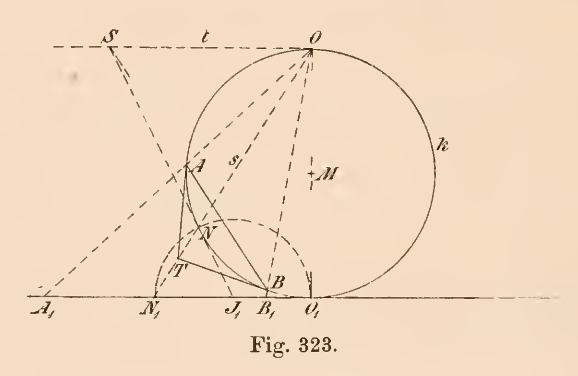


Fig. 323.

legen der Tangentialebene im Punkte N um ihre erste Spurlinie in Π_1 der Punkt N mit seinem Bilde N_1 zur Deckung kommt. Ist nämlich k der Kugelkreis durch O, N, O_1 und hat die Tangente im Punkte N von k den ersten Spurpunkt J_1, so stehen NJ_1 und N_1J_1 auf jener Spurlinie senkrecht und es ist (wie aus der Figur ersichtlich) $NJ_1 = O_1J_1 = N_1J_1$.

Hieraus kann man weiter schließen, daß die Mantellinien und der Berührungskreis eines der Kugel umschriebenen Kegels sich von O aus auf Π_1 als Strahlbüschel und eine alle diese Strahlen rechtwinklig schneidende Kurve projizieren, d. h. Berührungskreis und Scheitel des Kegels projizieren sich als Kreis und dessen Mittelpunkt.

517. Die stereographische Projektion findet bei der Herstellung von Landkarten eine wichtige Anwendung. — Aufgabe der Kartenprojektion ist es, Teile der Erdkugeloberfläche in einer Ebene abzubilden und das hierzu dienende Verfahren so einzurichten, daß den beiden Forderungen der Konformität und Flächenäquivalenz thunlichst entsprochen werde. Das will sagen: es sollen einerseits

entsprechende Winkel im Original und Bild übereinstimmen, andererseits entsprechende Flächen gleichen Inhalt haben. Eine auf Projektion oder andern geometrischen Gesetzen beruhende Abbildungsmethode, die diese beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt, giebt es nun allerdings nicht; wohl aber genügt, wie wir sahen, die stereographische Projektion der ersten Bedingung.

Man geht beim Kartenzeichnen von der Darstellung des Gradnetzes aus, das auf der Erdkugel von den Meridian- und Breitenkreisen gebildet wird. Bei Benutzung des Prinzips der stereographischen Projektion nimmt nun das Gradnetzbild (das gewöhnlich nur für eine Halbkugel oder einen noch kleineren Teil der Fläche entworfen wird) dreierlei Formen an. Projiziert man aus einem Pole auf eine Parallelebene zum Äquator („Polarprojektion"), so ergeben die Meridiane einen Strahlbüschel und die Breitenkreise ein System koncentrischer Kreise um seinen Scheitel (Pol). Projiziert man aus einem Punkte des Äquators („Äquatorialprojektion"), so stellen sich jene beiden Kreissysteme durch zwei Kreisbüschel dar (vergl. 244); das Bild des Meridians durch den gewählten Äquatorpunkt (zugleich Bild der Polachse) ist die gemeinsame Chordale für die Meridiankreisbilder und das Äquatorbild ebenso für die Parallelkreisbilder. Projiziert man endlich aus einem beliebigen Punkte der Kugelfläche auf die Horizontalebene des Gegenpunktes („Horizontalprojektion"), so bilden sich die Meridian- und Breitenkreise wieder als zwei Kreisbüschel ab, aber nur der Meridian des gewählten Punktes wird durch eine Gerade (gemeinsame Chordale des ersten Büschels) repräsentiert. Das Gradnetzbild weist in allen Fällen lauter rechte Winkel auf.

Es ist bekannt, daß außer diesem Verfahren in der mathemathischen Geographie auch noch die Centralprojektion aus dem Mittelpunkt der Erdkugel oder aus einem andern Punkte auf eine geeignete Ebene, sowie verschiedene Modifikationen solcher Abbildungsmethoden benutzt werden. Dahin gehört namentlich die sogenannte „Cylinderprojektion". Sie entsteht, wenn man die Kugel aus ihrem Centrum auf einen umgeschriebenen (längs des Äquators berührenden) Cylinder projiziert und diesen auf die Ebene abwickelt. Das Gradnetzbild wird dann von zwei sich rechtwinklig schneidenden Systemen paralleler Geraden gebildet; während aber die Meridianlinien gleiche Abstände voneinander zeigen, wachsen die Abstände der Breitenlinien vom Äquator aus nach beiden Seiten im Verhältnis $1 : \cos^2 \varphi$, wo φ die geographische Breite bedeutet. Mercator verbesserte dieses Abbildungsverfahren, indem er die Abstände der

Breitenlinien nur nach dem Verhältnis $1 : \cos\varphi$ wachsen ließ, wie es den Verhältnissen auf der Kugelfläche selbst entspricht, und erreichte u. a. hierdurch, daß eine alle Meridiane unter gleichem Winkel schneidende Linie auf der Kugel (Loxodrome) sich als gerade Linie abbildet. Das Mercator'sche Verfahren bildet keine Projektion im gewöhnlichen Sinne mehr.

Schlagschatten auf Kegel- und Cylinderflächen.

518. Wirft eine Fläche Schlagschatten auf eine zweite Fläche, so hat man zunächst die Eigenschattengrenze, d. h. die Grenzkurve zwischen Licht und Schatten, auf der ersten Fläche zu ermitteln und dann diese Grenzkurve auf die zweite Fläche Schatten werfen zu lassen. Die parallelen Lichtstrahlen durch die Grenzkurve bilden einen Cylinder, dessen Schnittkurve mit der zweiter Kurve aufzusuchen ist. Ist die Schatten empfangende Fläche ein Cylinder oder Kegel, so kommt die vorliegende Aufgabe auf die bereits behandelte hinaus, den Cylinder oder Kegel mit dem Cylinder der Lichtstrahlen zu durchdringen, die die erste Fläche tangieren. Man kann hierbei ganz so verfahren, wie bereits auseinandergesetzt wurde, indem man einerseits die Spitze des Schatten empfangenden Kegels (oder eine Mantellinie des Cylinders) und andererseits die Grenzkurve auf die Ebene der Basiskurve des Kegels (oder Cylinders) Schatten werfen läßt. Eine Mantellinie m der zweiten Fläche empfängt nun Schatten von demjenigen Punkte P der Grenzkurve der ersten, dessen Schatten P_* auf der Geraden m_*, dem Schatten von m, liegt. Die Gerade m_* durch P_* kann man also ziehen und dann auch die Mantellinie m, die sich mit m_* auf der Basiskurve des Kegels (oder Cylinders) trifft; der Lichtstrahl durch P schneidet dann m in einem Punkte P^*, dem Schlagschatten von P auf den Kegel (oder Cylinder).

Gewöhnlich ist indessen das Verfahren etwas anders, indem man einerseits die Grenzkurve, andererseits den Kegel (oder Cylinder) auf die Horizontalebene Schatten werfen läßt. Es empfängt dann eine Mantellinie m Schatten von einem Punkte P der Grenzkurve, wenn ihr Schatten m_* auf Π_1 durch den Schatten P_* von P auf Π_1 geht. Indem man dann rückwärts m und P aufsucht und den Lichtstrahl durch P mit m zum Schnitt bringt, erhält man den Schatten P^* von P auf den Kegel (oder Cylinder). Diese Methode ist deshalb vorzuziehen, weil ja immer neben dem Schlagschatten der einen Fläche auf die zweite auch der Schatten

der Flächen auf die Horizontalebene verlangt wird; bei der zuerst geschilderten Methode müßte aber der Schatten auf Π_1 noch nachträglich konstruiert werden.

519. Den Schlagschatten einer Kugelschale auf einen Kegel zu bestimmen. Die Kugelschale ruhe auf Π_1, ebenso der Kegel, der Π_1 längs einer Erzeugenden berühren soll. Der Kegel sei ein gerader Kreiskegel; sein Basiskreis c hat die Projektionen c' und c''; c_0 ist der um die Spurlinie e_1 der Basisebene in Π_1 umgelegte Kreis c. Es giebt dann eine Kugel, welche den Kegel längs c be-

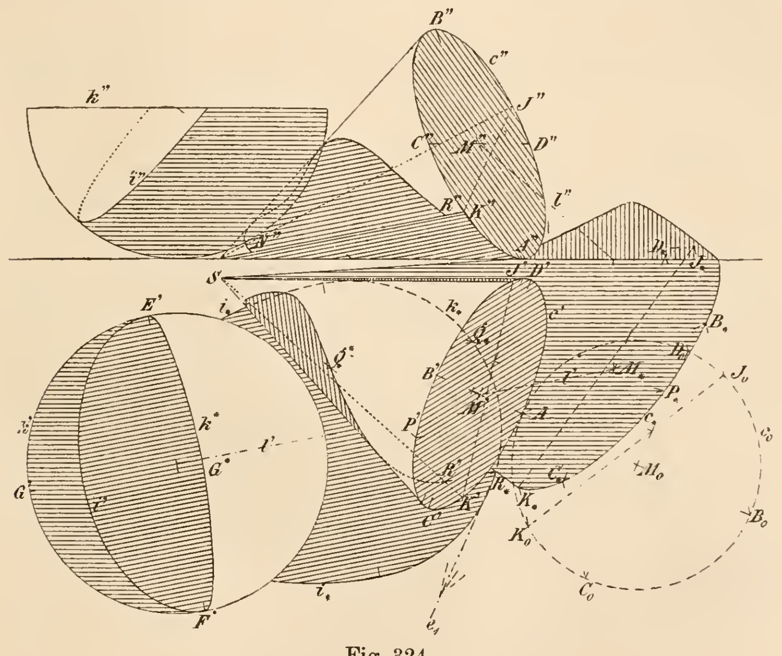


Fig. 324.

rührt (vergl. 476); ihr Mittelpunkt liegt auf der Kegelachse und offenbar senkrecht über A, daraus ergiebt sich auch sein Aufriß. Die scheinbaren Umrißlinien des Kegels berühren die Umrißkreise dieser Kugel in den nämlichen Punkten, in denen sie die Ellipsen c' und c'' tangieren, wodurch sich die Umrißlinien und ihre Berührungspunkte genau bestimmen. Den Schatten c_* von c auf Π_1 zeichnen wir mit Hilfe der konjugierten Durchmesser AB_* und C_*D_*; c_0, c' und c_* sind affine Kurven, e_1 ist die Affinitätsachse. Die beiden Tangenten von S an c_* bilden die Grenze des Kegelschattens; ihre Berührungspunkte J_* und K_* bestimmt man aus der Affinität von c_*

und c_0, indem man zu S den affinen Punkt und die Berührungspunkte J_0, K_0 der von ihm an c_0 gelegten Tangenten sucht. Die Affinität zwischen c' und c_0 ergiebt dann auch die Punkte J' und K' auf c' und so die Mantellinien SJ und SK, die die Grenze zwischen Licht und Schatten auf dem Kegel bilden ($J'K'$, J_0K_0 und J_*K_* gehen durch den nämlichen Punkt von e_1).

Auf der Kugelschale ist die Grenze zwischen Licht und Schatten ein Halbkreis i, dessen Projektionen i' und i'' und dessen Schatten i_* sich wie in 468 finden. Der Schatten des halben Schalenrandes in das Innere der Schale ist nach 251 ein Halbkreis, EF ist ein Durchmesser desselben und der Schatten des Randpunktes G auf die Schale ist der Endpunkt des dazu senkrechten Durchmessers ($E'F' \perp l'$). Der Rand k wirft demnach in die Schale den Schatten k^* und auf Π_1 den Schatten k_*.

Es fehlt nun noch der Schatten der Kurven i und k auf den Kegel. Die Mantellinie SP wirft den Schatten SP_*, dieser schneidet k_* in Q_* und es empfängt daher SP Schatten von dem Rande k im Punkte Q^* ($P'P_* \parallel Q^*Q_* \parallel l'$). — Wendet man das Verfahren speziell auf die Umrißlinien des Kegels an, so erhält man die Berührungspunkte der Projektion der Schlagschattenkurve mit dem scheinbaren Umriß. Die Endpunkte R und N der Schlagschattenkurve auf dem Kegel liegen auf SK, der Grenze zwischen Licht und Schatten; die Tangenten in diesen Endpunkten sind parallel zum Lichtstrahl l (also ihre Projektionen zu l' und l''). Denn die Tangentialebene längs der Mantellinie SK ist parallel zu l, sie wird also von den Ebenen durch die Tangenten in den Punkten R von k und N von i respektive, die zum Lichtstrahle parallel laufen, in Parallelen zu l geschnitten.

Beispiele für Anwendungen.

520. Die in diesem Kapitel entwickelten Methoden zur Darstellung der Kugel-, Cylinder- und Kegelflächen, ihrer ebenen Schnitte, Durchdringungen und Abwickelungen lassen zahlreiche Anwendungen zu, die hier nur kurz unter Hinweis auf wenige einfache Beispiele angedeutet werden können. Sie betreffen vorzugsweise zwei Klassen von Aufgaben, die der zeichnende Architekt zu lösen hat: Schatten- und Steinschnittkonstruktion.

Dem, was in 151, 467 und 518 von der Schattenkonstruktion im allgemeinen gesagt und dann auf einfache geometrische Gebiete angewandt wurde, sollen hier nur einige, die weitere Anwenduug

vorbereitende Bemerkungen angefügt werden. Eine eingehendere Behandlung der Schattenkonstruktion bei höheren Flächen, sowie in der schiefen Projektion und der Perspektive findet man im zweiten Bande unseres Werkes.

Wenn an den Objekten kompliziertere krumme Flächen auftreten, so wird man stets Kurven benutzen, die auf ihnen liegen und gegeben sein müssen, um im Sinne von 459 als Erzeugende zu dienen. Zur Bestimmung des Schlagschattens auf eine Ebene geht man von den bezüglichen Schatten der Erzeugenden aus und findet als deren Hüllkurve die Schlagschattengrenze. Sucht man ferner die Berührungspunkte der Schlagschattengrenze mit den Schatten der Erzeugenden auf und zieht von ihnen aus rückwärts Lichtstrahlen bis wieder zu jenen Erzeugenden, so erhält man auf ihnen Punkte der Lichtgrenze. Ebenso liefert jeder Lichtstrahl, der von einem Kreuzungspunkte der gleichnamigen Schatten zweier Erzeugenden rückwärts gezogen wird, auf einer derselben einen Punkt der Schlagschattengrenze am Objekte selbst. — Wichtig ist ferner ein Satz über das Verhalten der Licht- und Schlagschattengrenzen in den Punkten, wo beide einander begegnen (vergl. 528). Wirft nämlich ein Teil des Objektes Schatten auf einen andern, so kann es geschehen, daß die Grenze dieses Schlagschattens die Lichtgrenze auf dem zweiten Teile überschneidet. Im Treffpunkte wird dann die Schlagschattenkurve von einem Lichtstrahl berührt; denn ihre Tangente ist die Schnittlinie der Tangentialebenen zweier Lichtstrahlencylinder, welche beiden Körperteilen längs ihrer Lichtgrenze (die beim ersteren auch eine Randkurve sein kann) umschrieben sind.

521. Die Lehre vom Steinschnitt (Stereotomie) bedient sich ebenfalls der bisher entwickelten Darstellungsmethoden. Unter ihren Aufgaben verdient besonders die Bestimmung des Schnittes der Gewölbsteine Beachtung, da für diese nicht, wie sonst meist geschieht, lauter ebene Begrenzungsflächen gewählt werden können.

Ist die Form eines Gewölbes vorgeschrieben, so ist die an der Wölbung sichtbar werdende eine Seitenfläche jedes Wölbsteines ihrer Natur nach bestimmt und muß genau nach Vorschrift bearbeitet werden. Die übrigen Seitenflächen der Steine heißen Fugen und sind am fertigen Bauwerk nicht sichtbar, weil entlang derselben die Wölbsteine, die sich gegenseitig stützen und spannen, aneinander oder auf dem Widerlager anliegen. Diese Fugen müssen (aus hier nicht weiter zu erörternden mechanischen Gründen) eine regelmäßige Anordnung erhalten und nach vorher bestimmten Formen

ebenfalls genau bearbeitet werden. Soweit die Fugen auf der Wölbfläche endigen, erzeugen sie auf ihr ein System von (sichtbaren) Fugenlinien.

Die Statik zeigt nun, daß es zur Erreichung möglichst hoher Stabilität des Bauwerkes zweckmäßig ist, von folgenden Gesichtspunkten auszugehen. — Die Wölbsteine werden, vom Widerlager anfangend, bis zum Schlußstein am Gewölbescheitel in Schichten angeordnet und jede Schicht thunlichst symmetrisch aus mehreren Steinen gebildet, deren Anzahl sich nach dem Umfange richtet. Demgemäß ist zuerst die gegebene Wölbfläche durch eine erste Reihe Fugenlinien in Streifen und diese durch eine zweite Reihe Fugenlinien in Felder zu zerlegen. Die Fugenlinien der zweiten Art sollen nun überall zu denen der ersten Art rechtwinklig verlaufen und werden überdies in den benachbarten Streifen gegeneinander versetzt, so daß sich keine von ihnen unmittelbar in die nächste fortsetzt. Später (vergl. 802) wird gezeigt, daß es auf jeder beliebigen krummen Fläche Kurven, nämlich die beiden Systeme von Krümmungslinien giebt, die sich überall rechtwinklig schneiden. In vielen Fällen können aber diese Kurvensysteme ohne weiteres angegeben werden. Es sollen ferner die Fugen selbst zur Wölbfläche normal stehen. Man denkt sie sich deshalb am einfachsten von den Normalen der Wölbfläche entlang einer Krümmungslinie erzeugt, so daß sie (nach 802) abwickelbare Flächen werden; bei den einfachsten Gewölbeformen fallen sie eben oder konisch aus.

522. In Fig. 325 ist ein runder Eckturm mit spitzem Dach dargestellt, der seinen Schatten auf die gebrochene Dachfläche, das Gesims und die Wand eines Hauses wirft. Die Wandung des Turmes wird von einem Cylinder gebildet (Achse $a = S'S$); sein Dach ist aus konischen Teilen (Spitzen S und T auf a) zusammengesetzt, wird unten teils von den in der Kante BC zusammenstoßenden ebenen Flächen in Ellipsenbogen PQ, QR, . . ., teils von dem Randkreise r begrenzt und endigt oben an einer kleinen Kugel mit aufgesetzter spitzer Stange. Die erwähnten Ellipsenbogen bestimmt man leicht aus ihren Hauptachsen, die man mittels des Seitenrisses $f''' = D'''E'''$ einer Falllinie $f = DE$ des Daches gewinnt (vergl. 490).

Die Schattenkonstruktion soll nun im Aufriß durchgeführt werden. Man bestimmt zuerst die Lichtgrenzen u und v auf den kegelförmigen Dachflächen als die Mantellinien, deren zugehörige Tangentialebenen die Lichtstrahlen durch S und T enthalten. Sind r_*, s_*, T_*, S_* die Horizontalschatten von r, s, T, S, so müssen die Schatten u_* und v_* von u und v die Kreise s_* resp. r_* berühren

und durch S_* und T_* gehen. Sucht man zu ihren Berührungspunkten die homologen Punkte auf s und r, so gehören sie den Lichtgrenzen u resp. v an. Demnach gehen u' und v durch S' und sind zu u_* und v_* senkrecht. Die Schatten a^*, $^*u$, v^* auf der durch die Linien b und e bestimmten Ebene zeichne man mittels

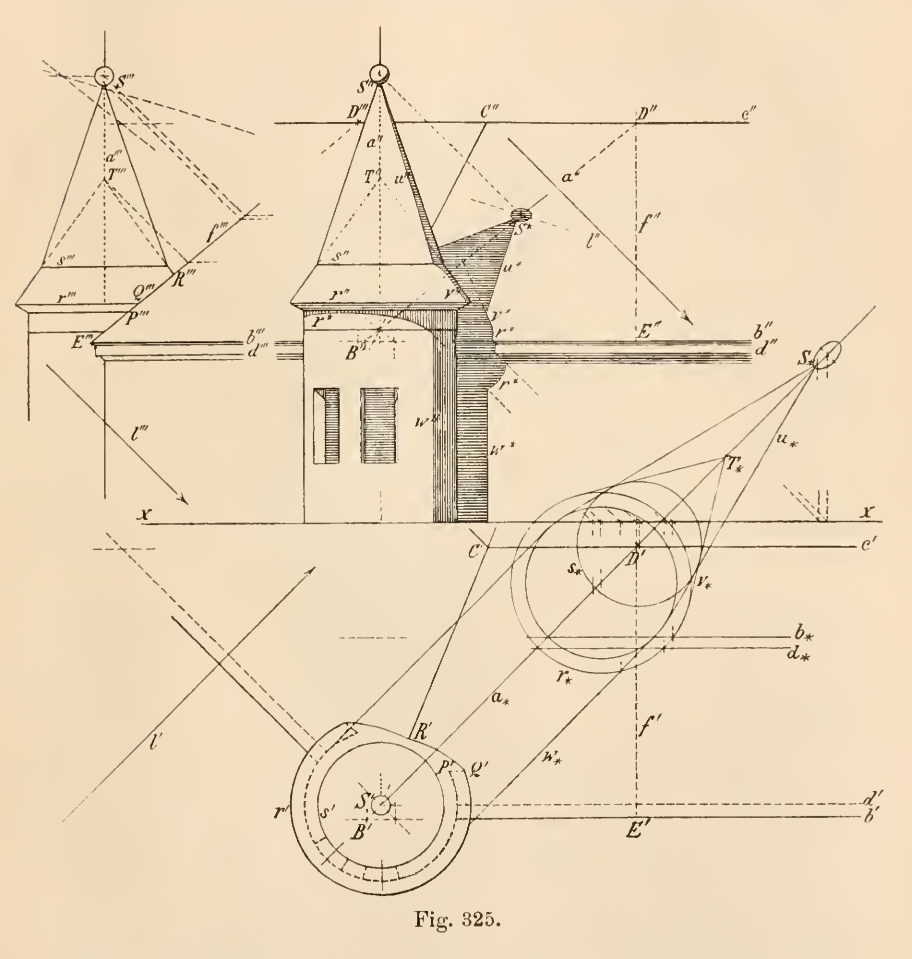


Fig. 325.

ihrer Schnittpunkte mit b und c, die sich aus den Schnittpunkten der Horizontalschatten a_*, u_*, v_*, b_*, c_* unmittelbar ergeben. Die Lichtgrenze w (Mantellinie) auf der cylindrischen Wand und ihren Schatten w^* auf der ebenen Wand findet man leicht mittels ihrer ersten Spurpunkte. Der Schatten r^* des Randkreises r zerfällt in vier Kurvenstücke, die sich der Reihe nach auf dem Wandcylinder, der Wand-

ebene, dem Dachsims und der Dachebene befinden und von denen das letzte tangential in v^* übergeht. Es genügt, von ihnen einzelne Punkte (namentlich die Endpunkte) zu bestimmen. Im Punkte $r^* \times w''$ ist die Tangente von r^* zu l'' parallel und geht verlängert durch $r^* \times w^*$. Die Endpunkte auf den Dachkanten b und d, resp. auf ihren Schatten b^*, d^* findet man durch rückwärts gezogene Lichtstrahlen aus den bezüglichen Kreuzungspunkten im Grundrißschatten. Analog ergiebt sich die kurze Schlagschattenlinie, die, von der Linie u der oberen Kegelfläche herrührend, auf der unteren entsteht. Die Lichtgrenze auf der Kugel ist ein Hauptkreis, dessen Ebene zu l normal steht (vergl. 468); sein horizontaler und der hierzu rechtwinklige Durchmesser ergeben (in der Lichtrichtung auf die Dachebene projiziert) konjugierte Durchmesser der Schlagschattenellipse. Der eine geht durch den Schnittpunkt des horizontalen Kreisdurchmessers mit der durch b und c bestimmten Ebene und durch den bezüglichen Mittelpunktschatten; der andere liegt auf a^* (die Konstruktion ist in der Figur angedeutet). Endlich sind noch einige sehr kleine Schlagschattenteile an der Turmspitze und den Turmfenstern einzutragen.

523. Das nächste Beispiel bilde eine Mauernische mit halbkreisförmiger Basis, die oben durch die Hälfte eines Kuppelgewölbes geschlossen ist (Fig. 326); außer dem Schatten soll der Steinschnitt in die Darstellung einbezogen werden.

Die Nischenfläche besteht aus einem Halbcylinder und einer Viertelkugel. Auf ersterem endigen die Fugen in 6 Mantellinien, die den Basishalbkreis in 7 gleiche Teile teilen und in horizontalen (gegeneinander versetzten) Kreisbögen, deren Abstand je $^1/_4$ der Cylinderhöhe beträgt. In der Wölbfläche liegen die Fugenlinien auf 4 horizontalen Kreisen, deren Randpunkte A, B, C, D, ... den Fronthalbkreis AE (Schildbogen) in 7 gleiche Teile zerlegen. Die gegeneinander verschobenen Fugenlinien der zweiten Art liegen auf 13 vertikal gestellten (Meridian-)Kreisen; diese treffen sich (verlängert) im Gewölbescheitel und teilen den Halbkreis i am Widerlager in 14 gleiche Teile. Die Projektionen sind nach diesen Angaben unmittelbar zu zeichnen. Die Fugen der Wölbsteine werden teils von Ebenen, teils von Rotationskegelflächen gebildet; letztere haben ihre Spitze im Centrum O der Wölbfläche und ihre gemeinsame Achse ist vertikal.

Die Richtung der parallelen Lichtstrahlen l ist wie gewöhnlich angenommen ($\angle\, l'x = \angle\, l''x = 45^0$).

Die Lichtgrenze auf der Nischenfläche, eine Mantellinie u des

Cylinders und ein anschließender Hauptkreisbogen der Kugel, dessen Ebene zu l normal steht und der in dem Punkte W der Front endigt ($\angle\ WOE = 45^0$), werden vom Schlagschatten bedeckt. Die elliptische

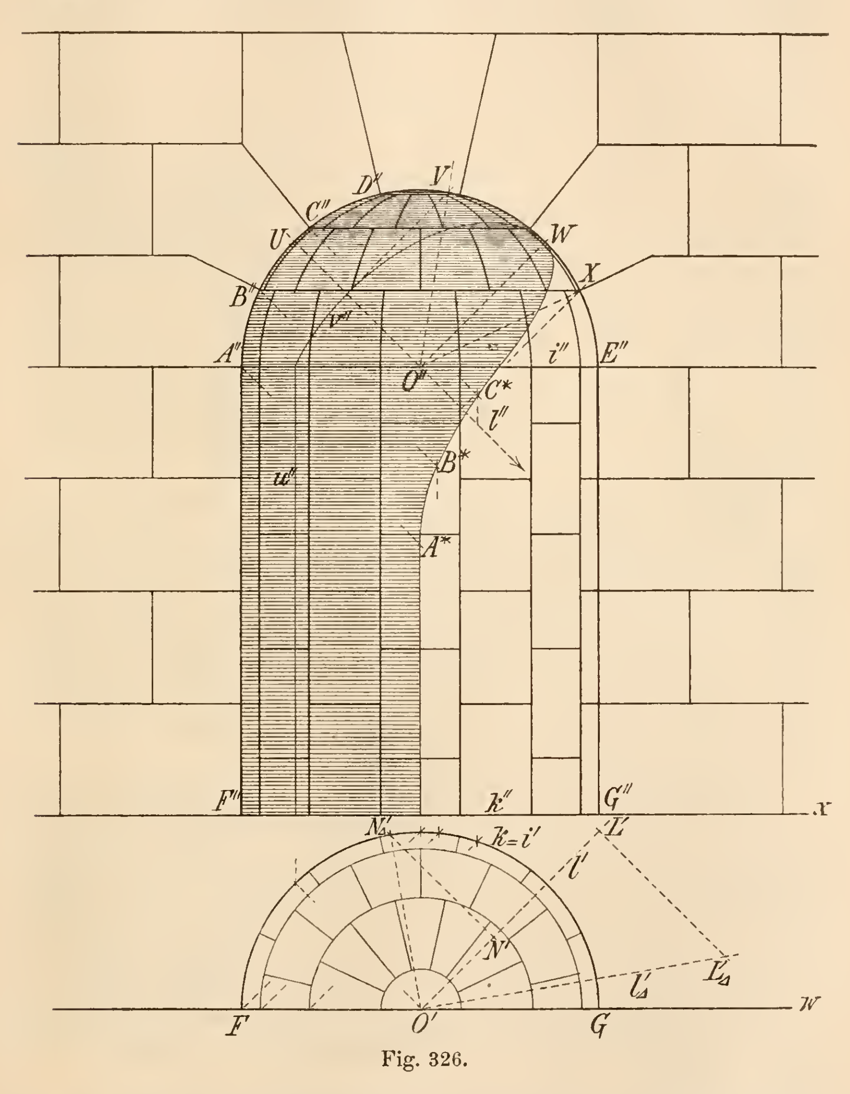


Fig. 326.

Projektion jenes Hauptkreisbogens ist nach 468 zu ermitteln, indem man einen Lichtstrahl OL um die Parallele zu l' durch O zu Π_1 parallel dreht und den zu $O'L_\triangle'$ normalen Halbmesser $O'N_\triangle'$ auf $O'L'$ projiziert; die Projektion $O'N'$ giebt die kleine Halbachse jener Ellipse

an. Der Schlagschatten des Nischenrandes auf die Innenfläche setzt sich aus drei ganz verschiedenen Teilen zusammen. Das erste Stück verläuft geradlinig; es ist der Schatten des linken Cylinderrandes FA auf den Hohlcylinder ($FA^{*\prime} \parallel l'$, $A^{*\prime}$ auf k, $A''A^* \parallel l''$). Das zweite Stück gehört einer Raumkurve 4. Ordnung an, in welcher der Lichtstrahlencylinder durch den Fronthalbkreis den Cylinder schneidet, und endigt auf i. Man findet einzelne seiner Punkte (z. B. $B'B^{*\prime} \parallel l'$, $B^{*\prime}$ auf k, $B''B^* \parallel l''$). Das letzte Stück liegt wieder auf einem Hauptkreis der Kugel und wird von dem nämlichen Lichtstrahlencylinder ausgeschnitten (vergl. 251). Dieser Schlagschattenkreis liegt zum Frontkreis in Bezug auf die Ebene des Lichtgrenzkreises symmetrisch. Alle drei Kreise haben den Halbmesser OW gemein; ihre zu OW rechtwinkligen Halbmesser aber liegen in der zweiten projizierenden Ebene des Lichtstrahles l durch O. Wird diese Ebene zu Π_2 parallel gedreht, so erscheinen jene Halbmesser im Aufriß als $O''U$, $O''V$ und $O''X$ und es muß $\angle VO''X = \angle UO''V$ sein, woraus sich der Aufriß des Schlagschattenkreises leicht bestimmen läßt.

524. Eine dorische Säule besteht aus dem Schaft und dem Kapitäl; ein Basisglied besitzt sie nicht, vielmehr ist der Schaft unmittelbar auf den Stylobat (Untersatzstufe) gestellt. Der Schaft verjüngt sich nach oben, hat 20 Kannelierungen, die in scharfen Kanten (ohne Stege) zusammenstoßen, und zeigt am Säulenhals einen Einschnitt. Den Übergang zum Kapitäl vermitteln drei schmale Riemen; dann folgt ein nach oben schwellender Wulst, der Echinus, und eine quadratisch geschnittene Platte, der Abakus, auf welchem der Architrav ruht.

In der Figur ist der obere Teil einer solchen Säule gezeichnet und es soll daran die Schattenkonstruktion vorgenommen werden. Die Kanten des konischen Schaftes endigen in jeder horizontalen Querschnittsebene (z. B. in Π_1) auf einem Kreise; die bezügliche Spurkurve der kannelierten Fläche wird aus 20 nach innen gewandten kleinen Kreisbogen zusammengesetzt. Der Profilschnitt (Meridian) des Echinus mag von unten zuerst geradlinig ansteigen, dann aber in einen Kreisbogen stetig übergehen, so daß sich die Oberfläche unten kegelförmig (Spitze S auf der Säulenachse a), oben kreisringförmig gestaltet.

Man zeichnet zunächst die Grundrißschatten aller Kanten des Objektes, die teils geradlinig, teils kreisförmig ausfallen, und findet hieraus ohne Mühe die Eigen- und Schlagschattengrenzen am Schafte. Besondere Aufmerksamkeit verdient die Grenzlinie des

vom Echinus herrührenden Grundrißschattens. Man benutzt einige auf seiner Fläche liegende horizontale Kreise, deren Schatten (kongruente Kreise) schnell gefunden werden; ihre Hüllkurve ist die gesuchte Linie. Durch Normalen zu ihr aus den Kreismittelpunkten

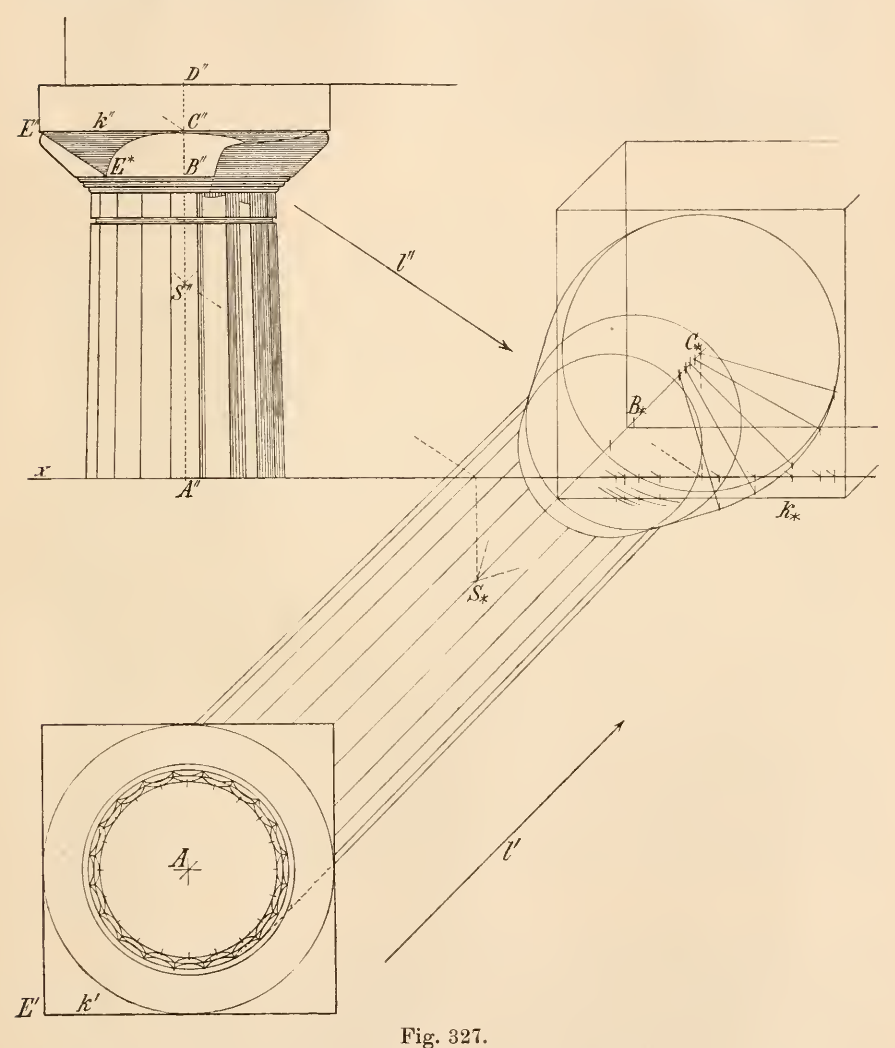


Fig. 327.

bestimmt man noch deren Berührungspunkte; die von ihnen aus rückwärts gezogenen Lichtstrahlen schneiden dann auf den Parallelkreisen am Echinus selbst Punkte der Lichtgrenze aus. Analog verfährt man mit den Schnittpunkten der Grundrißschatten jener

Kreise und der Kanten des Abakus und erhält so dessen Schlagschatten auf dem Echinus. Die Grenzlinie verläuft im Aufriß bis zu der Ecke E^* gerade, dann krummlinig und endigt auf der Lichtgrenze mit zu l'' paralleler Tangente. Zuletzt sind noch einige Details in die Zeichnung einzutragen, welche die am Säulenhals auftretenden Schatten betreffen. Auch hierbei geht man vom Grundrißschatten aus und benutzt das Verfahren der rückwärts durchlaufenen Lichtstrahlen.

Litteraturnachweise und historische Anmerkungen.

I. Kapitel.

[1]) Die Verwandtschaft der Ähnlichkeit zwischen ebenen Figuren ist schon von den Geometern des Altertums in Betracht gezogen worden und ebenso ihre ähnliche Lage, z. B. von Euklides (Elemente (ca. 300 v. Chr.), Ausg. v. Heiberg, Leipzig 1883/88. VI, 18; XI, 27). Die Bezeichnung: Ähnlichkeitscentrum (centrum similitudinis) tritt bei L. Euler auf (Nov. Act. Petrop. IX, p. 154). M. Chasles nennt ähnlichliegende Figuren homothetisch (Ann. de math. p. Gergonne, XVIII, p. 280). Wegen der auf solche Figuren anwendbaren allgemeinen Begriffe: kollinear, homographisch, homologisch, perspektiv vergleiche man die späteren Noten.

Wie M. Chasles berichtet (Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie, Paris 1837, 2. Aufl. 1875, p. 553), hat A. C. Clairault (Mém. de l'Acad. d. Sc., Paris 1731) die durch Parallelprojektion herstellbare Verwandtschaft ebener Figuren schon vor L. Euler untersucht, von dem sie den Namen Affinität erhalten hat („de similitudine et affinitate linearum curvarum", Introd. in anal. infin., Lausanne 1748, II, 18, p. 239 ff.). J. V. Poncelet bespricht die affinen Figuren als spezielle Fälle seiner „figures homologiques" (Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822, p. 174 ff.). In allgemeinerem Sinne wurde die Affinität aus analytischem Gesichtspunkte von A. F. Möbius betrachtet (Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, II, 3. p. 191 ff.). — Für die Zwecke der Darstellung legte J. H. Lambert die Gesetze der Parallelprojektion dar („v. d. perspektivischen Entwerfung aus einem unendlich entfernten Gesichtspunkte", Freie Perspektive, Zürich 1774, VII, p. 156 ff.). Aus diesen Prinzipien folgerte K. Pohlke den Hauptsatz der Axonometrie (nach H. A. Schwarz, Crelle's Journ. Bd. 63, im J. 1853 gefunden, aber erst veröffentlicht in der Darstell. Geom., Berlin 1860, 4. Aufl. 1876, p. 109).

II. Kapitel.

[2]) Die Keime zum Grund- und Aufrißverfahren zeigen sich bereits in der „Ichnographie" und „Orthographie" der Alten, von denen M. Vitruvius Pollio spricht (De architectura libri decem, I, 2; Ausg. v. V. Rose, Leipzig 1899, p. 10). Ihre einfachen Regeln wurden in der mittelalterlichen Rißkunst fortentwickelt und z. B. von A. Dürer (Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit, Nürnberg 1525) zusammengestellt. Der Steinschnitt bildete das wichtigste Anwendungsgebiet; seine Aufgaben finden sich geometrisch behandelt bei G. Desargues (Coupe des pierres, 1640; Oeuvres p. Poudra, Paris 1876, p. 304 ff.) und bei M. Frézier (La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, ou traité de stéréotomie, Straßburg 1737—39).

Indessen entbehrte bis dahin das Darstellungsverfahren noch einer einheitlichen theoretischen Grundlage, die ihm erst von G. Monge gegeben wurde (Géometrie descriptive, Paris 1798; 6. Aufl. v. M. Brisson mit Zusätzen: théorie des ombres et de la perspective, Paris 1838; deutsch v. R. Haussner, Leipzig 1900). Monge gab den beiden Projektionstafeln eine bestimmte Verbindung untereinander, indem er ihre Schnittlinie (oder Achse) fixierte und um sie die eine Tafel in die andere umlegte; er bestimmte die Punkte, Gerade, Ebenen eindeutig durch ihre Projektionen, bezw. Spuren, stellte ebenso krumme Linien und Flächen dar (letztere mit Hilfe ihrer Erzeugenden) und löste zahlreiche Aufgaben, die zuvor nur analytisch behandelt worden waren, durch die Konstruktion. Insofern Monge nicht nur die Ziele und Aufgaben der darstellenden Geometrie klar zu definieren vermochte, sondern auch ihre Hauptmethode systematisch und vollständig entwickelte, gilt er mit Recht als ihr wissenschaftlicher Begründer.

Die Lehren der deskriptiven Geometrie verbreiteten sich rasch, wozu ihre vielseitige Anwendbarkeit in den technischen Wissenschaften nicht wenig beitrug, und wurden durch die Untersuchungen zahlreicher neuerer Autoren erweitert und vertieft. Es mögen hier nur einige umfassendere Werke genannt werden:[1]

C. F. A. Leroy, Traité de géom. descr., Paris 1842; Traité de stéréotomie, Paris 1844; deutsch v. Kauffmann, Stuttgart.

G. Bellavitis, Lezioni di geometria descrittiva, Padua 1851, 2. Aufl. 1868.

J. de la Gournerie, Traité de géom. descr., Paris 1860, 2. Aufl. 1873.

K. Pohlke, Darstell. Geom., I. Berlin 1860, 4. Aufl. 1876; II. 1876.

W. Fiedler, Die darstell. Geom., Leipzig 1871; 3. Aufl. u. d. T. Die darstell. Geom. in organ. Verbindung mit d. Geom. d. Lage, 3 Tle., Leipzig 1883—88.

A. Mannheim, Cours de géom. descr., Paris 1880.

G. A. v. Peschka, Darstell. u. proj. Geom., 4 Tle., Wien 1883—85.

Chr. Wiener, Lehrb. d. darstell. Geom., Leipzig, I. 1884, II. 1887.

Die neue Disziplin übte alsbald nach ihrem Auftauchen einen befruchtenden Einfluß in anderen Zweigen der geometrischen Wissenschaft aus; so namentlich in der neueren synthetischen Geometrie. Indem diese das gesetzmäßige Aneinanderreihen der Elemente, das Projizieren und Schneiden als Erzeugungs- und Transformationsprinzip aufnahm, erstand in der (reinen) Geometrie der Lage und in der (die Mittel der Analysis nicht ausschließenden) projektiven Geometrie die synthetische Raumlehre der Mathematiker des Altertums in vollkommenerer Form zu frischem Leben. Wir nennen einige Hauptwerke dieser Richtung:

L. N. M. Carnot, Géom. de position, Paris 1801; deutsch v. Schuhmacher, Altona 1808—10.

Ch. J. Brianchon, Mém. sur les lignes du 2ième ordre, Paris 1817.

J. V. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822.

A. F. Möbius, Der barycentr. Calcul, Leipzig 1827.

[1] Die älteren Schriften von S. F. Lacroix, M. Hachette, G. Schreiber, B. Gugler, Th. Olivier u. a. sind hier nicht mit aufgeführt. Ebenso wurde von Monographien abgesehen, die zum Teil weiterhin noch zu citieren sein werden.

J. Steiner, Systemat. Entwickelung d. Abhängigkeit geometrischer Gestalten, Berlin 1832; Die geom. Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie u. eines festen Kreises, Berlin 1833; Ges. Werke, herausg. v. Weierstraß, Berlin 1882.
M. Chasles, Mém. de géom. sur deux principes généraux, la dualité et l'homographie, Paris 1837; Traité de géom. supérieure, Paris 1852.
G. K. Chr. v. Staudt, Geom. d. Lage, Nürnberg 1847; Beiträge z. Geom. d. Lage, Nürnberg 1856.
Th. Reye, Die Geom. d. Lage, Leipzig 1866—67; 3. Aufl. 1886—92.
L. Cremona, Elementi di geometria projettiva, Turin 1873; deutsch v. Trautvetter, Stuttgart 1882.

Die von den neueren Autoren hergestellte enge Verbindung zwischen der darstellenden und projektiven Geometrie brachte es naturgemäß mit sich, daß die Centralprojektion als allgemeinstes Verfahren zum Ausgangspunkt für die Entwickelung der deskriptiven Methoden erhoben wurde. Dies betont namentlich W. Fiedler (Darst. Geom. 3. Aufl. I, p. 357). Wenn wir im vorliegenden Lehrbuche uns mehr dem ursprünglichen Gedankengange Monge's angeschlossen und die Parallelprojektion (speziell das Grund- und Aufrißverfahren) in den Vordergrund gestellt haben, so erklärt sich dies aus den damit verbundenen didaktischen Vorteilen und aus der überwiegenden Bedeutung, welche die Methode Monge's vor anderen in den technischen Anwendungen erlangt hat.

III. Kapitel.

[3]) Die Aufgaben über die körperliche Ecke wurden von Monge nur gestreift (Géom. descr. 1798, p. 28); ihre konstruktive Lösung findet sich aber vollständig — und zwar auch unter Verwendung des supplementären oder Polardreikantes — bei M. Hachette (Traité de géom. descr., Paris 1822, p. 122 ff.). G. Bellavitis verband mit der Konstruktion die Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie (Lez. d. geom. descr. Padua 1851, p. 43 ff.). Man vergl. über diesen Gegenstand: F. Hemming (Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVII. 1872, p. 159).

Die Relation zwischen den Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten eines (einfach zusammenhängenden) Polyëders wurde von L. Euler 1752 (Nov. Comm. Petrop. IV, p. 109 u. 156) gegeben.

[4]) L. Poinsot (Mém. sur les polygones et les polyèdres, Journ. de l'école polyt. 1810, cah. X, p. 16) untersuchte eingehend die Polyëder zweiter Art. Vergl. V. Eberhard (Zur Morphologie der Polyëder, Leipzig 1891).

IV. Kapitel.

[5]) Die im Altertum nur zu einem kleinen Teile bekannten Regeln der Centralprojektion (Perspektive) wurden im Zeitalter der Renaissance Gegenstand lebhaften Interesses. Mathematisch wurden sie zuerst von G. Ubaldo (Perspectivae libri sex, Pisauri 1600) und S. Stevin (Oeuvres math., 1605—1608, V, 1. Ausg. v. Girard, Leyden 1634, p. 521 ff.) behandelt.

Die „perspektive“ Raumauffassung, nach der man einer Geraden nur einen unendlich fernen Punkt, einer Ebene eine unendlich ferne Gerade zuschreibt, hat schon G. Desargues (Oeuvres p. Poudra, I, p. 103 ff.). Der Satz von der perspektiven Lage zweier Dreiecke, deren homologe Seiten sich auf

einer Geraden schneiden (woraus der Satz in 162 folgt) rührt ebenfalls von Desargues her (a. a. O. p. 413).

Weitere Fortschritte in der Darstellung durch Centralprojektion verdankt man W. J. van s'Gravesande (Essai de perspective, Haag 1711), Brook Taylor (New principles of linear perspective, London 1719), F. H. Lambert (Freie Persp., Zürich I. 1759, II. 1774) und später B. E. Cousinery (Géom. persp. ou principes de proj. polaire etc., Paris 1828). Die Untersuchungen dieser Autoren richteten sich auf die Enwickelung der graphischen Methoden, beschränkten sich indessen nicht auf die Abbildung der ebenen Figuren, sondern behandelten auch körperliche Gebilde.

Aber auch von den Gesichtspunkten der reinen synthetischen und der analytischen Geometrie aus betrachtet gewannen die aus der Centralprojektion entspringenden Beziehungeu zwischen den Raumformen ein allgemeineres Interesse und forderten zu ihrer Untersuchung heraus. Wir erwähnen J. V. Poncelet, der auf sie die Ausdrücke: „figures homologiques, centre, axe d'homologie“ anwandte (Propr. proj. 297, p. 159). A. F. Möbius definiert seine „kollinearverwandten“ Figuren durch die Bedingung, daß den Punkten einer geraden Linie in der ersten stets die Punkte einer geraden Linie in der andern Figur entsprechen (Baryc. Calcnl, VII, p. 301); er hebt hervor, daß die Projektionen ebener Figuren auf eine zweite Ebene zur Kollinearverwandtschaft führen (p. 321, Anm.), und beweist, daß sich je zwei kollineare ebene Figuren auf unendlich viele Arten in centrale Lage bringen lassen, wenn man zwei entsprechende Vierecke derselben kennt (p. 327). Von L. J. Magnus (Aufg. u. Lehrsätze a. d. analyt. Geom., Berlin 1833) rühren die heute gebräuchlichen Namen: „Kollineation, kollinear, Kollineationsachse, etc.“ her (a. a. O. p. 31, 43, 44). Bei M. Chasles tritt die Kollineation in dem „principe d'homographie“ (Aperçu histor., p. 261) als wichtigstes Mittel zur Generalisierung der Eigenschaften der Raumformen auf.

Die Abschnitte: Perspektive Grundgebilde (p. 144 ff.), Harmonische Grundgebilde, Vierseit und Viereck (p. 156 ff.) behandeln in der für unsere Zwecke geeigneten Form die Grundbegriffe der Geometrie der Lage. Näheres hierüber findet man in den obengenannten Werken von Steiner, von Staudt u. a.

[6]) Präzise Festsetzungen, nach denen die Messung von Strecken und Winkeln eindeutig ausgeführt werden kann, verdankt man im Wesentlichen Möbius, ebenso die Einführung des Begriffes: Doppelverhältnis („Doppelschnittsverhältnis“, Baryc. Calcul., p. 244 ff.). Vergl. Chasles (Ap. hist., Note IX, p. 302). — Der Begriff der harmonischen Teilung ist alt; vergl. Pappus (Collect. Math. VII, 145). Harmonische Strahlen kommen als „harmonicales“ bei Ph. de La Hire (Sect. con., Paris 1685), als „faisceau harmonique“ bei Brianchon (Mém. s. l. lignes du 2[e] ordre, Paris 1817) vor.

[7]) Der Name „Involution“ führt auf Desargues zurück (Traité des coniques, Oeuvres p. Poudra, I, p. 171). Vergl. Chasles (Ap. hist., Note X, p. 308, v. Staudt (Geom. d. Lage, p. 118).

V. Kapitel.

[8]) Die Kegelschnitte sind von den Geometern des Altertums zunächst als Schnitte des geraden Kreiskegels definiert und untersucht worden. Apollonius von Pergae (ca. 220 v. Chr.) erkannte diese Kurven als ebene Schnitte

eines beliebigen schiefen Kreiskegels (Conicorum l. I). Die Theorie der Kegelschnitte hat eine so ausgebreitete litterarische Bearbeitung erfahren, daß wir es uns hier versagen müssen, näher darauf einzugehen. Zum Studium sind J. Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie zu empfehlen (I. Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearb. v. C. F. Geiser, II. Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften, bearb. v. H. Schröter, Leipzig 1867); ferner: M. Chasles (Traité des sections coniques, Paris 1865), u. s. f. —

[9]) Der Satz von Bl. Pascal über das „hexagrammum mysticum" findet sich in seinem Essai pour les coniques, 1640 (Oeuvres p. Bossut, Paris 1779, 2. Aufl. 1819). Dieser Satz bildet mit seinen zahlreichen Folgerungen die Grundlage der Theorie der Pole und Polaren eines Kegelschnittes.

[10]) Ch. J. Brianchon (Journ. de l'école polyt. cah. XIII, 1806, p. 301). Der Satz von Brianchon steht dem Pascal'schen Satze dual gegenüber. Über die Begründung des Prinzips der Dualität sehe man Chasles (Ap. hist., Note XXXIV, p. 408).

[11]) Die hauptsächlichen Fokaleigenschaften der Kegelschnitte waren schon im Altertum bekannt; vergl. Apollonius (Conic. l. III, 45 ff.).

[12]) Die Konstruktion der Krümmungskreise bei den Kegelschnitten ist von W. Fiedler aus der Centralkollineation hergeleitet worden (Darst. Geom. 3. Aufl. I, p. 188 ff.). Elegante Konstruktionen gab C. Pelz an (Die Krümmungshalbmesserkonstruktionen der Kegelschnitte als Korollarien eines Steiner'schen Satzes, Sitz.-Ber. d. k. böhm. Ges. d. W., 1879). Die im Texte gegebene noch einfachere Darstellung ist neu; vergl. K. Rohn (Konstruktion des Krümmungsradius bei einem Kegelschnitt durch fünf Punkte, Ber. d. Math.-phys. Kl. d. K. S. Ges. d. W., Leipzig 1900).

VI. Kapitel.

[13]) Die einfachen Singularitäten der ebenen Kurven wurden zuerst von Euler analytisch untersucht (Introd. in. Anal. inf., 1748, II.), synthetisch findet man sie bei von Staudt (Geom. d. Lage, 1847, p. 110 ff.) behandelt.

[14]) Diese Tangentenkonstruktionen bei ebenen Kurven beruhen auf einer Idee von G. Persone gen. Roberval (1602—1673), die sich in einer nachgelassenen Abhandlung dargelegt findet (Sur la composition des mouvements etc., Anc. Mém. de l'Ac. d. Sc. VI, Paris 1730).

[15]) Zur Theorie der Krümmung der ebenen Kurven machte Chr. Huygens in der Untersuchung: De evolutione et dimensione linearum curvarum (Horologium oscillatorium, Paris 1673, III. Kap.) den Anfang. Die beiden Begründer der Infinitesimalrechnung G. W. Leibniz (s. Acta Erudit., Leipzig 1686 u. 1692) und J. Newton (s. Principia phil. nat. math., 1687, The Method of Fluxions etc., London 1736, probl. V., VI., p. 59 ff.) fügten weitere wesentliche Sätze hinzu.

[16]) Die Relation zwischen dem Krümmungsradius einer Kurve und dem ihres Bildes leitete für Centralprojektion zuerst L. Geisenheimer ab (Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXV, 1880); für Orthogonalprojektion gab schon G. Bellavitis (Geom. descritt., 1851, 338, p. 188) das Verhältnis an.

[17]) Chr. Wiener, Über die möglichst genaue Rektifikation eines verzeichneten Kurvenbogens, bestimmt auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVI, 1871).

[18]) Die Entstehung der gewöhnlichen Singularitäten der Raumkurven ist von Chr. Wiener (Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXV, 1880) besprochen und durch Modelle (1879) erläutert worden. Man vergl. von Staudt (Geom. d. Lage, 1847, p. 110 ff.).

VII. Kapitel.

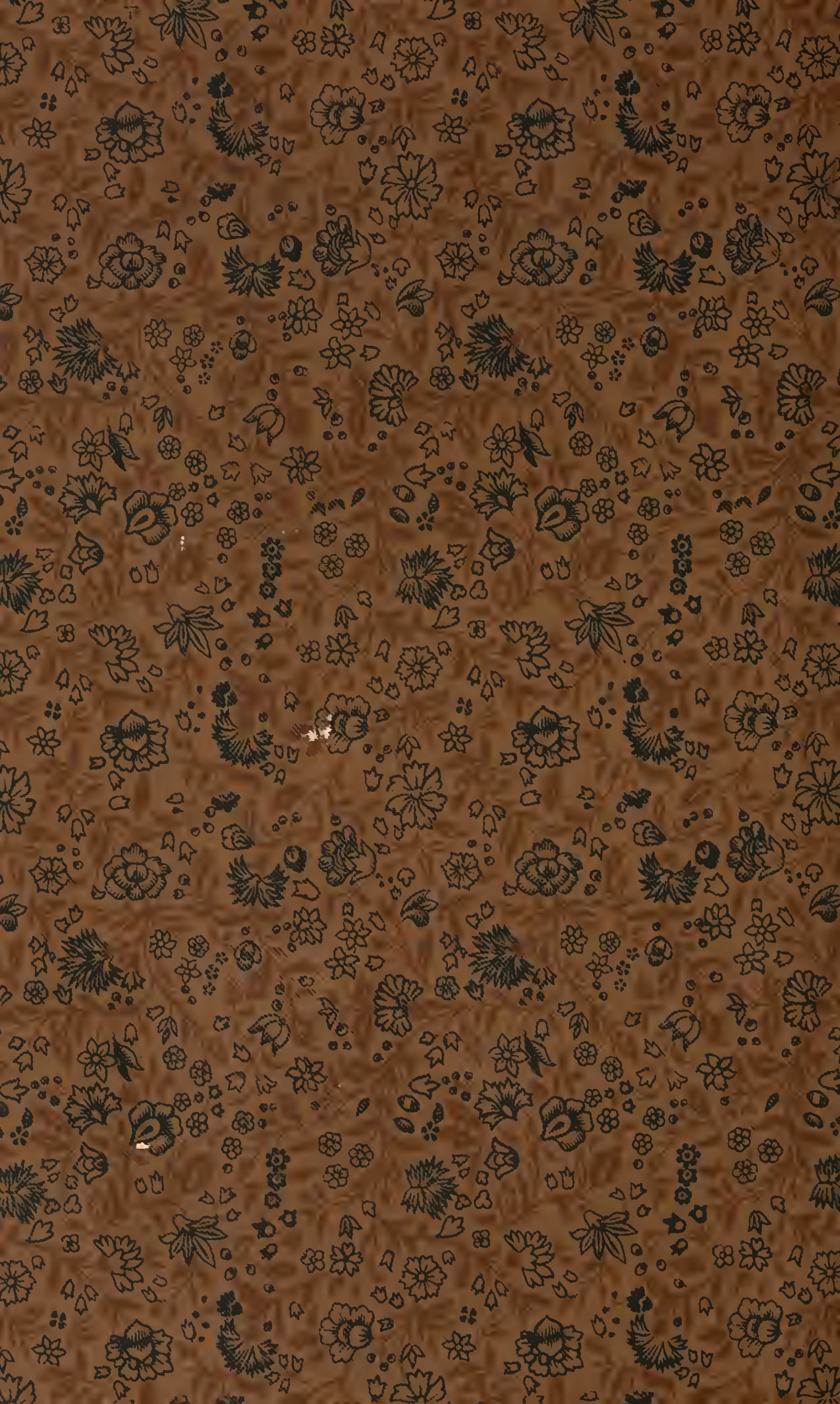
[19]) Bezüglich der Darstellung der Durchdringungskurve zweier Kegel (oder anderer Flächen 2. Grades) vergl. man Monge (Géom. descr., 1798, III. p. 59 ff.) und Hachette (Géom. descr., 1822, IV. p. 85 ff.). Wichtige allgemeine Eigenschaften dieser Raumkurven 4. Ordnung 1. Species, z. B. die Existenz der vier sie enthaltenden Kegel 2. Ordnung, gab zuerst Poncelet an (Propr. proj., 1822, p. 392 ff.). Man lese: H. Schröter (Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurven 4. Ordnung 1. Species, Leipzig 1890).

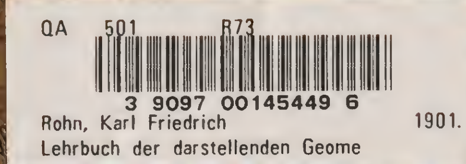
[20]) Einige Eigenschaften der Raumkurven 3. Ordnung erwähnt Möbius (Bar. Calcul, 1827, p. 118 ff.). Eine eingehendere Untersuchung lieferte Chasles (Comptes rendus, XL, 1857, p. 189 ff.). — Zum Studium dieser Kurven sind zu empfehlen: von Staudt (Beiträge z. Geom. d. Lage, 1860, § 33, p. 298), Reye (Geom. d. Lage. 3. Aufl. 1892, II. Abt., p. 188 ff. Im Vorwort z. 1. Aufl. d. II. Abt. findet man die Litteratur über die Raumkurven 3. Ordnung zusammengestellt); ferner H. Schröter (Theorie der Oberflächen 2. Ordnung u. d. Raumkurven 3. Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, Leipzig 1880).

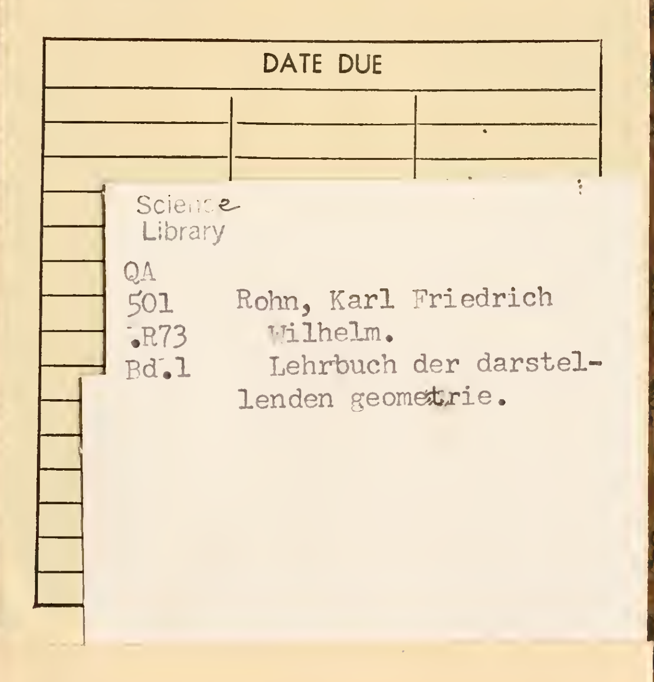
[21]) N. v. Fuss (Problematum quorundam sphaericorum solutio; De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae. Nov. Acta Petrop. II, III, 1788) definierte die sphärische Ellipse durch die Bedingung, daß die Summe der sphärischen Abstände jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten denselben Wert hat, und erkannte sie als Schnitt der Kugel mit einem koncentrischen Kegel 2. Ordnung. L. J. Magnus wurde in seiner Untersuchung (s. Ann. d. Mathém. XVI, 1826) auf den Satz geführt, daß die Hauptkreise, welche einen Kurvenpunkt mit den Brennpunkten verbinden, gleiche Winkel mit der sphärischen Tangente bilden. J. Steiner (Verwandlung und Teilung sphärischer Figuren durch Konstruktion, Crelle's Journ. II, 1827, p. 45) stellte die sphärische Ellipse als Hüllkurve dar. Dieselben Figuren behandelte Chasles (Mém. sur les propr. gen. des coniques sphériques, 1831), sowie Chr. Gudermann, Grundriß der analytischen Sphärik, Cöln 1830).

[22]) Die stereographische Projektion ist von Hipparch (ca. 160 v. Chr.) erfunden und von Ptolemaeus (ca. 140 n. Chr.) zur Abbildung der scheinbaren Himmelskugel im „Planisphaerium" benutzt worden; ihren Namen hat sie von Fr. Aguillon (Opticorum lib. VI, Antwerpen 1613, p. 498) erhalten. Näheres über dieses Abbildungsverfahren findet man bei E. Reusch (Die stereographische Projektion, Leipzig 1881) und über seine Verwendung in der Kartographie bei H. Gretschel (Lehrbuch d. Kartenprojektion, Weimar 1873).






QA 501 R73
3 9097 00145449 6
Rohn, Karl Friedrich
1901.
Lehrbuch der darstellenden Geome


Rohn, Karl Friedrich Wilhelm.
DATE DUE
Science Library
QA
501
.R73
Bd.1
Rohn, Karl Friedrich Wilhelm.
Lehrbuch der darstellenden geometrie.

